

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ДФУ)

На правах рукописи



Гой Владимир Александрович

**Исследование $SU(2)$ -глюодинамики в рамках
решеточного подхода**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Молочков А. В.

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Брагута В. В.

Владивосток – 2015

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Формализм	14
1.1. Понятие симметрии в физике	14
1.2. Калибровочная инвариантность	19
1.3. Калибровочные теории	22
1.4. Квантование калибровочных полей	25
1.5. Решеточные расчеты	30
1.6. Решеточная калибровочная теория	31
1.7. Метод Монте Карло	34
Глава 2. Операторы, определенные на одномерном и двумерном многообразии	36
2.1. Петля Вильсона и петля Полякова	36
2.2. Поверхностные операторы	37
2.3. Некоторые свойства матричного представления элементов груп- пы $SU(2)$	40
2.4. Поверхностные операторы на решетке	42
Глава 3. Исследование поверхностных операторов	44
3.1. Исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$	44
3.2. Исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(2)}$	56
3.3. Магнитный заряд	58
3.4. Максимально абелева калибровка	66
3.5. Исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(3)}$ в максимально абе- левой калибровке	70
Глава 4. Исследование аксиального магнитного эффекта	75

4.1. Детали вычислений	78
4.2. Результаты	82
Заключение	85
Список литературы	89

Введение

Актуальность темы исследования. На сегодняшний день квантовая хромодинамика (КХД) является общепринятой теорией, описывающей сильное взаимодействие, которое проявляется на масштабах $\lesssim 10^{-15}$ м. В рамках теории возмущений в области высоких энергий были получены многочисленные подтверждения того, что КХД является теорией, описывающей физику сильных взаимодействий. Однако более интересной является область низких энергий, к которой относятся большое количество наблюдаемых адронной физики (спектр масс барионов, мезонов, константы адронных распадов и др.), а также область энергий в которой происходят фазовые переходы.

Для изучения систем при низких энергиях, при которых сильная константа связи α_s принимает большие значения, так, что теория возмущений не работает, требуются непertурбативные методы исследования. Одним из таких методов является метод компьютерных вычислений, основывающийся на решеточной регуляризации КХД. С помощью данного метода становится возможным изучать важные свойства адронной материи, одним из которых является свойство невылетания цвета (конфайнмент). Данное свойство приводит к невозможности наблюдения одиночного свободного кварка в фазе адронной материи. В фазе кварк-глюонной плазмы (фаза деконфайнмента) кварки считают свободными.

Одним из возможных объяснений свойства конфайнмента является эффект Мейснера в дуальном сверхпроводнике второго рода. Эта идея была предложена Мандельштамом [1] и т'Хофтом [2]. Она заключается в образовании дуальной струны Абрикосова между электрическими зарядами в присутствии конденсата магнитных зарядов в вакууме (см. рис. 1).

В последнее время физики-экспериментаторы предпринимают большие усилия для поиска и изучения новых состояний вещества, используя ускорители заряженных частиц на встречных пучках: LHC (Large Hadron Collider, находится в ЦЕРНе) и RHIC (The Relativistic Heavy Ion Collider, находится в Брукхейвен-

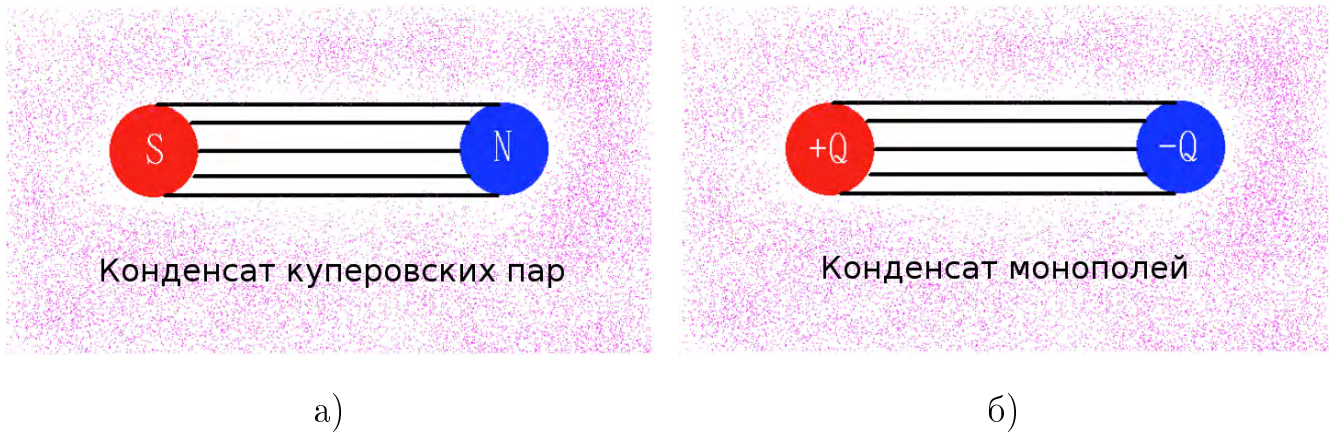


Рис. 1. Струна Абрикосова, связывающая магнитные заряды в сверхпроводнике второго рода, представлена на рис. а). На рис. б) представлена дуальная струна Абрикосова, связывающая электрические заряды, в дуальном сверхпроводнике второго рода. Рисунок взят из статьи [3].

ской национальной лаборатории, штат Нью-Йорк). Сталкивая тяжелые ионы (ядра свинца, золота и др.) при неупругом соударении на скоростях, близких к скорости света, можно на короткое время получить перегретое ядерное вещество, которое затем распадается на огромное количество частиц. Считается, что при этом наблюдается переход вещества в новое состояние кварк-глюонной плазмы и её остывание. Исследуя явления, происходящие при образовании и распаде нового состояния вещества, мы изучаем и совершенствуем теорию сильных взаимодействий, которая окажется полезной для ядерной физики, астрофизики, а также для понимания первых мгновений жизни Вселенной.

Одним из таких явлений является эффект разделения зарядов (CSE), который изначально был обнаружен на установке RHIC [4] и в последствии подтвержден на LHC [5], и киральный магнитный эффект (CME) [6–8]. Оба эти эффекта являются примерами аномального транспорта, который проявляется в квантовых системах, находящихся в термодинамическом равновесии (причем, данные эффекты не приводят к диссипации энергии), что позволяет исследовать эти эффекты в рамках решеточного подхода. CSE и CME проявляются при ненулевом значении химического потенциала. Этот факт существенно усложняет применение методов КХД на решетке для изучения этих эффектов. В тео-

рии с киральными фермионами во внешних магнитных полях \vec{B} [9] и на фоне локальных возмущений среды $\vec{\Omega}$ [10] ($\Omega^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j v_k$, где v_k – векторное поле скоростей в среде) киральные эффекты имеют форму равновесных токов

$$\vec{J} = \frac{\mu_5}{2\pi^2} \vec{B} + \frac{\mu\mu_5}{\pi^2} \vec{\Omega}, \quad (1)$$

$$\vec{J}_5 = \frac{\mu}{2\pi^2} \vec{B} + \left(\frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6} \right) \vec{\Omega}, \quad (2)$$

где T – температура, μ – химический потенциал, μ_5 – аксиальный химический потенциал, связанный с аксиальным зарядом Q_5 , который равен разности числа правых и левых частиц в среде. Коэффициенты, стоящие в формулах (1) и (2) перед \vec{B} и $\vec{\Omega}$, принято называть транспортными коэффициентами.

Из всего набора киральных эффектов, представленных в формулах (1) и (2), лишь один реализуется при нулевом значении химических потенциалов, что позволяет исследовать данный эффект в рамках решеточной КХД. Этот эффект имеет название аксиального кирального вихревого эффекта, транспортный коэффициент которого пропорционален T^2 (при $\mu = \mu_5 \equiv 0$) в рамках теории возмущения при высоких значениях температуры $T \gg T_c$ (где T_c – температура фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент).

Диссертация посвящена исследованию свойств конфайнмента в $SU(2)$ -глюодинамике в рамках решеточного подхода. А именно, проводится исследование топологических объектов, таких как монополи и вихри, и устанавливается их связь с фазовым переходом конфайнмент-деконфайнмент.

Первая часть диссертации посвящена исследованию свойств монополей. В качестве наблюдаемой впервые исследуется поведение поверхностного оператора в зависимости от площади и объема замкнутой поверхности.

Вторая часть работы посвящена исследованию вихрей в кварк-глюонной плазме, а в качестве наблюдаемой используется транспортный коэффициент $\sigma_{CVE,5}$ аксиального кирального вихревого эффекта. Прямое исследование вихревых эффектов в рамках решеточного подхода является достаточно сложной задачей, в связи с отсутствием непрерывной группы поворотов на решетке. Но,

согласно формуле Кубо $\sigma_{\text{CVE},5} = \sigma_{\text{AME}}$ [11, 12], где σ_{AME} – транспортный коэффициент аксиального магнитного эффекта (AME). Аксиальный магнитный эффект проявляется в равновесном бездиссипативном переносе энергии киральными фермионами вдоль направления аксиального магнитного поля. Таким образом, задача исследования вихрей свелась к изучению температурной зависимости σ_{AME} . Данное исследование выполнялось в формализме решеточной КХД без учета кварковых петель (quenched QCD).

Степень разработанности темы исследования. Невылетание цвета в квантовой хромодинамике является фундаментальным свойством адронной материи, без которого невозможно объяснить спектр адронов. Это свойство является следствием струноподобного взаимодействия кварков на больших расстояниях. Одним из возможных механизмов, обеспечивающих такое взаимодействие, являются магнитные монополи, сконденсированные в вакууме [1, 3] (см. рис. 1). Согласно т’Хофту [13], такие монополи могут возникнуть в результате частичного нарушения калибровочной симметрии. В настоящей работе рассмотрена чистая глюодинамика с калибровочной группой $SU(2)$ с улучшенным действием [14, 15], в рамках которой, исследуются поверхностный оператор, заданный на проекции группы $SU(2) \mapsto \theta \in [0, \pi]$ и аксиальный магнитный эффект [16].

Величиной, чувствительной к существованию монополей и магнитных диполей, является поверхностный оператор [17], который определяется дивергенцией хромомагнитного поля через замкнутую поверхность. С помощью численного моделирования на решетке в данной работе исследуется существование хромомагнитных монополей т’Хофта-Полякова в $SU(2)$ -глюодинамике.

Понятие поверхностного оператора было введено Гуковым (Gukov) и Виттенем (Witten) в статьях [17, 18] еще 2007 году. В этих же работах авторы делают выводы о поведении поверхностных операторов в разных фазах адронной материи. Феноменологический анализ поверхностного оператора приводится в статье [19]. Поверхностные операторы так же исследовались в $N = 4$ суперсим-

метричных полях Янга-Миллса в статье [20].

Связь механизма конфайнмента и конденсации монополей в вакууме рассматривается в статье [21]. Магнитные монополи в абелевой проекции группы $SU(2)$ исследуются в статьях [22, 23]. В этих работах проецируется потенциал калибровочного поля, а именно линковая переменная $U_\mu(x)$. В настоящей диссертации абелева проекция выполняется над решеточным тензором калибровочного поля $U_{\mu\nu}(x)$, что принципиально отличает диссертацию от упомянутых выше статей.

В настоящее время научное сообщество, занимающееся современной квантовой теорией поля, огромное внимание уделяет исследованию аномалий и симметрий, которые нарушены вследствие эффектов квантовой механики. Аномалии отвечают за квантовые процессы, которые были бы запрещены в случае их отсутствия, например, распад нейтрального пиона в два фотона. В последнее время приходит ясность того, что аномалии играют важную роль в транспортных свойствах в веществах, состоящих из киральных частиц. Эти эффекты заключаются в появлении бездиссипативного тока при наличии магнитного поля или вихрей. Это так называемые киральный магнитный эффект [6–9] и киральный вихревой эффект [10, 24]. В данной работе проводится исследование аксиального магнитного эффекта, транспортный коэффициент которого, связан с транспортным коэффициентом аксиального тока в киральном вихревом эффекте.

Поперечный и продольный (по отношению к направлению аксиального магнитного поля) поток энергии киральных частиц во внешнем аксиальном магнитном поле впервые исследуются в статье [12] в рамках решеточной КХД, в которой показывается, что продольный поток энергии в фазе кварк-глюонной плазмы зависит линейно от величины магнитного поля, а поперечный равен нулю в пределах ошибок. Зависимость от температуры впервые получена в настоящей диссертационной работе.

Цели и задачи диссертационной работы. Целями диссертационной

работы является исследование свойств конфайнмента, а именно:

- исследование хромомагнитных монополей с помощью поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$;
- исследование температурной зависимости аксиального магнитного эффекта.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

- определен поверхностный оператор в рамках решеточного подхода;
- разработан численный метод расчета поверхностных операторов;
- определена зависимость поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ в двух фазах адронной материи от обратной константы связи β , температуры T , площади S и объема V замкнутой поверхности;
- разработан численный метод расчета транспортного коэффициента аксиального магнитного эффекта;
- получена температурная зависимость транспортного коэффициента аксиального магнитного эффекта;
- определена асимптотика температурной зависимости транспортного коэффициента аксиального магнитного эффекта.

Научная новизна. В настоящей работе были впервые проведены численные исследования поверхностного оператора в рамках решеточного подхода в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$. В работе предложен аналитический вид зависимости значения поверхностного оператора от геометрии замкнутой поверхности. Получена физическое значение конечной части поверхностного коэффициента. В работе рассмотрены два типа замкнутых поверхностей:

пространственные и временные (2 пространственных направления и 1 временное, поверхность замыкается с помощью циклических граничных условий по времени).

Впервые было проведено исследование температурной зависимости аксиального магнитного эффекта в рамках решеточной КХД с калибровочной группой $SU(2)$ без учета кварковых петель. Получено, что поток энергии киральных фермионов вдоль направления аксиального магнитного поля отсутствует в фазе конфайнмента, в то время, как в фазе деконфайнмента поток пропорционален величине магнитного поля. Впервые получено, что транспортный коэффициент (σ_{AME}) резко растет в области перехода $T \sim T_c$ и достигает асимптотического поведения $\sim T^2$ при высоких температурах $T > T_c$.

Теоретическая и практическая значимость. В представленной диссертационной работе впервые проводятся численные исследования поведения поверхностных операторов в рамках $SU(2)$ -глюодинамики. Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут иметь применение в исследованиях калибровочной теории поля и в физике конденсированного состояния. Результаты позволяют лучше понять физику структуры адронной материи и могут быть применены для дальнейших теоретических исследований.

Представленные исследования аксиального магнитного эффекта могут быть применимы в экспериментальной физике, связанной с высокоэнергетическими столкновениями ядер тяжелых элементов (LHC, RHIC, FAIR) при поиске, анализе и детектировании высокотемпературных состояний адронной материи (кварк-глюонной плазмы).

Методология и методы исследования. Исследования, составляющие диссертацию, проводились методами квантовой теории поля на решетке. Это позволяет вычислять наблюдаемые без использования теории возмущений. В расчетах использовалось вильсоновское улучшенное действие для калибровочного поля [25]. Для исследования поверхностных операторов так же использовалось обычное вильсоновское действие [26].

Расчет наблюдаемых проводился с использованием методов Монте Карло. Все вычисления были максимально эффективным образом распределены на параллельные составляющие, что позволило проводить расчеты на суперкомпьютере. Расчеты проводились на суперкомпьютере ИТЭФ и суперкомпьютере ДВО РАН.

Для исследования аксиального магнитного эффекта фермионы в теорию вводились с помощью кирально симметричного решеточного оператора Дирака [27] (overlap Dirac operator).

Положения, выносимые на защиту:

- Получено, что поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ зависит только от площади замкнутой поверхности и не зависит от объема в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$.
- Показано, что в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$ поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ определяется только решеточной обратной константой связи β и не зависит от температуры T . Получено, что поверхностный коэффициент σ в своем разложении имеет пертурбативный вклад $\sim 1/\beta$ и непертурбативный вклад $\sim a^2$.
- Получено значение поверхностной плотности хромомангнитных диполей σ_{ph} : $\sqrt{\sigma_{ph}} = 78(1)$ МэВ в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$.
- В рамках решеточной КХД с калибровочной группой $SU(2)$ без учета кварковых петель (quenched QCD) впервые получена температурная зависимость транспортного коэффициента проводимости аксиального магнитного эффекта (σ_{AME}).
- Получено, что транспортный коэффициент (σ_{AME}) резко растет в области перехода $T \sim T_c$ и достигает асимптотического поведения $\sim T^2$ при высоких температурах $T > T_c$ в фазе кварк-глюонной плазмы. В фазе конфайнмента АМЕ отсутствует.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность выводов обеспечена надежностью применявшихся методов и подтверждается результатами апробации работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных конференциях:

1. «Witten parameter in the SU(2)-gluodynamics» XXI International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems (September 10 – 15, 2012, JINR, Dubna, Russia),
2. «Witten parameter and HPC on the lattice» International Workshop «Nuclear Theory in the Supercomputing Era» (June 18 – 22, 2012, Pacific National University, Khabarovsk, Russia),
3. «Witten parameter in pure gauge SU(2) theory» Xth Quark Confinement and the Hadron Spectrum (October 8 – 12, 2012, TUM Campus Garching, Munich, Germany),
4. «Surface operator study in SU(2) gauge field theory» 31st International Symposium on Lattice Field Theory – LATTICE 2013 (July 29 – August 3, 2013, Mainz, Germany),
5. «Study of axial magnetic effect» The 32nd International Symposium on Lattice Field Theory – LATTICE 2014 (June 23 – 28, 2014, Columbia University New York, USA),
6. «Study of axial magnetic effect in SU(2) QCD» QUARKS-2014 18th International Seminar on High Energy Physics (June 2 – 8, 2014, Suzdal, Russia),
7. «Study of magnetic monopole condensation using surface operators» Quark Confinement and the Hadron Spectrum XI (September 7 – 12, 2014, St. Petersburg, Russia),
8. «Study of axial magnetic effect» Quark Confinement and the Hadron Spectrum XI (September 7 – 12, 2014, St. Petersburg, Russia),

9. «Axial magnetic effect in QCD» 17th High-Energy Physics International Conference in Quantum Chromodynamics (June 30 – July 4, 2014, Montpellier, France),
10. «Axial magnetic effect in QCD» 3rd International Conference on New Frontiers in Physics (July 28 – August 6, 2014, Conference Center of the Orthodox Academy of Crete, Greece),
11. «Surface operators in the SU(2)-gluodynamics» International Workshop «Monte Carlo methods in computer simulations of complex systems» (October 13 – 20, 2014, Vladivostok, Russia).

а так же на научных семинарах ИТЭФ (г. Москва), ДВФУ (г. Владивосток), ДВО РАН (г. Владивосток), НИИЯФ МГУ (г. Москва), НИЦ «Курчатовский институт» (г. Москва).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 8 статей в рецензируемых научных изданиях [16, 28–34] и 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [35].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает в себя введение, 4 главы основного текста и заключение. Объем диссертации составляет 95 страниц, включая 21 рисунок и 4 таблицы. Список литературы содержит 70 источников.

Глава 1

Формализм

1.1. Понятие симметрии в физике

Под симметрией в физике понимается неизменность структуры, свойств, формы, состояния системы, относительно определенного вида преобразования. Когда уравнение, соответствующее физическому закону, не меняется при некотором преобразовании, говорят, что оно обладает симметрией. Некоторые симметрии в физике являются точными, например, симметрия пространства-времени относительно группы Пуанкаре, другие являются приближенными (симметрия относительно вращения в изотопическом пространстве состояний адронов). Различают дискретные и непрерывные преобразования, глобальные и локальные. К дискретным преобразованиям относятся:

- зарядовое сопряжение (C) – операция замены всех частиц в системе на соответствующие им античастицы. Сильное взаимодействие и электромагнитное взаимодействие не меняются при зарядовом сопряжении, слабое взаимодействие – изменяется при C -преобразовании;
- пространственная инверсия (P) – изменение знака пространственных координат. Сильное и электромагнитное взаимодействия инвариантны относительно данного вида преобразования, слабое – не инвариантно;
- комбинированной чётности (CP) – операция сопоставления физической системе, состоящей из каких-либо частиц, другой системы, состоящей из соответствующих античастиц и представляющей зеркальное изображение первой. Слабое взаимодействие нарушает комбинированную четность;
- обращение времени (T) – математическая операция замены знака времени в уравнениях движения. Большинство элементарных процессов в физике

частиц инвариантно относительно обращения времени. Процессы с участием большого числа частиц идут только в одном направлении, вследствие второго начала термодинамики, и не инвариантны относительно Т-преобразования;

- СРТ-преобразование – последовательное применение С-, Р-, Т-преобразований к системе частиц. Важную роль в физике частиц играет СРТ-теорема, согласно которой уравнения квантовой теории поля инвариантны относительно СРТ-преобразования.

Дискретные преобразования не имеют параметра преобразования и применяются ко всей системе целиком. Наряду с ними в физике огромное внимание уделяется непрерывным глобальным преобразованиям из которых, согласно теореме Нётер [36], следуют законы сохранения. Теорема Нётер гласит, что каждому генератору группы непрерывной симметрии соответствует сохраняющийся ток.

Приведем простое доказательство этой теоремы. Обозначим поля нашей теории как φ_a . Поскольку симметрия является непрерывной, можно рассмотреть бесконечно малое изменение поля $\delta\varphi_a$. Так как \mathcal{L} при этом не меняется, получаем

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a}\delta\partial_\mu\varphi_a = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a}\partial_\mu\delta\varphi_a = 0. \quad (1.1)$$

Воспользуемся уравнениями движения

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \right), \quad (1.2)$$

и объединив (1.1) и (1.2) получим

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \delta\varphi_a \right) = 0. \quad (1.3)$$

Если определить

$$J^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \delta\varphi_a, \quad (1.4)$$

то выражение (1.3) будет означать, что

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1.5)$$

Таким образом мы нашли сохраняющийся ток, который соответствует непрерывному преобразованию $\delta\varphi_a$.

Для того чтобы физические законы были инвариантны относительно некоторой группы преобразований, нужно лишь, чтобы инвариантным было действие. При этом плотность лагранжиана может измениться на полную производную $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ при условии, что соответствующий граничный член можно опустить. Тогда из (1.3) будет следовать, что для вывода формулы для сохраняющегося тока необходимо будет лишь модифицировать (1.4) до вида

$$J^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \delta\varphi_a - K^\mu. \quad (1.6)$$

Пространство-время в физике инвариантно относительно широкой группы преобразований, в которую входят пространственные трансляции, временные трансляции, пространственные повороты и бусты. Общий вид таких преобразований записывается в виде

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.7)$$

где Λ^μ_ν – параметры пространство-временных поворотов, a^μ – параметры пространство-временных трансляций. Данный вид симметрии генерирует закон сохранения полного 4-х импульса системы P_μ и закон сохранения тензора полного углового момента системы $J_{\mu\nu}$.

Симметрии не только приводят к законам сохранения, они также ограничивают множество слагаемых, которые могут использовать физики-теоретики для построения действия для описания какой-либо модели. Например, в теории скалярного поля мы можем потребовать инвариантность действия относительно преобразования $\varphi \rightarrow -\varphi$ и таким образом исключить из действия члены нечетной степени по φ , например φ^3 . Если член φ^3 присутствует, два мезона могут

рассеяться и перейти в три мезона. В отсутствии этого члена такой процесс запрещен и диаграмму Фейнмана с нечетным числом внешних линий нарисовать будет нельзя. Таким образом, простая симметрия относительно отражений $\varphi \rightarrow -\varphi$ подразумевает, что в любом процессе рассеяния число мезонов сохраняется по модулю 2.

Обратимся к теории с двумя скалярными полями φ_1 и φ_2 , удовлетворяющими симметрии относительно отражения $\varphi_a \rightarrow -\varphi_a$ ($a = 1, 2$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\varphi_1)^2 - \frac{1}{2} m_1^2 \varphi_1^2 - \frac{\lambda_1}{4} \varphi_1^4 + \frac{1}{2} (\partial\varphi_2)^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \varphi_2^2 - \frac{\lambda_2}{4} \varphi_2^4 - \frac{\rho}{2} \varphi_1^2 \varphi_2^2. \quad (1.8)$$

Лагранжиан \mathcal{L} описывает взаимодействие двух скалярных частиц, назовем их 1 и 2, с массами m_1 и m_2 . В низшем порядке они могут рассеиваться следующим образом: $1 + 1 \rightarrow 1 + 1$, $2 + 2 \rightarrow 2 + 2$, $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$, $1 + 1 \rightarrow 2 + 2$ и $2 + 2 \rightarrow 1 + 1$. Если пять параметров m_1 , m_2 , λ_1 , λ_2 и ρ абсолютно произвольны, между частицами нет никакой взаимосвязи.

Если наши частицы 1 и 2 обладают симметрией перестановки $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, тогда пять параметров в теории с лагранжианом (1.8) становятся частично зависимыми, а именно для этой симметрии требуется выполнение равенств $m_1 = m_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2$.

Предположим, что наши два скалярных поля φ_1 и φ_2 обладают «внутренней» $SO(2)$ -симметрией, внутренней в том смысле, что преобразование не имеет ничего общего с преобразованием пространства-времени. В отличие от симметрии перестановки $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, это преобразование зависит от непрерывного параметра θ , а соответствующая симметрия называется непрерывной

$$\begin{cases} \varphi_1(x) \rightarrow \cos \theta \varphi_1(x) + \sin \theta \varphi_2(x), \\ \varphi_2(x) \rightarrow -\sin \theta \varphi_1(x) + \cos \theta \varphi_2(x). \end{cases} \quad (1.9)$$

Для реализации такой симметрии требуется выполнение равенств $m_1 = m_2 \equiv m$ и $\rho = \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$. В таком случае лагранжиан (1.8) примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2 \right] - \frac{1}{2} m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (1.10)$$

Рассмотренную выше теорию взаимодействия двух скалярных полей, обладающих внутренней $SO(2)$ -симметрией можно переписать в терминах комплексного поля $\varphi \equiv (\varphi_1 + i\varphi_2) / \sqrt{2}$. Лагранжиан (1.10) при этом примет вид

$$\mathcal{L} = \partial\varphi^\dagger\partial\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi - \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2. \quad (1.11)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно $U(1)$ преобразования

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow e^{i\theta}\varphi, \\ \varphi^\dagger \rightarrow e^{-i\theta}\varphi^\dagger. \end{cases} \quad (1.12)$$

Группы симметрии $SO(2)$ и $U(1)$ изоморфны. Из (1.4) можно найти сохраняющийся ток

$$J_\mu = i(\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^\dagger\varphi). \quad (1.13)$$

Используя канонический формализм, можно получить выражение для заряда, связанного с сохраняющимся током J_μ

$$Q \equiv \int d^3x J^0 = \int d^3x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\varphi_a} \delta\varphi_a. \quad (1.14)$$

Величина $\delta\mathcal{L}/\delta\partial_0\varphi_a \equiv \pi_a$ является каноническим импульсом, сопряженный полю φ_a с коммутационным соотношением

$$[\pi_a(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (1.15)$$

Коммутируя выражение (1.14) с полем φ_a , получим

$$i[Q, \varphi_a] = \delta\varphi_a. \quad (1.16)$$

Таким образом оператор заряда генерирует соответствующее преобразование полей.

На приведенных выше примерах показано, что симметрии играют огромную роль для современной физики. Помимо глобальных преобразований, существуют и локальные преобразования (калибровочные), оставляющие действие инвариантным. Такими преобразованиями мы займемся в следующем разделе.

1.2. Калибровочная инвариантность

Для определенности зададим N -компонентное комплексное скалярное поле $\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$, преобразующееся как $\varphi(x) \rightarrow U\varphi(x)$, где U – элемент группы $SU(N)$. Так как $\varphi^\dagger \rightarrow \varphi^\dagger U^\dagger$ и $U^\dagger U = 1$, имеем $\varphi^\dagger \varphi \rightarrow \varphi^\dagger \varphi$ и $\partial\varphi^\dagger \partial\varphi \rightarrow \partial\varphi^\dagger \partial\varphi$. Для любого многочлена V очевидна инвариантность лагранжиана $\mathcal{L} = \partial\varphi^\dagger \partial\varphi - V(\varphi^\dagger \varphi)$ относительно группы преобразований $SU(N)$.

В 1954 году Ч. Н. Янг и Р. Миллс задались вопросом, что произойдет, если преобразование будет меняться от точки к точке в пространстве-времени, другими словами, если $U = U(x)$ будет зависеть от x .

Ясно, что $\varphi^\dagger \varphi$ остается инвариантным. Но $\partial\varphi^\dagger \partial\varphi$, наоборот, больше не будет инвариантным. Действительно,

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow \partial_\mu (U\varphi) = U\partial_\mu \varphi + (\partial_\mu U)\varphi = U [\partial_\mu \varphi + (U^\dagger \partial_\mu U)\varphi] . \quad (1.17)$$

Чтобы сократить нежелательный для нас член $(U^\dagger \partial_\mu U)\varphi$ требуется обобщить обычную производную ∂_μ до ковариантной производной D_μ , которая при действии на φ дает

$$D_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \varphi(x) - iA_\mu(x)\varphi(x) . \quad (1.18)$$

Поле $A_\mu(x)$ называется калибровочным потенциалом. Очевидно, что $A_\mu(x)$ должны быть матрицами $N \times N$. Физические причины появления калибровочного потенциала можно найти в выражении (3.33) раздела 3.3 настоящей диссертации.

Теперь требуется найти преобразование для калибровочного поля $A_\mu(x)$, чтобы оказалось справедливым $D_\mu \varphi(x) \rightarrow U(x)D_\mu \varphi(x)$. Если найти такое преобразование, то выражение $[D_\mu \varphi(x)]^\dagger D_\mu \varphi(x) \rightarrow [D_\mu \varphi(x)]^\dagger D_\mu \varphi(x)$ можно использовать в качестве инвариантного кинетического члена для поля $\varphi(x)$.

Итак, преобразование $D_\mu \varphi(x) \rightarrow U(x)D_\mu \varphi(x)$ оказывается справедливым в случае, когда

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^\dagger - i(\partial_\mu U)U^\dagger = UA_\mu U^\dagger + iU\partial_\mu U^\dagger . \quad (1.19)$$

Равенство следует из условия $UU^\dagger = 1$. Эрмитово сопряженное поле $A_\mu^\dagger(x)$ преобразуется следующим образом

$$A_\mu^\dagger \rightarrow UA_\mu^\dagger U^\dagger + iU\partial_\mu U^\dagger. \quad (1.20)$$

Получается, что $A_\mu - A_\mu^\dagger \rightarrow U(A_\mu - A_\mu^\dagger)U^\dagger$, из чего следует условие $A_\mu - A_\mu^\dagger = 0$. Поэтому можно считать A_μ эрмитовым.

Теперь мы можем записать калибровочно-инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L} = (D_\mu\varphi)^\dagger(D_\mu\varphi) - V(\varphi^\dagger\varphi), \quad (1.21)$$

но калибровочный потенциал $A_\mu(x)$ не будет иметь собственной динамики. Известно, что максвелловские уравнения для электромагнитного поля без полей материи (в случае исследования динамики чистого электромагнитного поля) легко получаются из лагранжиана $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля, обладающий $U(1)$ калибровочной симметрией. Таким образом, нам требуется построить напряженность поля $F_{\mu\nu}$ из A_μ , чтобы ввести динамику поля $A_\mu(x)$ в лагранжиан (1.21).

Введем матричную 1-форму $A = A_\mu dx^\mu$, т.е. форму, являющуюся матрицей в фундаментальном представлении алгебры Ли. Обратим внимание, что

$$A^2 = A_\mu A_\nu dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]dx^\mu dx^\nu \quad (1.22)$$

не равно нулю для неабелева калибровочного потенциала; очевидно, что в электродинамике нет такого объекта. Коммутатор в (1.22) получается, т.к. справедливо равенство $dx^\mu dx^\nu = -dx^\nu dx^\mu$.

Наша задача – получить 2-форму $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ из 1-формы A . Из A можно получить лишь две возможные 2-формы: dA и A^2 . Таким образом, F должна быть линейной комбинацией этих двух форм.

В наших обозначениях закон преобразования (1.19) сводится к виду

$$A \rightarrow UAU^\dagger + iUdU^\dagger, \quad (1.23)$$

где U – 0-форма, и $dU^\dagger = \partial_\mu U^\dagger dx^\mu$. Действуя на (1.23) оператором d , согласно правилу $d(\omega^k \omega^p) = (d\omega^k) \omega^p + (-1)^k \omega^k (d\omega^p)$, где ω^k и ω^p – k -форма и p -форма соответственно, получаем

$$dA \rightarrow U(dA)U^\dagger + (dU)AU^\dagger - UAdU^\dagger + \imath dUdU^\dagger. \quad (1.24)$$

С другой стороны, возводя (1.23) в квадрат, получаем

$$A^2 \rightarrow UA^2U^\dagger + \imath UAdU^\dagger + \imath U(dU^\dagger)UAU^\dagger - U(dU^\dagger)UdU^\dagger. \quad (1.25)$$

Действуя на $UU^\dagger = 1$ оператором d , получаем $dU^\dagger = -(dU)U^\dagger$. Поэтому можно переписать (1.25) в виде

$$A^2 \rightarrow UA^2U^\dagger + \imath UAdU^\dagger - \imath (dU)AU^\dagger + (dU)dU^\dagger. \quad (1.26)$$

Теперь если мы посмотрим как преобразуется величина $dA - \imath A^2$, то получим нечто простое

$$dA - \imath A^2 \rightarrow U(dA - \imath A^2)U^\dagger. \quad (1.27)$$

Математическая структура, таким образом, привела Янга и Миллса к следующему определению напряженности поля

$$F = dA - \imath A^2. \quad (1.28)$$

В отличие от A , 2-форма напряженности поля F преобразуется однородно

$$F \rightarrow UFU^\dagger. \quad (1.29)$$

В абелевом случае A^2 исчезает, и выражение для F сводится к обычному электромагнитному виду. В неабелевом случае F не калибровочно инвариантна, но калибровочно ковариантна.

Выражение (1.28) можно переписать в виде

$$F = (\partial_\mu A_\nu - \imath A_\mu A_\nu) dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \imath [A_\mu, A_\nu]) dx^\mu dx^\nu. \quad (1.30)$$

Если определить $F \equiv \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, получим

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (1.31)$$

С учетом того, что F преобразуется однородно (1.29), можно сразу записать аналог лагранжиана Максвелла, называемый лагранжианом Янга-Миллса, который определяет динамику калибровочного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.32)$$

если генераторы группы $SU(N)$ λ^a нормируются как $\text{Tr} \lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$, так что $\mathcal{L} = -(1/4g^2) F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$, где $F_{\mu\nu}^a = 2 \text{Tr} (\lambda^a F_{\mu\nu})$.

Следует отметить, что калибровочная «симметрия» связывает между собой не два различных физических состояния, а два описания одного и того же состояния. Мы не можем обойтись без этого странного избыточного языка. Хотя мы с этим можем бороться с помощью фиксации калибровки.

1.3. Калибровочные теории

Лагранжиан квантовой электродинамики

$$L_{QED} = \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (1.33)$$

инвариантен относительно весьма широкой группы преобразований

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.34)$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.35)$$

допускающей вращение системы (Λ^μ_ν) , трансляции (a^μ) и независимые калибровочные преобразования симметрии в каждой точке пространства-времени. Здесь A_μ – 4-векторный потенциал электромагнитного поля, e – электрический заряд, $\alpha(x)$ – непрерывная скалярная функция. Данный лагранжиан позволяет получить описание наблюдаемых явлений от макроскопических масштабов

до масштабов 10^{-15} м, с точностью, выходящей за пределы возможностей современных экспериментов. В общем случае локальная калибровочная инвариантность лагранжиана относительно некоторой непрерывной группы позволяет строить различные теории поля, претендующие на описание различных взаимодействий. Квантовая электродинамика является примером абелевой калибровочной теории. Рассмотрим простейшие неабелевы калибровочные теории.

Пусть группа симметрии лагранжиана есть произвольная унитарная непрерывная группа G . Тогда, согласно (1.31), обобщенный тензор электромагнитного поля выглядит следующим образом

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.36)$$

где g - калибровочная константа связи, а f^{abc} - структурные константы группы G .

Элемент g унитарной непрерывной группы G в фундаментальном представлении может быть параметризован с помощью набора эрмитовых генераторов λ^a и параметров ω^a

$$g = e^{i\omega^a \lambda^a}. \quad (1.37)$$

Структурные константы определяются из коммутационных соотношений для генераторов группы:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = i f^{abc} \lambda^c. \quad (1.38)$$

Уравнения Максвелла для электродинамики следуют из лагранжиана вида

$$L = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - j^\mu A_\mu, \quad (1.39)$$

где j^μ - внешний источник электромагнитного поля. Неабелева калибровочная теория определяется аналогичным лагранжианом, но содержащим дополнительно суммирование по изоспиновому индексу. Классические уравнения движения для электромагнитного поля

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (1.40)$$

в случае неабелевой теории принимают вид

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = j^{a\nu}, \quad (1.41)$$

где ковариантная производная определяется как

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = \partial_\mu F^{a\mu\nu} + gf^{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu}. \quad (1.42)$$

Равенство, являющееся неабелевым аналогом условия сохранения тока, имеет вид

$$(D_\mu j^\mu)^a = 0. \quad (1.43)$$

Удобно ввести определение матричного потенциала с помощью свертки с генераторами группы

$$A_\mu = A_\mu^a \lambda^a. \quad (1.44)$$

Обратное соотношение, с учетом нормировки генераторов группы $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$, имеет вид

$$A_\mu^a = 2 \text{Tr}(\lambda^a A_\mu). \quad (1.45)$$

Таким образом, выражение (1.36) для $F_{\mu\nu}$ может быть записано в матричном виде

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (1.46)$$

а лагранжиан выражается как

$$L = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + 2 \text{Tr}(j^\mu A_\mu). \quad (1.47)$$

При калибровочных преобразованиях A_μ и $F_{\mu\nu}$ преобразуются согласно следующим соотношениям

$$A_\mu \rightarrow g^{-1} A_\mu g + \frac{i}{g} g^{-1} \partial_\mu g, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow g^{-1} F_{\mu\nu} g. \quad (1.48)$$

Как известно, элемент калибровочной группы квантовой электродинамики может быть выражен как $e^{-ig\alpha(x)}$, из этого следует, что КЭД является U(1) калибровочной теорией. Простейшей неабелевой группой является группа SU(2),

которая будет рассмотрена ниже. Полевые конфигурации калибровочной теории с данной группой были численно смоделированы с помощью решеточных расчетов [26, 37–41].

1.4. Квантование калибровочных полей

В теории поля [42–45] справедливо утверждение, что единственным надежным выражением для производящего функционала в виде функционального интеграла является то, которое основано на каноническом формализме, т.е. выражение вида

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \exp \left[i \int (\varphi\pi - \mathcal{H}) dx \right], \quad (1.49)$$

где φ и π – канонические координаты и канонический импульс, \mathcal{H} – Гамильтониан системы. Данное утверждение справедливо, поскольку канонический формализм наиболее близок к эксперименту. На эксперименте продукты какой-либо реакции описываются в терминах собственных состояний Гамильтониана \mathcal{H} . Следует отметить, что существуют и другие формализмы, в рамках которых можно описывать экспериментальные данные. Например формализм, развитый американским физиком Джулианом Швингером, который называется «Теория источников» [46, 47]. В конце 60-х Швингер пытался полностью переработать квантовую теорию поля, которая была создана во многом его усилиями. Его новая теория, носившая название теории источников (англ. Source theory), была ответом на неудачи существовавшей тогда операторной теории поля в описании последних экспериментальных открытий.

После интегрирования по каноническому импульсу π в выражении (1.49) мы не получим «Лагранжева» функционального интеграла

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int (\mathcal{L} + J\varphi) dx \right], \quad (1.50)$$

если не считать того случая, когда отсутствуют связи и оператор \mathcal{H} квадратичный по π с постоянными коэффициентами. Имеются много полевых теорий, в

которых эти условия не выполняются, в том числе в нелинейной сигма-модели, неабелевой калибровочной теории и в гравитации. Однако в неабелевой калибровочной теории метод Фадеева – Попова [48] позволяет преодолеть возникающие трудности. Таким образом, при квантовании калибровочных полей мы будем использовать выражение для производящего функционала в виде «Лагранжева» функционального интеграла.

В случае квантовой электродинамики производящий функционал имеет вид

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i \int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) dx \right], \quad (1.51)$$

где J^μ – внешний токовый источник, а \mathcal{L} – лагранжиан, который в отсутствии полей материи имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.52)$$

Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно калибровочных преобразований $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, но интеграл в выражении (1.51) берется по всем A_μ , в том числе и по тем, которые связаны друг с другом калибровочным преобразованием. Очевидно, что это приводит к бесконечному вкладу в \mathcal{Z} .

Запишем каждое поле A_μ в виде

$$A_\mu \sim \bar{A}_\mu, \Lambda(x), \quad (1.53)$$

где A_μ – класс всех потенциалов, которые могут быть получены из фиксированного потенциала \bar{A}_μ калибровочным преобразованием с некоторой функцией $\Lambda(x)$. Тогда интеграл, представляющий величину \mathcal{Z} , можно факторизовать

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \sim \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu e^{iS} \int \mathcal{D}\Lambda. \quad (1.54)$$

Именно последний множитель $\int \mathcal{D}\Lambda$ многократно учитывается, что приводит к расходимости. Для удаления этой мультипликативной бесконечности нам необходимо ввести в \mathcal{Z} множитель, обеспечивающий сходимость. Для этого рассмотрим конкретную калибровку и попробуем интеграл факторизовать так, чтобы явно выделить мультипликативную бесконечность.

Запишем калибровочное условие в виде

$$F^a[A_\mu^b] = 0, \quad (1.55)$$

где a и b – индексы внутренней симметрии. Будем рассматривать случай, когда F – линейная функция (или функционал) поля A .

Интегрирование по Λ в формуле (1.54) является, очевидно, интегрированием по групповому пространству. Рассмотрим группу G , элементы которой будем обозначать как $g \in G$. Определим меру Хаара на группе G как меру интегрирования, инвариантную относительно групповых преобразований

$$dg = d(g'g), \quad g, g' \in G. \quad (1.56)$$

Для компактных групп всегда можно найти такую инвариантную меру. Например, для группы 3-х мерных вращений она равна $\sin \beta d\alpha d\beta d\gamma$, где α , β и γ – углы Эйлера.

В случае рассмотрения калибровочного поля, обладающего внутренней симметрией, можно ввести матричный потенциал (1.44), в терминах которого калибровочное преобразование записывается в обычном виде

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad (1.57)$$

где $U = \exp[i\omega^a(x)\lambda^a]$, а λ^a – генераторы группы G . В случае инфинитезимального преобразования имеем

$$U(\omega) = 1 + i\omega^a(x)\lambda^a + O(\omega)^2, \quad (1.58)$$

так что групповая мера при инфинитезимальных преобразованиях может быть выражена в виде

$$dg = \prod_a d\omega^a = d\omega. \quad (1.59)$$

Калибровочное преобразование теперь можно записать следующим образом

$$A_\mu^a \rightarrow (A_\omega)_\mu^a = A_\mu^a + f^{abc}A_\mu^b\omega^c + \partial_\mu\omega^a, \quad (1.60)$$

где f^{abc} – структурные константы группы G . В случае группы $SU(2)$ структурными константами является антисимметричный тензор ε^{abc} .

Рассмотрим теперь величину

$$\Delta^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\omega \delta(F[A_\omega]) = \int \mathcal{D}g'' \delta(F[A_{g''}]) , \quad (1.61)$$

где $\mathcal{D}\omega = \prod_x d\omega(x)$, $\mathcal{D}g = \prod_x dg(x)$ и $\delta(F[A_\omega])$ – δ -функционал, т.е. произведение δ -функций Дирака по одной в каждой пространственно-временной точке, под A понимается поле A_μ^a . Величина $\Delta^{-1}[A]$ калибровочно-инвариантна

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A_g] &= \int \mathcal{D}g' \delta(F[A_{g'g}]) = \int \mathcal{D}(g'g) \delta(F[A_{g'g}]) = \\ &= \int \mathcal{D}g'' \delta(F[A_{g''}]) = \Delta^{-1}[A] , \end{aligned} \quad (1.62)$$

где учтено свойство меры Хаара(1.56). Перепишем выражение (1.61)

$$1 = \Delta[A] \int \mathcal{D}\omega \delta(F[A_\omega]) . \quad (1.63)$$

Таким образом мы получили интегральное выражение для единицы, которое подставим в функциональный интеграл

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A] \int \mathcal{D}\omega \delta(F[A_\omega]) e^{iS} . \quad (1.64)$$

Выполним теперь калибровочное преобразование в подынтегральном выражении, перейдя от A_ω к A . Тогда

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \int \mathcal{D}\omega \delta(F[A]) e^{iS} , \quad (1.65)$$

так как действие S инвариантно относительно калибровочных преобразований ω , множители, стоящие после $\mathcal{D}\omega$ теперь не зависят от ω , так что $\int \mathcal{D}\omega$ представляет собой мультипликативную расходимость, которую можно устранить, переопределив \mathcal{Z} следующим образом

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \delta(F[A_\mu]) e^{iS[A_\mu]} . \quad (1.66)$$

Займемся расчетом величины $\Delta[A_\mu]$. В случае инфинитезимальных преобразований имеем

$$\begin{aligned} F^a[A_\omega] &= F^a[A] + \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} \delta A_\mu^b = F^a[A] + \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} (\delta^{bd} \partial_\mu + f^{bcd} A_\mu^c) \omega^d = \\ &= F^a[A] + \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} (D_\mu \omega)^b. \end{aligned} \quad (1.67)$$

При фиксации калибровки $F^a[A] = 0$, тогда получим

$$\Delta^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\omega^a \delta \left[\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} D_\mu^{bc} \omega^c(y) \right]. \quad (1.68)$$

Обозначим теперь аргумент δ -функции через M

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} D_\mu^{bc} \delta^4(x-y) &= M^{ac}(x, y) \delta^4(x-y) = \\ &= \langle a, x | M | c, y \rangle \sim \frac{\delta F^a[A(x)]}{\delta \omega^c(y)}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Следовательно,

$$\Delta^{-1}[A] \sim (\det M)^{-1}, \quad (1.70)$$

$$\Rightarrow \Delta[A] \sim \det M = \det \left(\frac{\delta F^a(x)}{\delta \omega^b(y)} \right) \Big|_{\omega=0}. \quad (1.71)$$

Рассмотрим следующее выражение для $F[A]$

$$F^a = \partial^\mu A_\mu^a + C^a(x), \quad (1.72)$$

где $C^a(x)$ – произвольная функция. Тогда производящий функционал в калибровке Лоренца будет иметь вид

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \delta(F[A] - C) e^{iS[A_\mu]}. \quad (1.73)$$

Так как C не зависит от векторного потенциала A_μ^a , то и функционал $\Delta[A]$ имеет ту же форму, что и в выражении (1.71), и величина \mathcal{Z} не зависит от $C^a(x)$. Тогда мы можем ввести в \mathcal{Z} любой весовой множитель

$$\exp \left[-\frac{i}{2\alpha} \int (C^a(x))^2 d^4x \right] \quad (1.74)$$

и получим выражение

$$\mathcal{Z} = N \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] \exp \left[i \int \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2[A_\mu] \right) dx \right]. \quad (1.75)$$

Заметим, что $F[A_\mu]$ может быть любым функционалом поля A_μ , хотя выше мы рассматривали только лоренцеву калибровку.

Определитель в выражении (1.71) может быть представлен в виде интеграла по грассмановым скалярным полям η и $\bar{\eta}$

$$\det M = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[i \int \bar{\eta} M \eta dx \right]. \quad (1.76)$$

Таким образом, получим

$$\mathcal{Z} = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[i \int \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b \right) dx \right]. \quad (1.77)$$

Эту формулу можно переписать следующим образом

$$\mathcal{Z} = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[i \int \mathcal{L}_{\text{эфф}} dx \right], \quad (1.78)$$

где $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ – эффективный лагранжиан вида

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG}. \quad (1.79)$$

Слагаемое \mathcal{L}_{GF} – член, фиксирующий калибровку, а \mathcal{L}_{FPG} – член, описывающий духи Фадеева-Попова. Грассмановы поля η и $\bar{\eta}$ называются духовыми полями, так как благодаря нефизической спиновой статистике они могут появляться только в замкнутых петлях в фейнмановских диаграммах, но ни в коем случае не во внешних линиях. Таким образом, мы избавились от мультипликативной бесконечности, которая появлялась при квантовании калибровочных полей и выработали общий метод квантования, который применим при квантовании как абелевых, так и неабелевых калибровочных полей.

1.5. Решеточные расчеты

Формулировка квантовой теории поля на конечной решетке [26, 37–41] позволяет численно моделировать средние значения физических величин изучае-

мой системы. Введение решетки позволяет произвести обрезание ультрафиолетовых расходимостей. На конечных решетках также происходит инфракрасное обрезание. Поскольку решеточная формулировка в теории поля вводится как разновидность регуляризации, решеточное обрезание должно быть устранено после перенормировки. Таким образом, физические результаты могут быть получены только в непрерывном пределе, когда шаг решетки стремится к нулю, а сама решетка становится бесконечной.

Сильное взаимодействие из-за явления конфинмента становится существенно непертурбативными при малых энергиях. Следовательно, методы теории возмущений применимы только на малых расстояниях. Чтобы выйти за рамки теории возмущений необходимо использовать методы численного моделирования, основанные на непертурбативной процедуре регуляризации. Одним из таких методов является дискретизация пространства-времени, т.е. введение решетки, которая обрезает все волны, длина которых меньше удвоенного шага решетки.

При расчетах на решетку накладываются периодические граничные условия, что делает все узлы пространственно-временной решетке равноправными.

1.6. Решеточная калибровочная теория

Рассмотрим формулировку калибровочной теории поля на пространственно-временной решетке, данную Вильсоном [26]. Идея его подхода основана на представлении калибровочного поля как зависящего от пути фазового множителя. Полевыми переменными являются элементы калибровочной группы, сопоставляемые ребрам решетки. Элемент группы, сопоставляемый произвольному решеточному контуру, соединяющему последовательность соседних узлов, равен произведению реберных групповых элементов. Данная формулировка замечательна тем, что сохраняет требование локальной калибровочной инвариантности.

Введение решетки позволяет произвести обрезание ультрафиолетовых расходимостей. Переход к евклидову времени (поворот Вика) позволяет изучать свойства квантово-полевых систем методами статистической физики со статистической суммой:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \mathcal{D}[A_\mu] e^{-S_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] - S_G[A_\mu]}, \quad (1.80)$$

где интегрирование производится по всем фермионным полям $\psi, \bar{\psi}$ и калибровочным полям A_μ , S_F – фермионная часть действия и S_G – калибровочное действие.

На рис. 1.1 представлена элементарная решеточная грань в плоскости (μ, ν) . Каждый узел на решетке нумеруется целым числом n . Рассмотрим калибровочную группу $SU(N)$, сопоставляя каждой паре соседних узлов решетки $(n, n + \hat{\mu})$ независимый элемент группы $SU(N)$ связанный с калибровочным полем A_μ следующим образом:

$$U_\mu(n) = P \exp \left(ig \int_n^{n+\hat{\mu}} dx_\mu A_\mu \right) \simeq \exp(igaA_\mu(n + \hat{\mu}/2)) \in SU(N), \quad (1.81)$$

где g – калибровочная константа связи, a – расстояние между двумя соседними узлами, под P понимается упорядочение интеграла вдоль ребра $(n, n + \hat{\mu})$. Ребру с противоположенным направлением следует приписать обратную матрицу $U_{-\mu}(n) = U_\mu^\dagger(n)$.

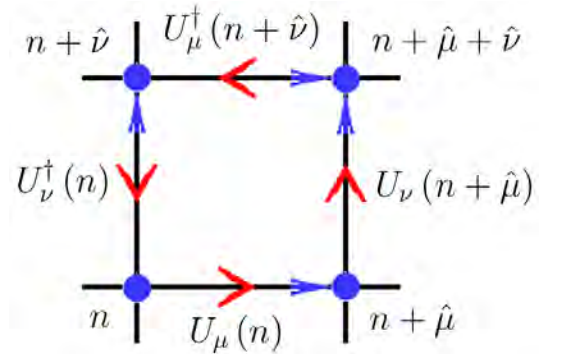


Рис. 1.1. Элементарная решеточная грань в плоскости (μ, ν) .

Глюонное решеточное действие в непрерывном пределе должно переходить в действие классической теории Янга-Миллса.

Прежде всего следует ввести аналог тензора $F_{\mu\nu}$, являющегося обобщением ротора векторного потенциала. Ему соответствуют интегралы от A_μ вдоль небольших замкнутых контуров. Нетривиальную наименьшую замкнутую петлю, которую в дальнейшем будем называть плакетной переменной $U_{\mu\nu}(n)$, определим

в виде:

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(n). \quad (1.82)$$

При таком определении калибровочного поля на решетке в Вильсоновской формулировке [26] действие запишется в виде:

$$S_G[U] = \frac{\beta}{N} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} [\hat{1} - U_{\mu\nu}(n)], \quad \lim_{a \rightarrow 0} S_G[U] = S_G[A], \quad (1.83)$$

где $\beta = 2N/g^2$ – обратная константа связи. Таким образом, любую наблюдаемую $\mathcal{O}[U]$ можно определить в виде следующего интеграла по всем возможным конфигурациям глюонного поля U :

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \mathcal{O}[U], \quad (1.84)$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]}, \quad \int \mathcal{D}[U] = \prod_n \prod_\mu \int dU_\mu(n). \quad (1.85)$$

В этих формулах интегрирование производится по всем возможным значениям калибровочных переменных. В таком подходе локальная калибровочная симметрия сохраняется точно. А именно, если сопоставить каждому узлу решетки произвольный элемент калибровочной группы $g_n \in G$, то действие останется инвариантным относительно замены:

$$U_\mu(n) \rightarrow g_n U_\mu(n) g_{n+\hat{\mu}}^\dagger. \quad (1.86)$$

Определение калибровочной теории, основанное на лоренц инвариантности, не соответствует решеточной формулировке, поскольку введение решетки нарушает пространственно-временную симметрию. Тем самым, лоренц инвариантность восстанавливается только в непрерывном пределе.

В настоящей диссертационной работе расчеты проводились с использованием тадполь улучшения действия (tadpole improvement) [25]. Данное улучшение заключается в добавлении к действию дополнительного члена, который

отвечает за петли размером 1×2 граней. Улучшенное действие выглядит следующим образом:

$$S_G^{(impr)} = \beta_{impr} \sum_{\text{грани } 1 \times 1} S_{pl} - \frac{\beta_{impr}}{20u_0^2} \sum_{\text{грани } 1 \times 2} S_{rt}, \quad (1.87)$$

где $S_{pl,rt} = \frac{1}{N} \text{Re Tr} [\hat{1} - U_{pl,rt}]$, U_{pl} , U_{rt} – произведение реберных переменных вдоль замкнутой петли с размерами 1×1 и 1×2 , соответственно. Параметр u_0 вычисляется из среднего значения плакетной переменной $u_0 = \sqrt[4]{P}$, $P = \langle \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_{pl} \rangle$.

1.7. Метод Монте Карло

Рассматриваемая калибровочная группа $SU(2)$ является несчетной группой, а значит при вычислении средних на компьютере с помощью перебора всех конфигураций необходимо затратить бесконечное время, т.к. количество элементов в группе бесконечно. Также можно случайным образом генерировать полевые конфигурации для численного расчета (1.84), но вследствие этого мы часто будем получать маловероятные состояния, которые дают очень малый вклад в среднее значение изучаемой физической величины. Решение этой проблемы можно получить, используя методы Монте Карло.

1.7.1. Основы метода

Метод Монте Карло – это общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа конфигураций стохастической системы. Эти конфигурации формируются таким образом, что вероятность принятия данной конфигурации была пропорциональна ее весу среди всего набора. Реализуемые методом Монте Карло случайные блуждания чаще всего проходят через состояния системы, наиболее выгодные с энтропийно-энергетической точки зрения. Цель данного подхода заключается в том, чтобы получить небольшое число конфигураций, типичных для равновесного состояния в статистической

модели, и после этого проводить усреднение некоторой величины $A(x)$ на этих конфигурациях, которые дают основной вклад в интеграл (1.84).

Рассмотрим простой пример. Пусть нам необходимо посчитать среднее значение некоторой величины

$$\langle A \rangle = \int \rho(x) A(x) dx, \quad (1.88)$$

где $A(x)$ - усредняемая величина, $\rho(x)$ - функция распределения величины $A(x)$. В качестве $\rho(x)$ возьмем гауссово распределение (рис. 1.2). Для численного нахождения $\langle A \rangle$ сначала раскидываем на ось ОХ точки x_i с вероятностью $dp(x) \sim \rho(x) dx$, а потом считаем среднее значение по формуле:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_i A(x_i), \quad (1.89)$$

где N - количество случайных точек на оси ОХ, $i = 1, \dots, N$.

Наиболее часто используемыми алгоритмами, относящимися к методу Монте Карло, являются алгоритм Метрополиса и алгоритм тепловой ванны. В данной работе использовался алгоритм тепловой ванны. Он выбран в связи с тем, что мы работаем с непрерывной группой $SU(2)$, знаем для нее групповой интеграл и можем параметризовать ее элементы координатами точек поверхности четырехмерной сферой (S_3).

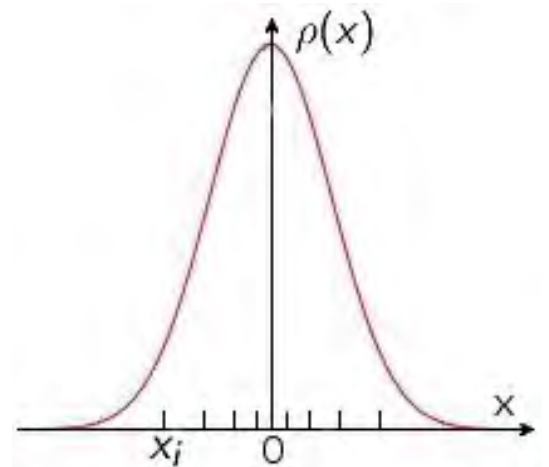


Рис. 1.2. Гауссово распределение вероятности $\rho(x)$.

Глава 2

Операторы, определенные на одномерном и двумерном многообразии

2.1. Петля Вильсона и петля Полякова

Самыми распространенными примерами операторов, определенных на одномерном многообразии, является петля Вильсона и петля Полякова. Обе наблюдаемые являются параметрами порядка для решеточной глюодинамики. Петля Вильсона имеет следующий вид:

$$W[U] = \text{Tr} \left[\prod_{(n,\mu) \in \mathcal{C}} U_\mu(n) \right], \quad (2.1)$$

где произведение берется вдоль замкнутого контура \mathcal{C} . Если петля представляет собой прямоугольник $T \times R$, где T – размер петли во временном направлении, R – в пространственном, тогда в пределе больших T в фазе конфайнмента петля Вильсона ведет себя следующим образом:

$$\langle W_{T \times R} \rangle \sim e^{-\sigma RT}, \quad (2.2)$$

т.е. среднее значение экспоненциально убывает с ростом площади петли с коэффициентом σ (коэффициент линейного роста потенциала, связанного с парой кварк-антикварковых источников, находящихся на расстоянии R друг от друга). В фазе деконфайнмента петля Вильсона экспоненциально спадает значительно медленнее с ростом размеров петли и в показателе экспоненты присутствует периметр петли.

Рассмотрим решетку с размером $N_t \times N_s^3$ с циклическими граничными условиями, попробуем построить петлю Вильсона с размером $N_t \times R$. В таком случае петля распадается на две несвязные друг с другом линии, замкнутые

граничными условиями и расположенными на расстоянии R друг от друга. Для такого вида линий можно ввести калибровочно инвариантную наблюдаемую:

$$P(n) = \text{Tr} \left[\prod_{j=0}^{j < N_t} U_0(n + \hat{e}_0 \cdot j) \right], \quad (2.3)$$

где \hat{e}_0 – элементарный вектор вдоль временного направления. Данная наблюдаемая $P(n)$ называется петлей Полякова. Рассчитывая коррелятор двух петель Полякова можно изучать статический кварковый потенциал $V(r)$ следующим образом:

$$\langle P(n) P^\dagger(m) \rangle \sim e^{-N_t a V(r)} (1 + O(e^{-N_t a \Delta E})), \quad (2.4)$$

где $r = a|n - m|$.

2.2. Поверхностные операторы

Соответственно, если линейные операторы определяются на одномерном многообразии, поверхностные операторы определяются на двумерном многообразии. В общем виде поверхностный оператор записывается

$$\mathcal{W}^{(\text{общ.})} = \exp \left(i\kappa \int_{\text{пов.}} d\sigma_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}_{\mu\nu}(x) \right), \quad (2.5)$$

где $d\sigma_{\mu\nu}(x)$ – элемент поверхности в точке x , $\mathcal{O}_{\mu\nu}(x)$ – наблюдаемая, заданная на поверхности в точке x , κ – размерный коэффициент.

Рассмотрим замкнутую поверхность \mathcal{S} , составленную из плакетов $U_{\mu\nu}$. Плакетная переменная $U_{\mu\nu}$ связана с тензором напряженности поля Янга-Миллса соотношением:

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{iga^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^4)}. \quad (2.6)$$

А это означает, что при рассмотрении пространственных поверхностей можно изучать хромомагнитные свойства вакуума, а рассматривая поверхности, затрагивающие временную ось, можно изучать свойства хромоэлектрического поля.

Перед изучением хромомагнитных и хромоэлектрических свойств, требуется сделать проекцию $SU(2) \mapsto \theta \in [0, \pi]$.

Рассмотрим абелеву калибровочную группу $U(1)$, которая описывает калибровочное поле электродинамики, в односвязном пространстве-времени. В этом случае поток магнитного поля через замкнутую поверхность тождественно равен нулю, что свидетельствует об отсутствии магнитных зарядов:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv 0. \quad (2.7)$$

В решеточном формализме легче работать с фазовыми множителями вида $e^{i\varphi}$, таким образом тождество (2.7) можно переписать в виде

$$e^{i\kappa \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}} \equiv 1. \quad (2.8)$$

Если пространство имеет нетривиальную топологию или рассматриваемая калибровочная группа является неабелевой, тогда тождество (2.8) не обязательно должно выполняться. Тогда для общего случая решеточной КХД мы будем иметь:

$$e^{i\kappa \sum_k \vec{B}_k \cdot \Delta \vec{S}_k} \neq 1, \quad (2.9)$$

где \vec{B}_k – вектор магнитной индукции в центре решеточного плакета k , $\Delta \vec{S}_k$ – площадь плакета (с нормалью в центре плакета). Суммирование выполняется по замкнутой поверхности, составленной из решеточных плакетов.

Определим первый поверхностный оператор на решетке следующим образом:

$$\mathcal{W}^{(1)} = \left\langle \text{Re} \exp \left(i \sum_{P \in \mathcal{S}} \theta_P \right) \right\rangle, \quad (2.10)$$

где плакетный угол θ_P связан с плакетной переменной U_P ($P \equiv (\mu, \nu, n)$) после диагонализации, следующим образом:

$$U_P = \begin{pmatrix} e^{i\theta_P} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_P} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Оператор (2.10) чувствителен к магнитному полю. Фаза θ_P связана с потоком вектора магнитной индукции через поверхность:

$$\kappa \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \kappa \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \theta_P, \quad (2.12)$$

где интегрирование $d\vec{l}$ выполняется по границе поверхности S . Перепишем магнитный поток в виде:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S F_{ik} d\sigma_{ik}, \quad (2.13)$$

где F_{ik} – тензор калибровочного поля, $d\sigma_{ik}$ – элемент поверхности, $i, k = 1, 2, 3$ – пространственные измерения. Взяв действительную часть экспоненты от правой части уравнения (2.13), получим определение поверхностного оператора (2.10).

В данном случае плакетный угол выделяется из элемента группы $SU(2)$ калибровочно инвариантным способом:

$$\theta_P = \arccos \left(\frac{1}{2} \text{Tr } U_P \right), \quad (2.14)$$

область определения $\theta_P \in [0, \pi]$. Чтобы расширить область определения плакетного угла до элемента группы $U(1)$ требуется более подробно рассмотреть свойства группы $SU(2)$, которые описаны в следующем разделе.

Рассматривая абелеву калибровочную группу или делая проекцию $SU(2) \mapsto U(1)$ на реберной переменной $U_\mu(n)$ поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ тождественно будет равняться единице. В данном случае $\theta_P = \theta_{\mu\nu}(n) = \theta_\mu(n) + \theta_\nu(n + \hat{\mu}) - \theta_\mu(n + \hat{\nu}) - \theta_\nu(n)$ и $\sum_{\text{замк. пов.}} \theta_P \equiv 0$. Что и следовало ожидать, т.к. в абелевой теории нет магнитных зарядов при рассмотрении односвязного пространства. Таким образом, поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ является чувствительным к свойствам неабелевости изучаемой теории и в пределе больших поверхностей должен равняться нулю, если теория неабелева.

В настоящей диссертации также проводится исследование поведения следующего поверхностного оператора, определенного без экспоненцирования,

$$\mathcal{W}^{(2)} = \left\langle \left(\sum_{P \in \mathcal{S}} \theta_P \right)^2 \right\rangle. \quad (2.15)$$

Данная наблюдаемая связана с флуктуациями хромагнитных диполей на поверхности.

2.3. Некоторые свойства матричного представления элементов группы $SU(2)$

Элементами группы $SU(2)$ являются унитарные комплексные матрицы 2×2 с единичным определителем. При групповых преобразованиях двумерного вектора с комплексными коэффициентами $z' = Uz$ норма вектора z остается неизменной если $U \in SU(2)$. Для параметризации этих матриц нужен набор из 3 линейно независимых эрмитовых бесследовых матриц $\sigma_i/2$, где σ_i – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

С их помощью любая матрица $U \in SU(2)$ может быть представлена в виде:

$$U = \exp\left(i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}\right), \quad (2.17)$$

где θ_i – вещественные параметры, $\sigma_i/2$ - генераторы с коммутационным соотношением $[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i\varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$. Разложим матричную экспоненту (2.17) в ряд Тейлора и свернем четные и нечетные степени ряда по $|\theta|$ в косинус и синус соответственно:

$$\exp\left(i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}\right) = \hat{1} \cos\left(\frac{|\theta|}{2}\right) + i \frac{\theta_i}{|\theta|} \sigma_i \sin\left(\frac{|\theta|}{2}\right), \quad (2.18)$$

где $|\theta| = \sqrt{\theta_i \theta_i}$. Данная форма записи $SU(2)$ элемента имеет некоторые особенности. Во-первых, существует периодичность по параметрам θ_i . Значения синуса и косинуса не изменятся при следующем преобразовании:

$$|\theta'| = |\theta| + 4\pi n, \quad (2.19)$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда из $\theta_i/|\theta| = \theta'_i/|\theta'|$ следует, что один и тот же $SU(2)$ элемент можно задать разными наборами параметров, которые связаны друг с другом

следующим образом:

$$\theta'_i = \frac{\theta_i}{|\theta|} (|\theta| + 4\pi n) . \quad (2.20)$$

Вторая особенность проявляется, когда $|\theta|/2 = \pi n$, т.е. $|\theta| = 2\pi n$. В этих точках $\cos(|\theta|/2) = (-1)^n$, а $\sin(|\theta|/2) = 0$. Это означает, что сфера в пространстве параметров с радиусом $4\pi n$ отображается на элемент $\hat{1}$ из пространства $SU(2)$, а сфера с радиусом $2\pi(1 + 2n)$ отображается на элемент $-\hat{1}$, где

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.21)$$

Правая часть равенства (2.18) состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое – это произведение константы на четную функцию, второе слагаемое – это произведение двух нечетных функций. Таким образом во втором слагаемом можно написать следующее:

$$i \frac{\theta_i}{|\theta|} \sigma_i \sin \left(\frac{|\theta|}{2} \right) = i \frac{-\theta_i}{|\theta|} \sigma_i \left(-\sin \left(\frac{|\theta|}{2} \right) \right) = i \frac{-\theta_i}{|\theta|} \sigma_i \sin \left(\frac{|\theta| + 2\pi}{2} \right) . \quad (2.22)$$

Третья особенность заключается в том, что два набора параметров θ_i и $-\theta_i \frac{|\theta|+2\pi}{|\theta|}$ задают один и тот же элемент из группы $SU(2)$.

Любой элемент группы $SU(2)$ однозначно представим в виде:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ -U_{12}^* & U_{11}^* \end{pmatrix} , \quad (2.23)$$

где U_{11}, U_{12} - комплексные числа, удовлетворяющие соотношению

$$|U_{11}|^2 + |U_{12}|^2 = 1 . \quad (2.24)$$

Давайте найдем область параметров θ_i , однозначно задающие элемент группы $U \in SU(2)$. Для этого перейдем к сферическим координатам в пространстве параметров:

$$\left[\begin{array}{l} \theta_1 = |\theta| \sin \chi \cos \varphi , \\ \theta_2 = |\theta| \sin \chi \sin \varphi , \\ \theta_3 = |\theta| \cos \chi , \end{array} \right. \quad (2.25)$$

где $\chi \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. В этом случае для однозначного отображения пространства параметров на элементы группы $SU(2)$, учитывая выше изложенные особенности, $|\theta|$ должен принадлежать замкнутому интервалу $[0, 2\pi]$.

В данной работе при исследовании поведения поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ делалась проекция $SU(2) \rightarrow U(1)/Z_2$, таким образом, что $\theta_P \in U(1)/Z_2$ определяется как $\theta_P = |\theta|/2$ и имеет область значений $[0, \pi]$. Чтобы расширить область значений фазы θ_P до полуоткрытого интервала $[0, 2\pi)$ нужно выбрать половину сферы в пространстве сферических координат (2.25), например $\chi \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. В этом случае $|\theta| \in [0, 4\pi)$ и $\theta_P \in [0, 2\pi)$. Но выбирая область значения фазы θ_P равную $[0, 2\pi)$ фаза становится не калибровочно инвариантной и она начинает зависеть от начальной точки обхода ребер элементарной грани при вычисления плакетной переменной.

2.4. Поверхностные операторы на решетке

Для расчета поверхностных операторов на решетке требуется выбрать замкнутую поверхность, составленную из элементарных решеточных граней. При вычислении использовались пространственные и временные поверхности. Пространственные поверхности строятся в пространстве, временные – расположены во временном направлении и во двух из трех пространственных. На каждом плакете, принадлежавший изучаемой поверхности, делается проекция плакетной переменной, после чего все фазы на поверхности суммируются. Далее, поверхность передвигается в другую точку на решетке и оператор считается заново. Таким образом в каждой точке на решетке мы получаем величину, которую потом усредняем по объему решетки и вслед за этим происходит усреднение по всем решеточным конфигурациям.

Для исследования величины (2.10) использовались всевозможные параллелепипеды с размерами по одной из граней от $1a$ до $5a$ (a – длина ребра), что соответствует площади замкнутой поверхности от 6 до 150 плакетов. При исследо-

вании величины (2.15) использовались кубические поверхности с размерами от 1^3 до 20^3 . При рассмотрении больших поверхностей учитывался размер решетки $N_t \times N_s^3$, который ограничивал размер максимального кубика $n_{max} < N_s/2 - 1$ (n_{max} – максимальный размер ребра кубика, использовавшийся в расчетах).

Глава 3

Исследование поверхностных операторов

Третья глава диссертации посвящена исследованию поверхностных операторов в рамках $SU(2)$ -глюодинимики. Исследования были проведены при нулевой и конечной температуре при разных значениях обратной константы связи β на пространственных и временных замкнутых поверхностях. В главе также рассматриваются свойства максимально абелевой калибровки и приводится расчет величины

$$\mathcal{W}^{(3)} = \langle \Phi^2 \rangle \quad (3.1)$$

в данной калибровке, где Φ – полный поток хромомагнитного поля через замкнутую поверхность на решетке.

3.1. Исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$

Поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ определяется выражением (2.10). Данный поверхностный оператор исследовался на пространственных поверхностях, представляющие собой поверхности прямоугольных параллелепипедов с размерами $l_x \times l_y \times l_z$. Так же расчеты проводились на поверхностях, затрагивающих временное направление. В этом случае выбирались два пространственных направления, и в них строилось основание прямоугольного параллелепипеда с размерами $l_1 \times l_2$. Размер параллелепипеда во временном направлении всегда равнялся размеру решетки N_t . Таким образом, вследствие циклических граничных условий во временном направлении, две чисто пространственные грани такого параллелепипеда отождествляются и не участвуют в расчетах.

Результаты численных расчетов для двух типов поверхностей представлены на левом графике рисунка 3.1. На графике видно, что наблюдаемая не различает тип поверхности и имеет экспоненциальный характер зависимости. На

поверхностях с величиной площади поверхности больше 80 элементарных граней наблюдаемая обращается в нуль. На правом графике рисунка 3.1 представлен результат при одном значении $\beta = 3.4177$, но для разных типов проекций. Проекция 1 соответствует области значения плaketного угла $[0, \pi]$, проекция 2 – $[-\pi, \pi]$. Из правого графика видно, что наблюдаемая падает намного быстрее если для определения плaketного угла использовать вторую проекцию.

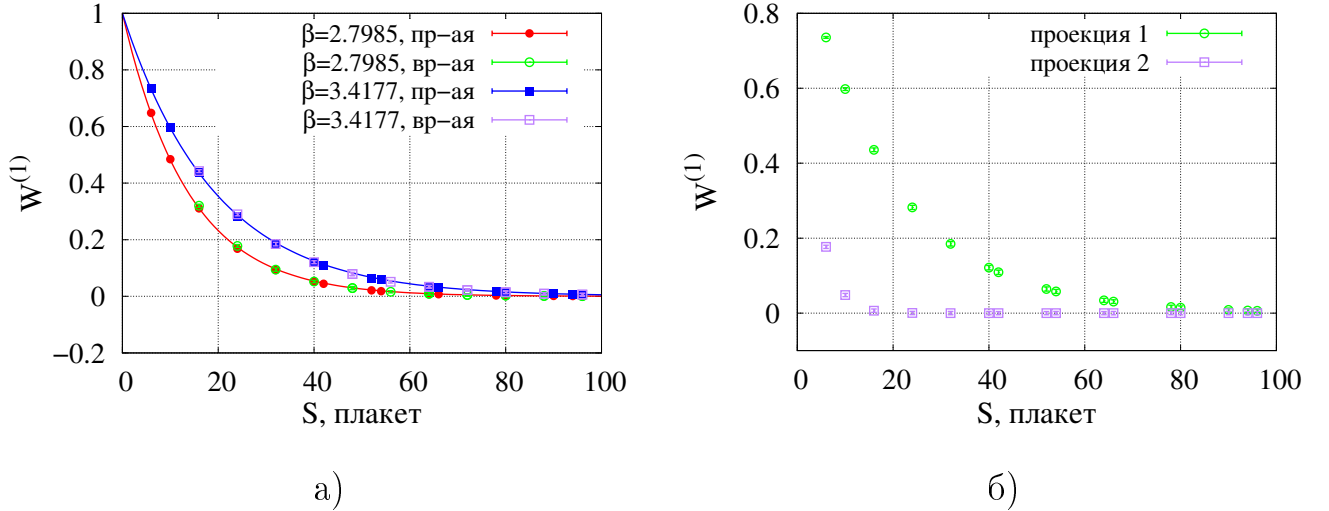


Рис. 3.1. Поведение поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ при разных значениях β при конечной температуре ($T < T_c$ при $\beta = 2.7985$; $T > T_c$ при $\beta = 3.4177$) на пространственных (пр-ая) и временных (вр-ая) поверхностях представлено на рис. а). На рис. б) представлена зависимость поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ ($\beta = 3.4177$), посчитанная при разных типах проекций: «проекция 1» – $\theta_P \in [0, \pi]$, «проекция 2» – $\theta_P \in [-\pi, \pi]$. Расчеты проводились на решетке 4×40^3 .

Согласно выражению (2.10), поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ определяется следующим образом

$$\mathcal{W}^{(1)} = \left\langle \operatorname{Re} \exp \left(i \sum_{P \in \mathcal{S}} \theta_P \right) \right\rangle, \quad (3.2)$$

причем, плaketный угол θ_P на противоположенных гранях параллелепипеда в сумму входит с разными знаками, это соответствует тому, что нормали к противоположенным граням имеют обратное направление. Таким образом, вы-

ражение (3.2) можно записать в виде

$$\mathcal{W}^{(1)} = \text{Re} \exp \left(\imath \sum_{i=1}^{N/2} \theta_i - \imath \sum_{i=N/2+1}^N \theta_i \right), \quad (3.3)$$

где усреднение по конфигурациям опущено, N – количество плакетов на замкнутой поверхности, θ_i – плакетный угол на i -ом плакете. Выполним преобразования выражения (3.3)

$$\begin{aligned} \exp \left(\imath \sum_{i=1}^{N/2} \theta_i - \imath \sum_{i=N/2+1}^N \theta_i \right) &= \left[\prod_{i=1}^{N/2} e^{\imath \theta_i} \right] \left[\prod_{i=N/2+1}^N e^{-\imath \theta_i} \right] = \\ &= \left[\prod_{i=1}^{N/2} (\cos \theta_i + \imath \sin \theta_i) \right] \left[\prod_{i=N/2+1}^N (\cos \theta_i - \imath \sin \theta_i) \right] = \\ &= \left[\prod_{i=1}^N \cos \theta_i \right] \left[\prod_{i=1}^{N/2} (1 + \imath \text{tg} \theta_i) (1 - \imath \text{tg} \theta_{i+N/2}) \right] = \\ &= \left[\prod_{i=1}^N \cos \theta_i \right] \left[\prod_{i=1}^{N/2} (1 + \text{tg} \theta_i \text{tg} \theta_{i+N/2} + \imath (\text{tg} \theta_i - \text{tg} \theta_{i+N/2})) \right]. \quad (3.4) \end{aligned}$$

При раскрытии скобок в (3.4) слагаемые, в которые $\text{tg} \theta_i$ и $\text{tg} \theta_{i+N/2}$ будут входить не симметричным образом при их перестановке, дадут ноль после выполнения операции усреднения. Таким образом, можно написать следующее

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(1)} &= \left[\prod_{i=1}^N \cos \theta_i \right] \left[\prod_{i=1}^{N/2} (1 + \text{tg} \theta_i \text{tg} \theta_{i+N/2}) \right] = \\ &= \prod_{i=1}^{N/2} (\cos \theta_i \cos \theta_{i+N/2} + \sin \theta_i \sin \theta_{i+N/2}) = \\ &= \prod_{i=1}^{N/2} \cos (\theta_i - \theta_{i+N/2}), \quad \Rightarrow \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{W}^{(1)} = \left\langle \text{Re} \exp \left(\imath \sum_{P \in \mathcal{S}} \theta_P \right) \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{N/2} \cos (\theta_i - \theta_{i+N/2}) \right\rangle. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) была проверена численно для одного значения $\beta = 3.2480$ на решетке 4×40^3 . Результаты представлены на рис. 3.2.

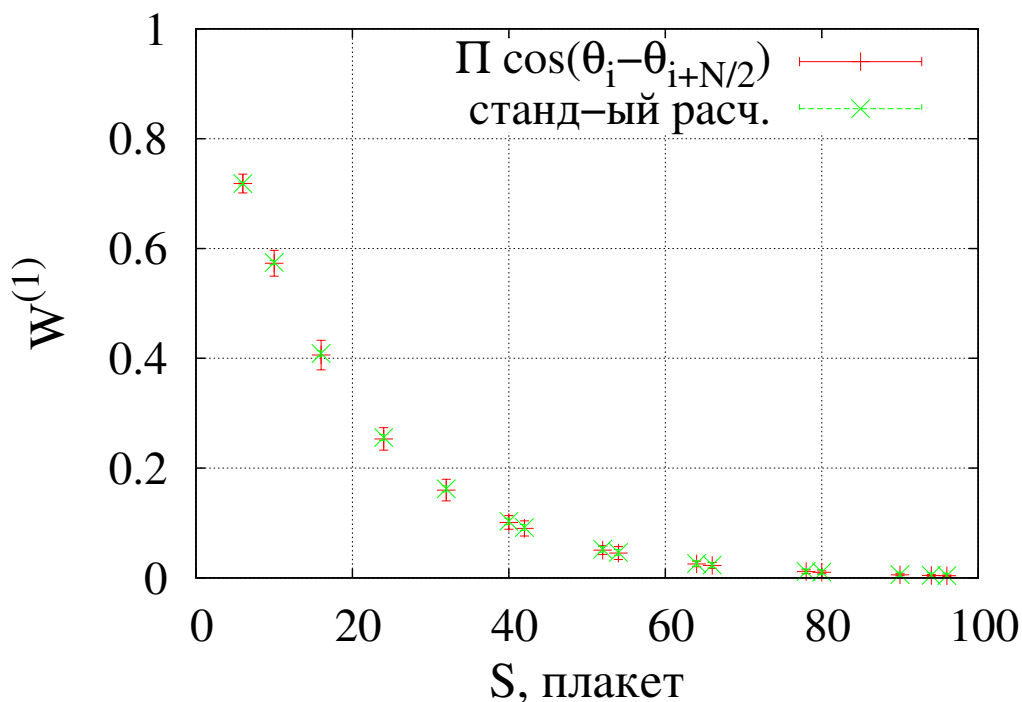


Рис. 3.2. Проверка формулы (3.6). Результаты расчетов по формуле (3.2) (станд-ый расч.) получены на 1000 конфигурациях. Расчеты по формуле (3.5) проведены на 10 конфигурациях калибровочного поля.

Интересным результатом является тот факт, что связность поверхности не влияет на поведение поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$. Данное свойство было проверено для достаточно симметричных параллелепипедов ($a_1/a_2 \in [0.5, 2]$, где a_1, a_2 – любые два ребра параллелепипеда) для одного значения $\beta = 3.2480$ на решетке 4×40^3 . Одна наблюдаемая $\mathcal{W}^{(1)}$ рассчитывалась на 6 гранях параллелепипеда (замкнутая пов.), другая только на 2-х противоположенных (несвязная пов.). Результаты представлены на рис. 3.3.

Связность поверхности не влияет на поведение поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ (существенную роль играет противоположность граней и равная их площадь). Таким образом, рассматривая несвязную поверхность, состоящую из 2-х противоположенных граней параллелепипеда, можно фиксировать ее площадь и изменять расстояние между противоположенными гранями, что приведет к изменению объема параллелепипеда. Данным способом можно косвенно исследовать объемную зависимость в поведении поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$. Для

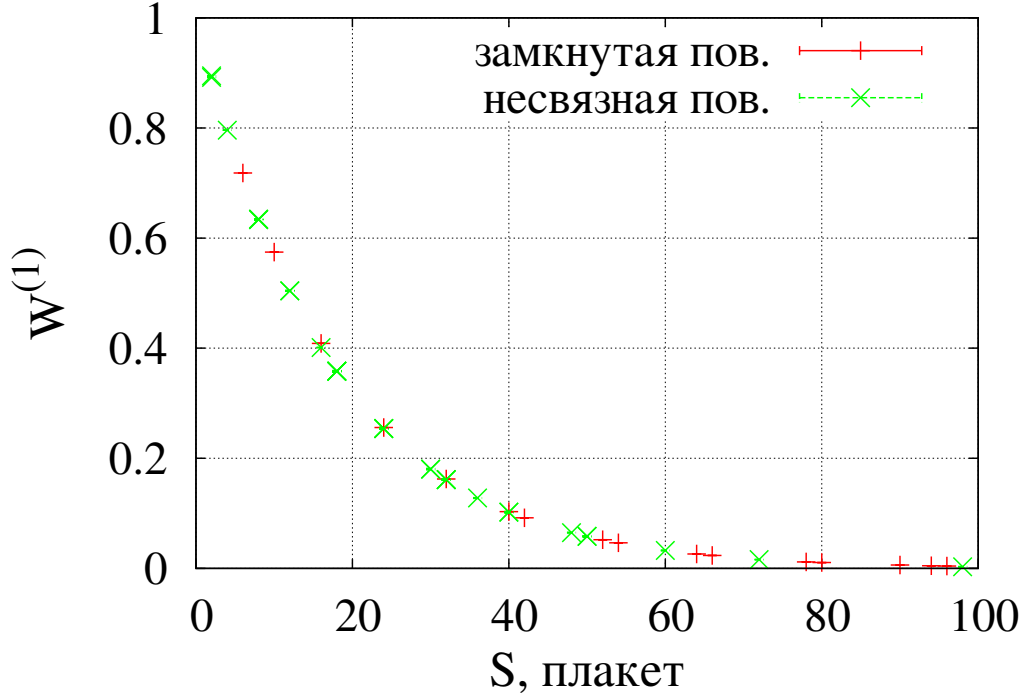


Рис. 3.3. Сравнение результатов расчетов поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ на замкнутой и несвязной поверхностях.

одного значения $\beta = 3.2480$ на решетке 4×40^3 была посчитана зависимость $\mathcal{W}^{(1)}$ от дистанции между поверхностями. Было выбрано 4 разные поверхности, результаты представлены на рис. 3.4.

Можно сделать вывод, что при дистанции между поверхностями $> 2a$ (для $\beta = 3.2480$) объемная зависимость сильно подавлена, и присутствует только зависимость от площади поверхности.

Выражение (3.5) можно привести к следующему виду

$$\prod_{i=1}^{N/2} \cos(\theta_i - \theta_{i+N/2}) = \prod_{i=1}^{N/2} (\cos \theta_i \cos \theta_{i+N/2} + \sin \theta_i \sin \theta_{i+N/2}) . \quad (3.7)$$

Исследуем поведение выражения (3.7) на незамкнутой поверхности с площадью в два плакета находящихся друг от друга на некоторой дистанции l в 3-ем пространственном направлении

$$\mathcal{W}^{(1)}(l) = \langle \cos \theta_{12}(x) \cos \theta_{12}(x + \hat{3}l) + \sin \theta_{12}(x) \sin \theta_{12}(x + \hat{3}l) \rangle , \quad (3.8)$$

где $\theta_{12}(x)$ – значение плакетного угла на плакете в пространственных направ-

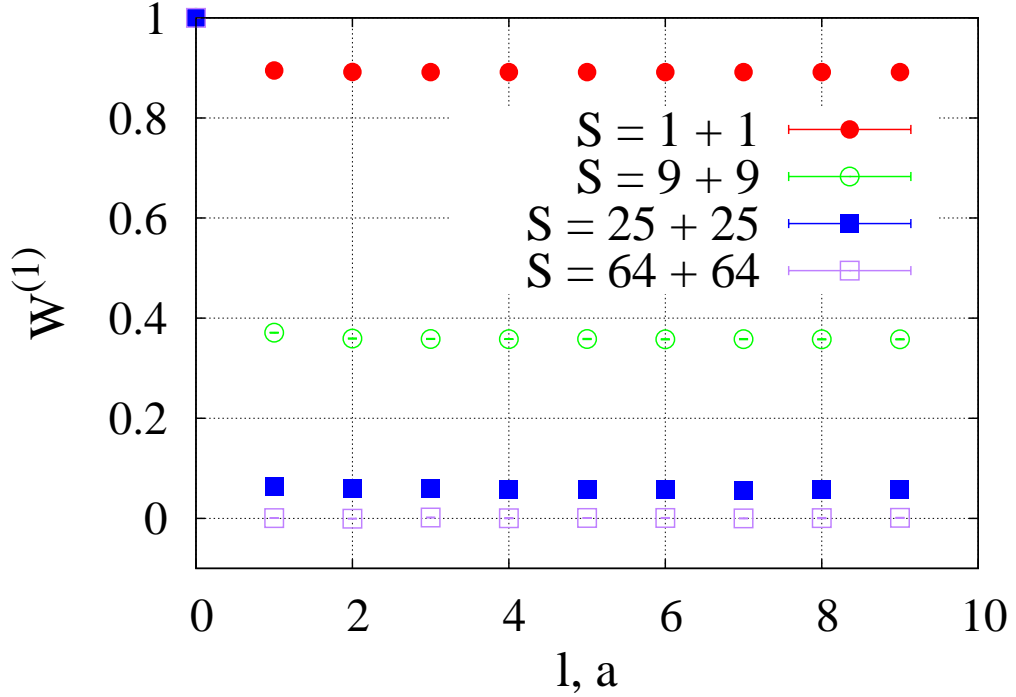


Рис. 3.4. Поведение поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ на несвязной поверхности, состоящей из 2-х противоположенных граней параллелепипеда, в зависимости от расстояния между этими двумя гранями ($a \equiv a$ – длина элементарного ребра решетки).

лениях 12 в точке x , $\hat{\mathbf{z}}$ – единичный вектор в 3-ем направлении. Результат приведен на рис. 3.5.

Из рис. 3.5 видно, что при $l > 2a$ наблюдаемые выходят на постоянные значения. Таким образом, можно получить, что величина (3.8) $\mathcal{W}^{(1)}(l) \underset{l > 2a}{=} 0.8916 \pm 0.0004$.

Предположим, что операцию усреднения можно пронести через операцию произведения в формуле (3.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(1)} &= \left\langle \prod_{i=1}^{N/2} \cos(\theta_i - \theta_{i+N/2}) \right\rangle \approx \prod_{i=1}^{N/2} \langle \cos(\theta_i - \theta_{i+N/2}) \rangle \approx \\ &\approx \left\langle \cos(\theta(x) - \theta(x + \hat{l})) \right\rangle^{N/2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где \hat{l} – характеристический размер исследуемой поверхности. Зная величину (3.8) для поверхности из 2-х плакетов можно оценить поведение поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ на любой поверхности с площадью S (в решеточных единицах

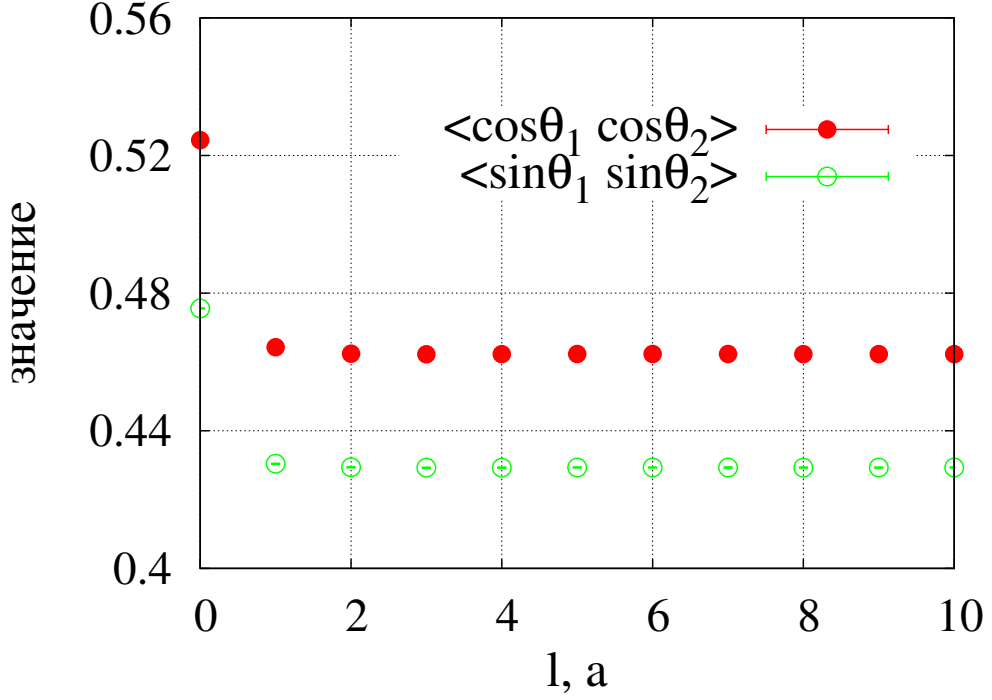


Рис. 3.5. Поведение величины $\langle \cos \theta_{12}(x) \cos \theta_{12}(x + \hat{3}l) \rangle$ и $\langle \sin \theta_{12}(x) \sin \theta_{12}(x + \hat{3}l) \rangle$ в зависимости от дистанции l . Расчет проводился на решетке 4×40^3 при $\beta = 3.2480$, $a \equiv a$ – длина элементарного ребра решетки.

$S \equiv N$). В случае для $\beta = 3.2480$

$$\mathcal{W}^{(1)}(N) = 0.8916^{N/2} = e^{(\ln 0.8916)N/2} = e^{-0.0574 N}. \quad (3.10)$$

На рис. 3.6 представлено сравнение расчета $\mathcal{W}^{(1)}$ и выражения (3.10). Таким образом, выражение (3.9) с хорошей точностью описывает поведение $\mathcal{W}^{(1)}$ от площади поверхности.

Для более подробного изучения первого поверхностного оператора, зависимость $\mathcal{W}^{(1)}(\beta, S, V)$ была профитирована следующей функцией

$$\mathcal{W}^{(1)}(\beta, S, V) = e^{-\sigma(\beta)S - \gamma(\beta)V}, \quad (3.11)$$

где S и V – площадь и объем замкнутой поверхности соответственно, σ – поверхностный коэффициент, γ – объемный коэффициент. Оказалось, что при использовании определения поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$, данным формулой (2.10), поверхностный коэффициент получается нечувствительным к температуре, а

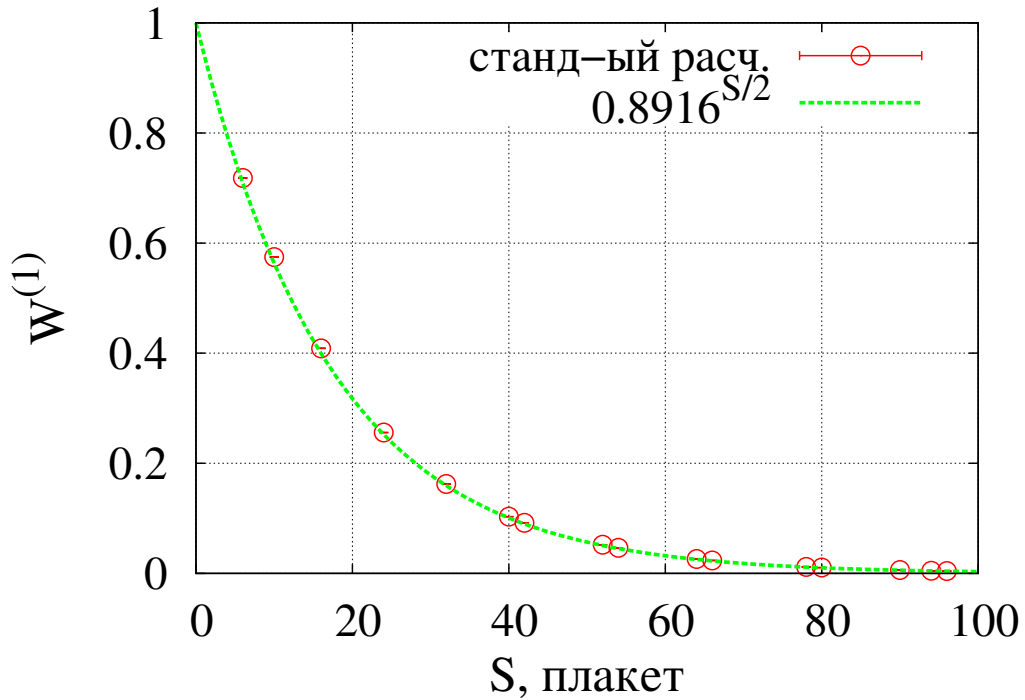


Рис. 3.6. Поведение величины $\mathcal{W}^{(1)}$ в зависимости от площади поверхности (станд-ый расч.) и график функции выражения (3.10). Расчет проводился на решетке 4×40^3 при $\beta = 3.2480$.

зависит только от масштаба на решетке $a = f(\beta)$. Данное поведение свидетельствует об ультрафиолетовом характере изучаемой величины (см. рис. 3.7).

Зависимость от объема проявляется (можно восстановить коэффициент γ) при рассмотрении двух типов поверхностей: симметричной и несимметричной, на которых площадь поверхности одинаковая, а объем разный, например $1^2 \times 13$ ($S = 54$, $V = 13$) и 3^3 ($S = 54$, $V = 27$). Но при рассмотрении некоторого количества пар таких поверхностей, коэффициент γ является не постоянным, а это означает, что объемная зависимость является более сложной, чем зависимость от площади и зависит от геометрии изучаемой поверхности. Более того, согласно рис. 3.4 объемная зависимость проявляется лишь при рассмотрении достаточно маленьких расстояний между гранями параллелепипеда, что приводит к маленьким замкнутым поверхностям. Асимптотически $\mathcal{W}^{(1)}$ зависит только от площади.

Конечную часть поверхностного коэффициента можно найти с помощью

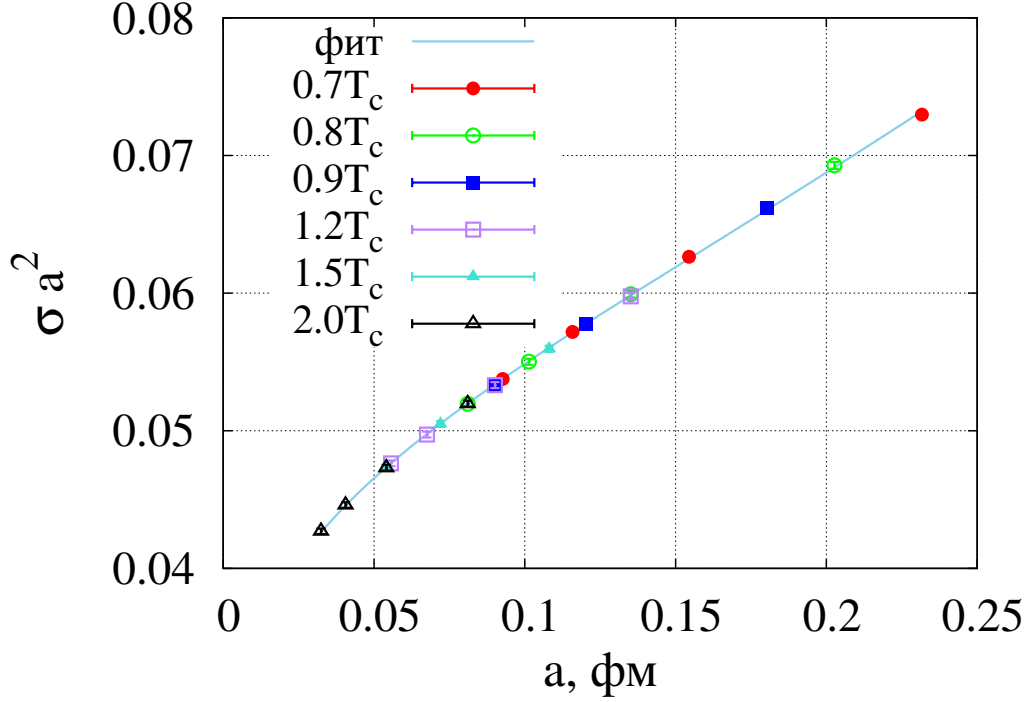


Рис. 3.7. Поведение поверхностного коэффициента σ в решеточных единицах от масштаба на решетке ($a \equiv a$) при разных значениях температуры.

фита функцией

$$\sigma a^2 = c_0 + c_1/\beta + c_2^2 a^2, \quad (3.12)$$

где c_0 , c_1 – константы, $c_2^2 \equiv \sigma_{ph}$ – физическое значение поверхностного коэффициента. Численное значение $\sqrt{\sigma_{ph}} = 78(1)$ МэВ. Физическим смыслом коэффициента σ является поверхностная плотность хромомагнитных диполей на поверхности [19].

Для проверки «универсальности» физического значения поверхностного коэффициента σ_{ph} было проведено вычисление данной величины в глюодинамике с обычным вильсоновским действием (1.83) [26]. В данной теории было получено следующее значение $\sqrt{\sigma_{ph}} = 74(3)$ МэВ (см. рис. 3.8). Сравнение с улучшенным действием представлено в таблице 3.1.

Выражение (3.12) является функцией для выделения конечной физической части. В случае поверхностного оператора интуитивно понятно, что в функции (3.12) может быть член $\sim a^2$. Попробуем найти другую функцию, способную описать результаты расчетов $\sigma(a)$. Для этого найдем связь поверхност-

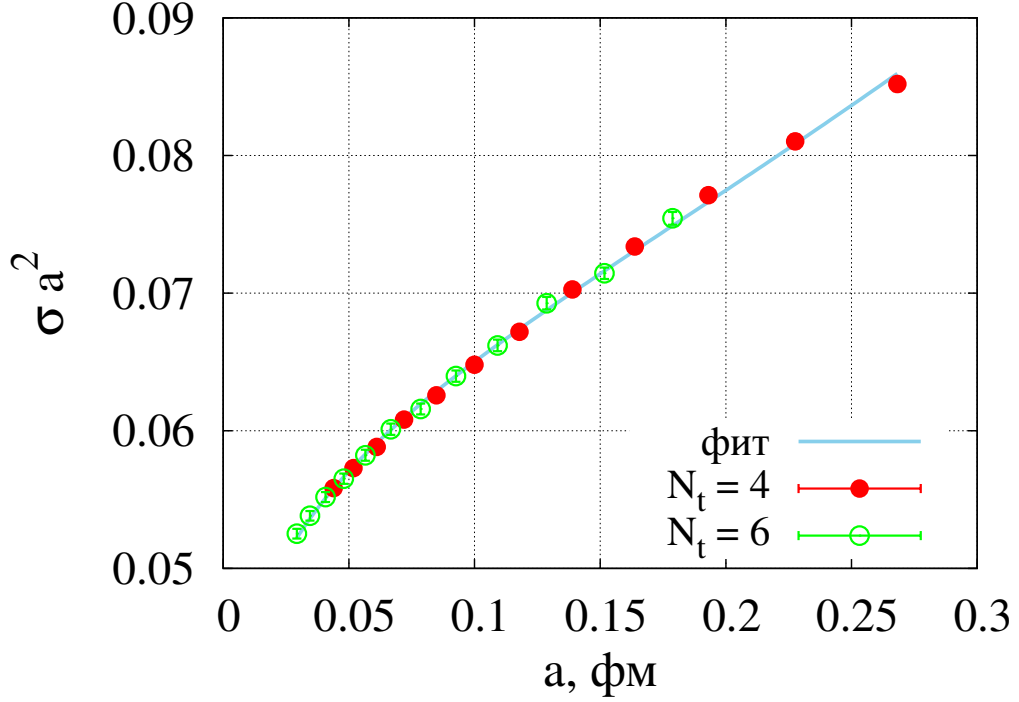


Рис. 3.8. Поведение поверхностного коэффициента σ в решеточных единицах от масштаба на решетке ($a \equiv a$). Расчет проводился в теории с обычным вильсоновским действием на решетках 4×40^3 и 6×40^3 .

Таблица 3.1. Сравнение величины $\sqrt{\sigma_{ph}}$ посчитанной в теории с вильсоновским и улучшенным действием для SU(2)-глюодинамики.

Величина	Вильсоновское действие	Улучшенное действие
$\sqrt{\sigma_{ph}}$	74(3) МэВ	78(1) МэВ

ного коэффициента σ с величиной, пропорциональной плакетному действию, $P \equiv 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_P = 1 - \cos \theta_P$. Заметим, что выражение (3.8) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(1)}(l) &= \langle \cos \theta_{12}(x) \cos \theta_{12}(x + \hat{3}l) + \sin \theta_{12}(x) \sin \theta_{12}(x + \hat{3}l) \rangle = \\ &= \left\langle (1 - P_1)(1 - P_2) + \sqrt{1 - (1 - P_1)^2} \sqrt{1 - (1 - P_2)^2} \right\rangle, \quad (3.13) \end{aligned}$$

где $P_1(x) = 1 - \cos \theta_{12}(x) \equiv 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_{12}(x)$, $P_2(x) \equiv P_1(x + \hat{3}l) = 1 - \cos \theta_{12}(x + \hat{3}l)$ – величины плакетного действия в точках. Разложим $\sin \theta_P = \sqrt{1 - (1 - P)^2}$ в

ряд по P в окрестности нуля (см. рис. 3.9)

$$\sqrt{1 - (1 - P)^2} = \sqrt{2} \left(P^{1/2} - \frac{P^{3/2}}{4} - \frac{P^{5/2}}{32} - \frac{P^{7/2}}{128} - \frac{5P^{9/2}}{2048} - \dots \right). \quad (3.14)$$

Таким образом, величину (3.13) можно переписать в виде

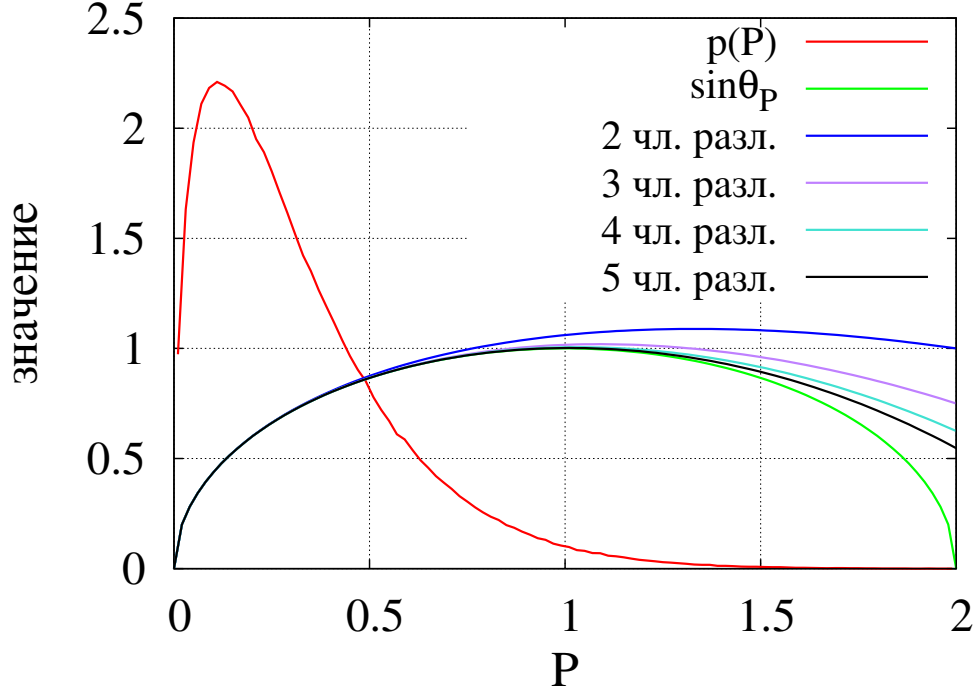


Рис. 3.9. Сравнение $\sin \theta_P$ с его разложением (удерживая 2...5 членов разложения) в зависимости от значения плакетной переменной P , $p(P)$ – распределение вероятности обнаружить плакетную переменную со значением P на решеточной конфигурации при $\beta = 3.2480$, размер решетки 4×40^3 . При увеличении β пик распределения $p(P)$ будет смещаться влево.

$$\mathcal{W}^{(1)}(l) = 1 - 2 \langle P_1 \rangle + \langle P_1 P_2 \rangle + 2 \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} \left\langle P_1^{i+1/2} P_2^{j+1/2} \right\rangle, \quad (3.15)$$

где A_{ij} – некоторые константы. Обратимся к формуле (3.9)

$$\mathcal{W}^{(1)}(S) \approx \left\langle \mathcal{W}^{(1)}(l_{\text{хар.}}) \right\rangle^{N/2} = \exp \left(\frac{\ln \langle \mathcal{W}^{(1)}(l_{\text{хар.}}) \rangle}{2} \cdot N \right), \quad (3.16)$$

где $l_{\text{хар.}}$ – характеристический размер исследуемой поверхности. Сравнивая выражения (3.11) и (3.16) получим

$$\sigma a^2 \approx - \frac{\ln \langle \mathcal{W}^{(1)}(l_{\text{хар.}}) \rangle}{2}. \quad (3.17)$$

Согласно численным результатам, $\sigma a^2 < 0.09$ во всем диапазоне исследуемых β (а так же при больших значениях β), получим

$$\sigma a^2 \equiv \sigma_{lat} \approx \langle P_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle P_1 P_2 \rangle - \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} \langle P_1^{i+1/2} P_2^{j+1/2} \rangle. \quad (3.18)$$

Коэффициент $\sigma_{lat} = 0.0574$ (в решеточных единицах) в выражении (3.10) можно получить с достаточно хорошей точностью используя разложение (3.18)

$$\begin{aligned} \sigma_{lat} \Big|_{\beta=3.2480} &\approx \langle P_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle P_1 P_2 \rangle - \langle P_1^{1/2} P_2^{1/2} \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle P_1^{1/2} P_2^{3/2} \rangle + \frac{1}{16} \langle P_1^{1/2} P_2^{5/2} \rangle + \\ &+ \frac{1}{64} \langle P_1^{1/2} P_2^{7/2} \rangle + \frac{5}{1024} \langle P_1^{1/2} P_2^{9/2} \rangle - \\ &- \frac{1}{16} \langle P_1^{3/2} P_2^{3/2} \rangle - \frac{1}{64} \langle P_1^{3/2} P_2^{5/2} \rangle - \\ &- \frac{1}{256} \langle P_1^{3/2} P_2^{7/2} \rangle - \frac{5}{4096} \langle P_1^{3/2} P_2^{9/2} \rangle - \\ &- \frac{1}{1024} \langle P_1^{5/2} P_2^{5/2} \rangle - \frac{1}{2048} \langle P_1^{5/2} P_2^{7/2} \rangle = \\ &= 0.0541 \pm 0.0001. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Значения величин, входящих в выражение (3.19) представлены в таблице 3.2. Таким образом, отличие решеточной величины $\sigma_{lat}^{\text{разл.}} = 0.0541$, полученной через разложение (3.18) (для пяти членов ряда), от величины $\sigma_{lat} = 0.0574$ посчитанной при фитировании зависимости поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(1)}$ от площади поверхности, составляет 6%.

Известно, что глюонный конденсат $\langle P \rangle$ в режиме слабой связи раскладывается по обратным степеням β [49]. В таблице 3.3 отображены константы разложения величины $\sigma(\beta)$ по обратным степеням β и константы разложения функции (3.12). Видно, что оба разложения хорошо описывают результаты. Отметим, что при добавлении еще одного члена в разложении по обратным степеням β коэффициенты при меньших степенях меняют знак, что может свидетельствовать об отсутствии ряда теории возмущения в разложении $\sigma(\beta)$ по β .

Таблица 3.2. Значения величин, входящих в выражение (3.19), посчитанных при $\beta = 3.2480$ на решетке 4×40^3 .

Наблюдаемая	Значение	Наблюдаемая	Значение	Наблюдаемая	Значение
$\langle P_1 \rangle$	0.32007(5)	$\langle P_1^{1/2} P_2^{7/2} \rangle$	0.05376(4)	$\langle P_1^{3/2} P_2^{9/2} \rangle$	0.02083(4)
$\langle P_1 P_2 \rangle$	0.10247(3)	$\langle P_1^{1/2} P_2^{9/2} \rangle$	0.04961(6)	$\langle P_1^{5/2} P_2^{5/2} \rangle$	0.01766(2)
$\langle P_1^{1/2} P_2^{1/2} \rangle$	0.27406(5)	$\langle P_1^{3/2} P_2^{3/2} \rangle$	0.04819(3)	$\langle P_1^{5/2} P_2^{7/2} \rangle$	0.01366(3)
$\langle P_1^{1/2} P_2^{3/2} \rangle$	0.11491(4)	$\langle P_1^{3/2} P_2^{5/2} \rangle$	0.02917(2)	–	–
$\langle P_1^{1/2} P_2^{5/2} \rangle$	0.06954(4)	$\langle P_1^{3/2} P_2^{7/2} \rangle$	0.02256(3)	–	–

Таблица 3.3. Значения констант c_i при фитировании. Константы приводятся с точностью до 4 значащих цифр.

Функция	d.o.f.	$\chi^2/d.o.f.$	c_0	c_1	c_2	c_3
Вильсоновское действие						
$c_0 + c_1/\beta + c_2^2 a^2$	21	0.5	-0.02344 ± 0.00168	0.2132 ± 0.0044	$(0.3767 \pm 0.0112) \text{ фм}^{-1}$	–
$\sum_{i=0}^1 c_i \beta^{-i}$	22	6.9	-0.04804 ± 0.00305	0.2793 ± 0.0076	–	–
$\sum_{i=0}^2 c_i \beta^{-i}$	21	0.2	0.1396 ± 0.0076	-0.6541 ± 0.0379	1.154 ± 0.047	–
Улучшенное действие						
$c_0 + c_1/\beta + c_2^2 a^2$	19	0.2	-0.01120 ± 0.00048	0.2124 ± 0.0018	$(0.3987 \pm 0.0046) \text{ фм}^{-1}$	–
$\sum_{i=0}^1 c_i \beta^{-i}$	20	15.3	-0.02981 ± 0.00208	0.2811 ± 0.0070	–	–
$\sum_{i=0}^2 c_i \beta^{-i}$	19	0.4	0.05716 ± 0.00300	-0.2979 ± 0.0199	0.9565 ± 0.0328	–
$\sum_{i=0}^3 c_i \beta^{-i}$	18	0.08	-0.06863 ± 0.01504	0.9608 ± 0.1501	-3.216 ± 0.497	4.580 ± 0.545

3.2. Исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(2)}$

В диссертационной работе было проведено исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(2)}$, который определяется выражением (2.15). Результаты представлены на рис. 3.10. Данная наблюдаемая линейно зависит от площади поверхности $\mathcal{W}^{(2)}(S) = \sigma S + const$, где коэффициент σ можно связать с величиной поверхностной плотности хромагнитных диполей. Конечная часть σ находилась с помощью фита функцией (3.12), в этом случае $\sqrt{\sigma_{ph}} = 110(2) \text{ МэВ}$.

Определить физический смысл σ_{ph} можно, рассмотрев следующую модель. Пусть хромагнитные диполи [19] некоторым образом распределены в пространстве, выберем замкнутую поверхность. На выбранной поверхности k^+ ди-

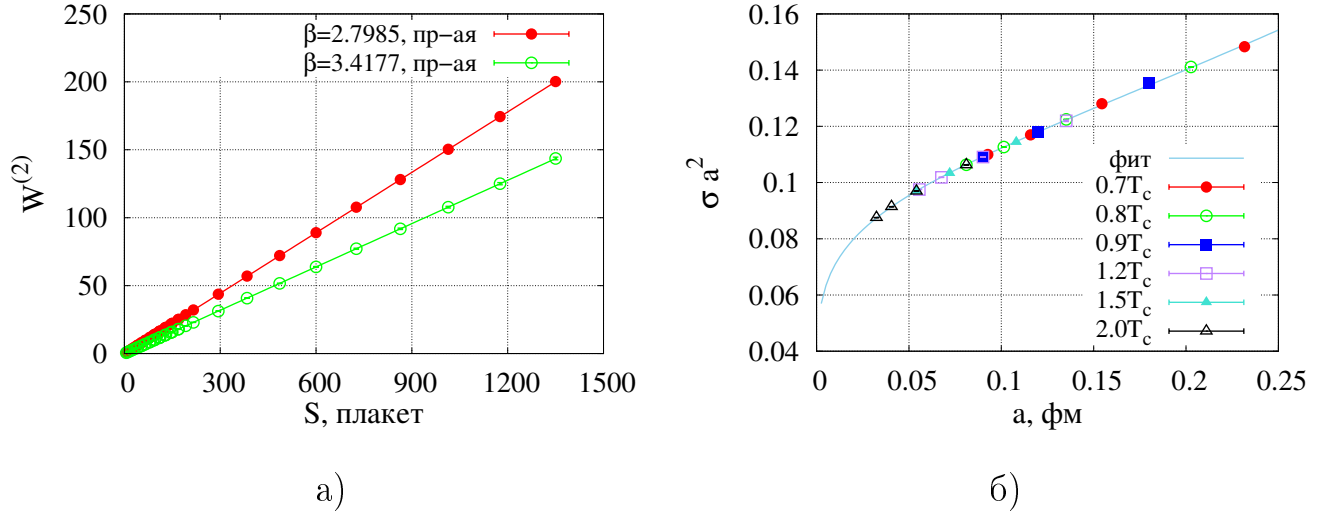


Рис. 3.10. Поведение поверхностного оператора $W^{(2)}$ при разных значениях β при конечной температуре на пространственных поверхностях а) (расчеты проводились на решетке 4×40^3). На рис. б) представлена зависимость поведения поверхностного коэффициента σ в решеточных единицах от масштаба на решетке ($a \equiv a$) при разных значениях температуры.

полей направлены из поверхности (вектор магнитного поля смотрит из поверхности) и k^- диполей направлены внутрь поверхности. Пусть оба числа k^+ и k^- подчиняются распределению Пуассона:

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (3.20)$$

где λ – константа, имеющая смысл математического ожидания $\langle k \rangle$. Вероятность обнаружить k^+ и k^- диполей на замкнутой поверхности запишется в виде:

$$p(k^+, k^-) = p(k^+) p(k^-). \quad (3.21)$$

Оказывается, что данная модель хорошо описывает распределение суммы фаз на поверхности (см. рис. 3.11). В данном случае можно отождествить две наблюдаемые:

$$\left\langle (k^+ - k^-)^2 \right\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \left\langle \left(\sum \theta_P \right)^2 \right\rangle = 2\lambda, \quad (3.22)$$

где $\lambda = \frac{1}{2} \sigma_{dipole} S$. Согласно предложенной модели для физического толкования значения $\sigma_{ph} = 4\pi^2 \sigma_{dipole}$, получаем, что квадратный корень из поверхностной плотности хромомангнитных диполей равен $\sqrt{\sigma_{dipole}} = 17.4(3)$ МэВ.

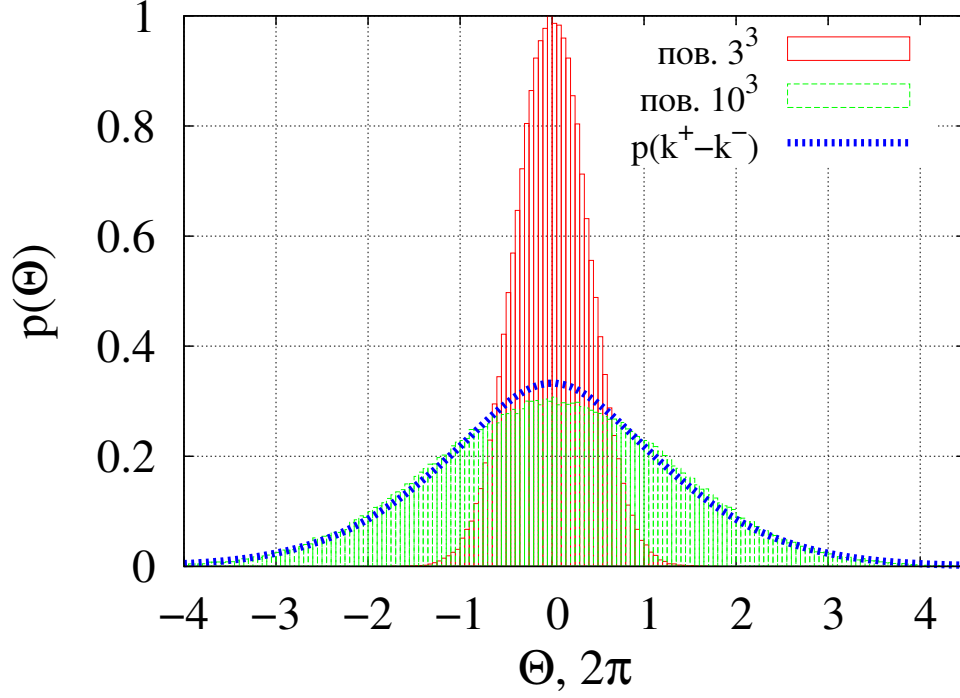


Рис. 3.11. Гистограмма распределения фазы $\Theta = \sum_{P \in S} \theta_P$ на замкнутой кубической поверхности 3^3 и 10^3 .

3.3. Магнитный заряд

Исследования в физике в первую очередь связаны со строгим математическим определением исследуемого объекта или явления. Монополи изначально появились в электродинамике как дуальная частица к электрическому заряду. Введение магнитного заряда позволяло симметризовать уравнения Максвелла [50, 51] относительно электричества и магнетизма:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 c \rho_m, \quad (3.24)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 c \vec{J}_m, \quad (3.25)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}_e. \quad (3.26)$$

Отметим, что без полей материи уравнения Максвелла для электромагнитного поля являются симметричными.

При описании электромагнитного поля и зарядов в терминах вектор-потен-

циала возникают трудности математического характера. При наличии электрических и магнитных зарядов электромагнитное поле не может быть описано при помощи вектор-потенциала A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), непрерывного во всем пространстве. В этом случае, магнитный заряд вводится с помощью Дираковской струны [52], которая представляет собой линии магнитной напряженности сжатые в бесконечно тонкую струну, на одном конце которой расположен магнитный заряд, а другой конец в бесконечности. Либо Дираковская струна связывает два магнитных заряда разных знаков. Такие монополи определяются в абелевых калибровочных полях.

Для понимания природы магнитного заряда [52] рассмотрим распространение частицы, которое в квантовой механике описывается с помощью волновой функции

$$\psi = A e^{i\gamma}, \quad (3.27)$$

где A и γ – действительные функции координат x, y, z и t , обозначающие амплитуду и фазу волновой функции, соответственно. Для данного состояния волновая функция определена с точностью до произвольного константного множителя, значение которого может быть выбрано из условия нормировки для ψ

$$\int \psi^* \psi dV = 1. \quad (3.28)$$

Неопределенность в ψ содержится в возможности изменения фазы γ на произвольную величину ($\gamma \rightarrow \gamma + \delta$). Таким образом, значение фазы γ в конкретной точке не имеет физического смысла и только разница фаз двух произвольных точек имеет определенное значение (при глобальном преобразовании фазы).

Далее мы можем обобщить предыдущий результат на случай локального преобразования фазы ($\gamma(x) \rightarrow \gamma(x) + \delta(x)$). Для двух разделенных точек разница фаз имеет определенное значение только относительно некоторой кривой, соединяющей эти две точки. Таким образом, различные кривые, соединяющие одни и те же две точки, могут давать различные значения разниц фаз между двумя этими точками. Из этого следует, что, рассматривая замкнутые кривые,

полное изменение фазы не обязательно должно быть равным нулю.

Исследуем условие для неинтегрируемой фазы (фаза неинтегрируемая, т.к. ее значение не определено в точке), которое требуется, чтобы теория была строго определена. Если мы перемножим волновую функцию ψ на ее комплексно сопряженную функцию ϕ ($\phi = \psi^*$), мы получим функцию плотности вероятности обнаружить изучаемую частицу в некоторой точке, которая является физически измеримой величиной. Эта функция плотности вероятности не зависит от фазы волновой функции, таким образом неопределенность в фазе никак не влияет на нее. Если мы возьмем разные волновые функции ψ_m и ψ_n , мы можем исследовать произведение данных волновых функций $\phi_m \psi_n$. В таком случае интеграл

$$\int \phi_m \psi_n dx dy dz \quad (3.29)$$

является числом, квадратом модуля которого является физическая величина, которая имеет смысл вероятности перехода между двумя состояниями системы. Получается, чтобы иметь определенное значение модуля интеграла (3.29) требуется, чтобы разность фаз подынтегрального выражения в любых двух точках была строго определена, причем это не требует определения значений самой фазы в каждой точке. Таким образом, изменение фазы величины $\phi_m \psi_n$ вдоль замкнутого контура должно равняться нулю. Это требует, чтобы изменение фазы волновых функции ψ_n и ϕ_m вдоль одного и того же замкнутого контура были равные по модулю и противоположены по знаку. Таким образом, изменение фазы волновой функции вдоль замкнутого контура должно быть одинаковое для любой волновой функции.

Выразим ψ в более общем виде, чем (3.27), как произведение

$$\psi = \psi_1 e^{i\beta}, \quad (3.30)$$

где ψ_1 – волновая функция с определенным значением фазы в каждой точке, модуль которой равен модулю ψ . Неопределенность в фазе теперь сосредоточена в факторе $e^{i\beta}$. Получается, что β не является функцией координат x, y, z ,

t , которая имеет определенные значения в каждой точке, но β должна иметь определенные значения производных

$$\kappa_x = \frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad \kappa_z = \frac{\partial\beta}{\partial z}, \quad \kappa_0 = \frac{\partial\beta}{\partial t} \quad (3.31)$$

в каждой точке, которые, в общем случае, не должны удовлетворять условиям интегрируемости $\partial\kappa_x/\partial y = \partial\kappa_y/\partial x$, и др. Изменение фазы вдоль замкнутой кривой с помощью теоремы Стокса запишется в виде

$$\oint \vec{\kappa} \cdot d\vec{l} = \int \text{rot } \vec{\kappa} \cdot d\vec{S}, \quad (3.32)$$

где $d\vec{l}$ – элементарный элемент замкнутой кривой (4-вектор), $d\vec{S}$ – элемент двумерной поверхности (6-вектор), ограниченный замкнутым контуром. Теперь функция ψ_1 не участвует в расчете изменения фазы.

Из (3.30) можно получить

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = e^{i\beta} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \hbar\kappa_x \right) \psi_1, \quad (3.33)$$

с аналогичными выражениями для производных по y , z и t . Таким образом, если волновая функция ψ удовлетворяет любому волновому уравнению, в которое входит оператор импульса \vec{p} и оператор энергии \mathbf{W} , ψ_1 будет удовлетворять соответствующему волновому уравнению, в котором \vec{p} и \mathbf{W} заменены на $\vec{p} + \hbar\vec{\kappa}$ и $\mathbf{W} - \hbar\kappa_0$ соответственно.

Предположим, что ψ удовлетворяет обычному волновому уравнению для свободной частицы в отсутствие полей. Тогда, ψ_1 будет удовлетворять обычному волновому уравнению для частицы с зарядом $-e$ распространяющейся в электромагнитном поле с 4-вектором потенциалом

$$\vec{A} = \frac{\hbar c}{e} \vec{\kappa}, \quad A_0 = -\frac{\hbar}{e} \kappa_0. \quad (3.34)$$

Таким образом, в то время как ψ_1 – волновая функция со строго определенной фазой, наша теория стала описывать обычное движение электрона в электромагнитном поле. Это дает нам физический смысл неинтегрируемой фазы

в выражении (3.27). Мы видим, что если волновая функция ψ удовлетворяет некоторому волновому уравнению, тогда весь эффект существования электромагнитного поля проявляется через свойство неинтегрируемости фазы этой волновой функции [53–55].

Векторы электрической и магнитной напряженностей связаны с $\vec{\kappa}$ и κ_0 следующим образом

$$\operatorname{rot} \vec{\kappa} = \frac{e}{\hbar c} \vec{H}, \quad \operatorname{grad} \kappa_0 - \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t} = \frac{e}{\hbar} \vec{E}, \quad (3.35)$$

где \vec{E} и \vec{H} – вектора напряженностей электрического и магнитного поля соответственно.

Выше мы разобрали, как свойство неинтегрируемости фазы волновой функции связано с электромагнитным полем. Однако, фаза имеет еще одно свойство, которое мы разберем далее. Это свойство заключается в том, что фаза в общем случае определена с точностью до $2\pi n$, где n – целое число. Само существование этого свойства фазы требует пересмотреть связь между $(\kappa_0, \vec{\kappa})$ и электромагнитным полем, что приводит к появлению нового физического явления.

Условие строго определенной физической интерпретации теории заключалось в том, что изменение фазы вдоль замкнутой кривой должно быть одинаковое для любой волновой функции. Это изменение фазы интерпретировалось выражениями (3.32) и (3.35) как поток 6-вектора \vec{E} и \vec{H} через поверхность, ограниченную контуром. Таким образом, в теории появлялось электромагнитное поле. Учитывая новое свойство фазы волновой функции, требуется пересмотреть условие на фазу. Теперь изменение фазы вдоль замкнутой кривой может различаться на $2\pi n$ у различных волновых функций, где n – целое число.

Рассмотрим очень маленькую замкнутую кривую (маленькую в том смысле, что характеристический размер кривой намного меньше характеристического размера флуктуаций фазы волновой функции). Волновые уравнения требуют непрерывности волновых функций. Таким образом, изменение фазы вдоль маленькой замкнутой кривой также должно быть маленькое ($\ll \pi$). Получает-

ся, что изменение фазы теперь не может различаться на $2\pi n$ у разных волновых функций. Это приводит к обычной интерпретации изменения фазы в терминах потока 6-вектора \vec{E} и \vec{H} через поверхность, ограниченную выбранной замкнутой кривой, поток через которую должен быть так же маленькой величиной ($\ll \frac{\hbar c}{e} \pi$).

Однако, когда волновая функция в каких-то точках становится равной нулю, ее фаза в этих точках теряет смысл. Волновая функция является комплексной функцией. Таким образом, для трехмерной теории, нули волновой функции должны лежать вдоль определенных линий. В дальнейшем мы будем называть такие линии узловыми линиями (nodal line). Рассматривая волновую функцию, имеющую узловую линию, которая пронизывает поверхность, ограниченную нашей маленькой замкнутой кривой, мы больше не можем делать вывод о том, что изменение фазы вдоль этого контура должно быть маленькое. Скорее, мы можем сказать, что изменение фазы должно быть близко к $2\pi n$, где n – целое положительное или отрицательное число. Это число характеризует узловую линию, а знак можно ассоциировать с направлением обхода вдоль замкнутой кривой. Таким образом, узловой линии можно сопоставить направление.

Разница изменения фазы вдоль замкнутой кривой и ближайшим $2\pi n$ должна быть одинаковой для любой волновой функции. Эти волновые функции могут содержать или не содержать узловые линии. В свою очередь эти узловые линии могут проходить или не проходить через поверхность, ограниченную этой замкнутой кривой. Таким образом, эта разница может быть интерпретирована в терминах потока 6-вектора \vec{E} и \vec{H} через поверхность.

Рассмотрим произвольную замкнутую кривую. Разделим ее на сеть инфинитезимальных замкнутых петель, лежащих на поверхности, ограниченной выбранной замкнутой кривой. Для любой такой инфинитезимальной замкнутой петли в 3-х мерном пространстве изменение фазы определяется только магнит-

НЫМ ПОТОКОМ

$$2\pi n + \frac{e}{\hbar c} \int \vec{H} \cdot d\vec{S}. \quad (3.36)$$

Теперь полное изменение фазы вдоль произвольной замкнутой кривой будет равняться сумме изменений фаз вдоль инфинитезимальных замкнутых петель

$$2\pi \sum n + \frac{e}{\hbar c} \int \vec{H} \cdot d\vec{S}, \quad (3.37)$$

где интегрирование выполняется по большой поверхности, а суммирование идет по всем узловым линиям, проходящим через большую поверхность. Это выражение состоит из двух частей, $\frac{e}{\hbar c} \int \vec{H} \cdot d\vec{S}$ должна быть одинаковой для всех волновых функций и $2\pi \sum n$, которая может быть различной для различных волновых функций.

Выражение (3.37), применимое к любой поверхности, дает полное изменение фазы на границе этой поверхности. Таким образом, выражение (3.37) можно применить к замкнутой поверхности. Из этого следует, что $\sum n$ просуммированная по всем узловым линиям, пересекающим замкнутую поверхность, должна быть одинаковой для всех волновых функций и должна равняться $-e/2\pi\hbar c$ умноженному на полный магнитный поток через замкнутую поверхность.

Если для какой-то замкнутой поверхности $\sum n \neq 0$, тогда узловая линия должна иметь конец внутри этой замкнутой поверхности, т.к. узловая линия без конечной точки внутри замкнутой поверхности должна пересекать эту поверхность четное количество раз. Получим, что полный вклад такой узловой линии в $\sum n$ будет равняться нулю. Таким образом в $\sum n$ содержатся вклады узловых линий, имеющих конец внутри замкнутой поверхности. Причем, $\sum n$ имеет определенное значение для всех волновых функций. Этот результат применим к любым замкнутым поверхностям, таким образом положения концов узловых линий должны быть одинаковыми для всех волновых функций. Эти точки являются сингулярными точками электромагнитного поля. Итак, полный поток магнитного поля через маленькую замкнутую поверхность, ограничивающую

лишь один конец любой узловой линии может быть записан в виде

$$4\pi\mu = 2\pi n\hbar c/e, \quad (3.38)$$

где n – характеристика отдельной узловой линии, конец которой, расположен внутри изучаемой маленькой замкнутой поверхности. Таким образом внутри этой замкнутой поверхности находится магнитный заряд (монополю) с зарядом

$$\mu = \frac{1}{2}n\hbar c/e. \quad (3.39)$$

Получается, что наша теория позволяет существовать изолированному монополю, магнитный заряд которого квантуется (из этого следует также квантование электрического заряда). Наименьшее значение магнитного заряда равняется μ_0 , которое связано с величиной электрического заряда e формулой

$$\frac{\hbar c}{e\mu_0} = 2. \quad (3.40)$$

Одним из интригующих свойств уравнения (3.39) является следующее: если e мало, то μ велико, и наоборот. Как бы выглядели магнитные заряды, если бы существовали? Они ничем бы не отличались от электрических зарядов: они тоже взаимодействуют с помощью потенциала $1/r$, отталкиваются при одноименных и притягиваются при разноименных зарядах. В принципе мы могли бы эффективно сформулировать теорию электромагнетизма в терминах магнитных зарядов, которые выступали бы в качестве электрических зарядов. В этом случае теория была бы сильно взаимодействующей, и роль константы связи играл бы параметр μ_0 , а не e .

В физике существует постоянная тонкой структуры α , которая является фундаментальной физической постоянной, характеризующей силу электромагнитного взаимодействия. Она была введена в 1916 году немецким физиком Арнольдом Зоммерфельдом [56] в качестве меры релятивистских поправок при описании атомных спектральных линий в рамках модели атома Бора, то есть характеризует так называемую тонкую структуру спектральных линий. Данная

постоянная определяется тремя фундаментальными физическими константами: e , c и \hbar , и выражается следующим образом

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (3.41)$$

Используя выражения (3.40) и (3.41) можно получить величину магнитного заряда

$$\frac{\mu_0^2}{\hbar c} = \frac{4}{\alpha} \approx 34.25. \quad (3.42)$$

Таким образом, величина магнитного заряда в естественных единицах ($\hbar = c = 1$) намного больше единицы, что приводит к невозможности применения теории возмущений при исследовании свойств монополя. Магнитный заряд, определенный выше, рассматривался в рамках теории с абелевой группой симметрии $U(1)$.

Рассматривая калибровочные поля с неабелевой группой симметрии, мы сталкиваемся со сложностью определения монополей в них. В 1981 году нидерландский физик Герард т'Хофт [13] получил, что монополи могут появляться вследствие частичной фиксации калибровки, а именно после выполнения абелевой проекции [3]. Например, абелева проекция теории с калибровочной группой $SU(N)$ является калибровочная группа $[U(1)]^{N-1}$.

3.4. Максимально абелева калибровка

Идея максимально абелевой проекции калибровочной группы заключается в частичной фиксации калибровочных степеней свободы таким образом, чтобы максимально абелева (Картана) подгруппа оставалась не нарушенной. Для группы $SU(N)$ такая подгруппа является $[U(1)]^{N-1}$. Решеточным численным моделированием [23, 57–60] показана исключительная важность данной калибровки в понимании природы конфайнмента.

Рассмотрим максимально абелеву проекцию группы $SU(2)$. В этом случае процедура фиксации калибровки будет заключаться в нахождению максимума

следующего функционала

$$F(U) = \frac{1}{8V} \sum_{n,\mu} \text{Tr} (\sigma_3 U_\mu(n) \sigma_3 U_\mu^\dagger(n)) , \quad (3.43)$$

где $V = N_s^3 \cdot N_t$ – количество узлов на решетке. Максимум функционала (3.43) ищется относительно локальных калибровочных преобразований

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = g(n) U_\mu(n) g^\dagger(n + \hat{\mu}) . \quad (3.44)$$

Функционал (3.43) фиксирует всевозможные калибровочные преобразования с точностью до множителя $g(n) \rightarrow e^{i\alpha(n)\sigma_3/2} g(n)$, где α может принимать значения $-2\pi \leq \alpha < 2\pi$, таким образом $g(n) \in \text{SU}(2)/\text{U}(1)$.

Стандартная параметризация $\text{SU}(2)$ матрицы записывается в виде

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ -U_{12}^* & U_{11}^* \end{pmatrix} , \quad (3.45)$$

где U_{11}, U_{12} – комплексные величины, которые можно выразить через значения трех действительных углов ϕ, θ и χ

$$\begin{cases} U_{11} = e^{i\theta} \cos \phi , \\ U_{12} = e^{i\chi} \sin \phi . \end{cases} \quad (3.46)$$

Область определения углов следующая: $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $-\pi < \theta, \chi \leq \pi$. В такой параметризации функционал (3.43) запишется в виде

$$F(U) = \frac{1}{8V} \sum_{n,\mu} \cos(2\phi_\mu(n)) . \quad (3.47)$$

Таким образом, условие

$$\max_{g(n)} \frac{1}{8V} \sum_{n,\mu} \cos(2\phi_\mu(n)) \quad (3.48)$$

фиксирует значение угла ϕ на каждом ребре. После выполнения процедуры фиксации калибровки величины $\theta_\mu(n)$ образуют абелево калибровочное поле,

а $\chi_\mu(n)$ становятся векторным Голдстоуновским полем с зарядом два в непрерывном пределе [57]. Величины θ и χ преобразуются следующим образом

$$\theta_\mu(n) \rightarrow \theta'_\mu(n) = \theta_\mu(n) + \alpha(n) - \alpha(n + \hat{\mu}), \quad (3.49)$$

$$\chi_\mu(n) \rightarrow \chi'_\mu(n) = \chi_\mu(n) + \alpha(n) + \alpha(n + \hat{\mu}), \quad (3.50)$$

где $\alpha(n)$ – вещественное калибровочное преобразование.

Плакетное действие определяется вкладом одного плакета в общее действие (1.83)

$$S_P = \frac{1}{2} \text{Tr} U_1 U_2 U_3^\dagger U_4^\dagger, \quad (3.51)$$

где индексы 1, 2, 3 и 4 соответствуют ребрам элементарной грани P в точке n в плоскости (μ, ν) : $1 \rightarrow \{n, n + \hat{\mu}\}$, $2 \rightarrow \{n + \hat{\mu}, n + \hat{\mu} + \hat{\nu}\}$, $3 \rightarrow \{n + \hat{\nu}, n + \hat{\mu} + \hat{\nu}\}$, $4 \rightarrow \{n, n + \hat{\nu}\}$. Рассмотрим плакетное действие в терминах углов ϕ , θ и χ . В этом случае S_P можно разделить на три слагаемых [57]

$$S_P = S_a + S_n + S_i, \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned} S_a &= \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4) \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 \cos \phi_4, \\ S_n &= -\cos(\theta_3 + \theta_4 - \chi_1 + \chi_2) \cos \phi_3 \cos \phi_4 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\ &\quad + \cos(\theta_2 + \theta_4 - \chi_1 + \chi_3) \cos \phi_2 \cos \phi_4 \sin \phi_1 \sin \phi_3 \\ &\quad + \cos(\theta_1 - \theta_4 - \chi_2 + \chi_3) \cos \phi_1 \cos \phi_4 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \\ &\quad + \cos(\theta_2 - \theta_3 - \chi_1 + \chi_4) \cos \phi_2 \cos \phi_3 \sin \phi_1 \sin \phi_4 \\ &\quad + \cos(\theta_1 + \theta_3 + \chi_2 - \chi_4) \cos \phi_1 \cos \phi_3 \sin \phi_2 \sin \phi_4 \\ &\quad - \cos(\theta_1 + \theta_2 + \chi_3 - \chi_4) \cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 \sin \phi_4, \\ S_i &= \cos(\chi_1 - \chi_2 + \chi_3 - \chi_4) \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \sin \phi_4. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Учитывая, что величины ϕ фиксированы условием (3.48), получаем, что S_a пропорциональна стандартному плакетному действию компактной электродинамики для "калибровочного" поля θ ; действие S_i отвечает за "материальное" поле χ , которое инвариантно относительно калибровочного преобразования (3.50); действие S_n описывает взаимодействие полей θ и χ .

Анализируя условие (3.48) можно предположить, что максимум функционала реализуется при значениях угла ϕ флуктуирующих около нуля. Данный факт был подтвержден численным моделированием, приведенным в статье [57], например $\langle S_a \rangle \approx 0.82 \langle S_P \rangle$ (при $\beta = 2.2$ для стандартного вильсоновского действия SU(2)-глюодинамики). Из этого следует, что наибольший вклад в действие S_P вносит S_a ($S_a > S_n > S_i$), т.е. часть отвечающая за абелево "калибровочное" поле θ . Таким образом, действие для SU(2)-глюодинамики в максимально абелевой калибровке хорошо аппроксимируется действием для компактной электродинамики с калибровочной группой U(1): $S_P \approx \cos \theta_P$ с перенормируемым значением $\bar{\beta} = \beta \cos^4 \phi$.

Поиск максимума функционала (3.43) достаточно непростая задача, вследствие существования большого количества локальных максимумов и Грибовских копий [61]. Данные сложности обходятся с помощью применения алгоритма «имитация отжига» (англ. Simulated annealing) – общий алгоритмический метод решения задачи глобальной оптимизации, особенно дискретной и комбинаторной оптимизации. Один из примеров методов Монте Карло. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов. Таким образом, алгоритм заключается в процессе принятия новых калибровочных конфигураций U' под действием калибровочного преобразования $g(n)$ при постепенно понижающейся температуре. Таким образом, температура контролирует вероятность перехода $U \rightarrow U'$ если $F(U) > F(U')$, причём вероятность уменьшается с понижением температуры. В случае постепенного понижения температуры, мы более полно обходим пространство калибровочных конфигураций, что приводит после проведения большого числа итераций к нахождению глобального максимума.

Отметим, что в максимально абелевой калибровке проекция делается на

ребрах решетки

$$\theta_\mu(n) = \text{Arg}(U_{11,\mu}(n)), \quad (3.54)$$

$$\theta_P = \theta_{\mu\nu}(n) = \theta_\mu(n) + \theta_\nu(n + \hat{\mu}) - \theta_\mu(n + \hat{\nu}) - \theta_\nu(n), \quad (3.55)$$

в то время как при вычислении поверхностных операторов $\mathcal{W}^{(1)}$ и $\mathcal{W}^{(2)}$ проекция делалась на элементарных гранях решетки.

3.5. Исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(3)}$ в максимально абелевой калибровке

Поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(3)}$ (3.1) определяется следующим образом

$$\mathcal{W}^{(3)} = \langle \Phi^2 \rangle,$$

где под Φ понимается полный поток вектора хромомагнитной индукции \vec{B} через замкнутую поверхность. Данный оператор исследовался в максимально абелевой проекции глюодинамики с группой симметрии $SU(2)$, в которой, хромомагнитное поле (в решеточных единицах), пронизывающее элементарную грань решетки, записывается в виде

$$B_P \cdot a^2 = \frac{1}{2i} \text{Tr}(\sigma_3 U_P) = \sin \theta_P, \quad (3.56)$$

где a – длина элементарной грани решетки, σ_3 – матрица Паули. Таким образом, наблюдаемая $\mathcal{W}^{(3)}$ примет вид

$$\mathcal{W}^{(3)} = \frac{1}{a^4} \left\langle \left(\sum_{\theta_P \in S} \sin \theta_P \right)^2 \right\rangle. \quad (3.57)$$

Посчитанная наблюдаемая (3.57) представлена на рис. 3.12. Параметры решеток, на которых проводились расчеты приведены в таблице 3.4. Из рис. 3.12 видно, что наблюдаемая имеет линейную зависимость от площади замкнутой поверхности. Для проверки данного предположения каждая зависимость была

профитированна линейной функцией от площади и объема поверхности:

$$\mathcal{W}^{(3)}(S, V) \cdot a^4 = \sigma S + \gamma V + \delta, \quad (3.58)$$

где σ – поверхностный коэффициент, γ – объемный коэффициент, S и V – площадь и объем замкнутой поверхности, соответственно.

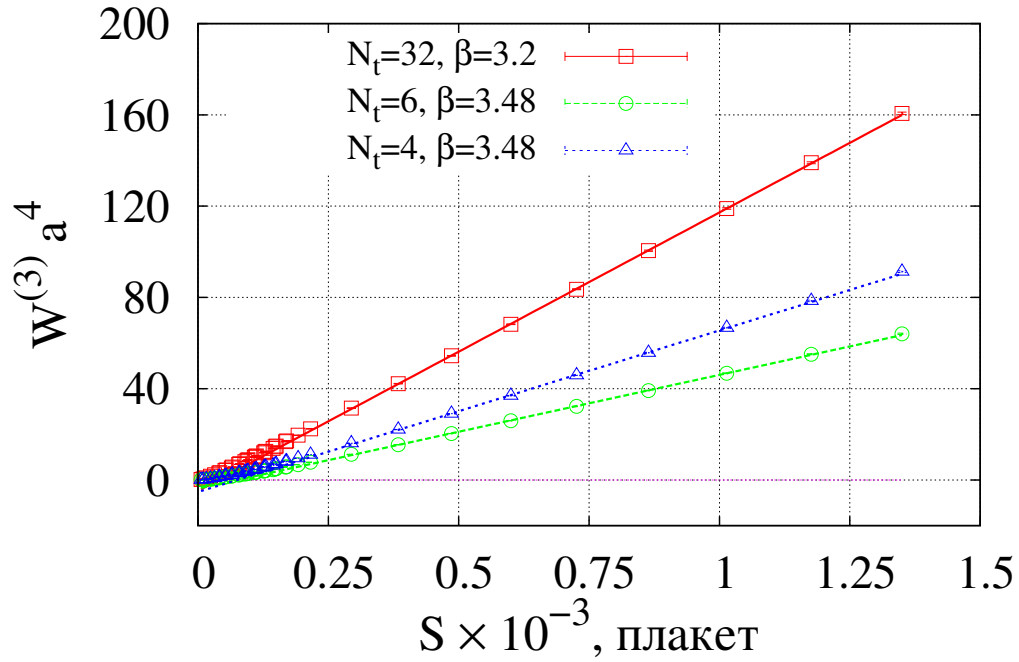


Рис. 3.12. Поведение поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(3)}$ при разных значениях β при конечной и нулевой температуре на пространственных поверхностях.

Результаты фитирования представлены на рис. 3.13. При фитировании использовались поверхности с наибольшими площадями (площадь замкнутой поверхности $S \gtrsim 200$ плакетов). Было рассмотрено два варианта фита $\gamma \equiv 0$ и $\gamma \neq 0$, что в первом случае соответствует зависимости только от площади поверхности, во втором случае учитывается и объемная составляющая. Было получено, что при $\gamma \equiv 0$ удается провести прямую линию по 6 точкам (в среднем по всем зависимостям) с максимальной поверхности, так, что характеристика фита $\chi^2 < 1.0$. Если учесть объемную составляющую ($\gamma \neq 0$) количество точек увеличивается до 11 (в среднем) при $\chi^2 < 1.0$. На рис. 3.14 приведено сравнение двух типов фита.

Таблица 3.4. Параметры решеток, при которых проводились исследования в максимально абелевой проекции глюодинамики с группой $SU(2)$.

β	a , фм	Размер	T/T_c	N_{conf}
3.248	0.108099	$48^3 \times 4$	1.5	254
3.410	0.0821337	$48^3 \times 4$	2.0	200
3.480	0.0729411	$48^3 \times 4$	2.26	200
3.544	0.0654398	$48^3 \times 4$	2.5	200
3.640	0.0556092	$48^3 \times 4$	3.0	300
3.265	0.105027	$48^3 \times 6$	1.03	416
3.285	0.101525	$48^3 \times 6$	1.07	306
3.300	0.0989752	$48^3 \times 6$	1.1	298
3.340	0.0924847	$48^3 \times 6$	1.2	260
3.400	0.0835382	$48^3 \times 6$	1.31	372
3.480	0.0729411	$48^3 \times 6$	1.5	204
3.640	0.0556092	$48^3 \times 6$	2.0	200
3.200	0.117265	32^4	0.173	50

Можно сделать вывод, что согласно рис. 3.13 поверхностный коэффициент $\sqrt{\sigma}$ при $T < T_c$ ведет себя как константа, а в высокотемпературной фазе при $T > T_c$ линейно возрастает с ростом температуры.

Полученные результаты сильно похожи на температурное поведение пространственного натяжения струны σ_s , хотя и не имеют явной связи друг с другом (кроме анализа размерности). На рисунках 3.13 и 3.14 приведена зависимость $\sqrt{\sigma_s}(T/T_c)$, взятая из статьи [62]. Пространственное натяжение струны σ_s вводится, как коэффициент в показателе экспоненты в зависимости пространственной петли Вильсона от ее размеров. Известно, что в фазе не вылетания, пространственная петля Вильсона зависит от минимальной площади поверхно-

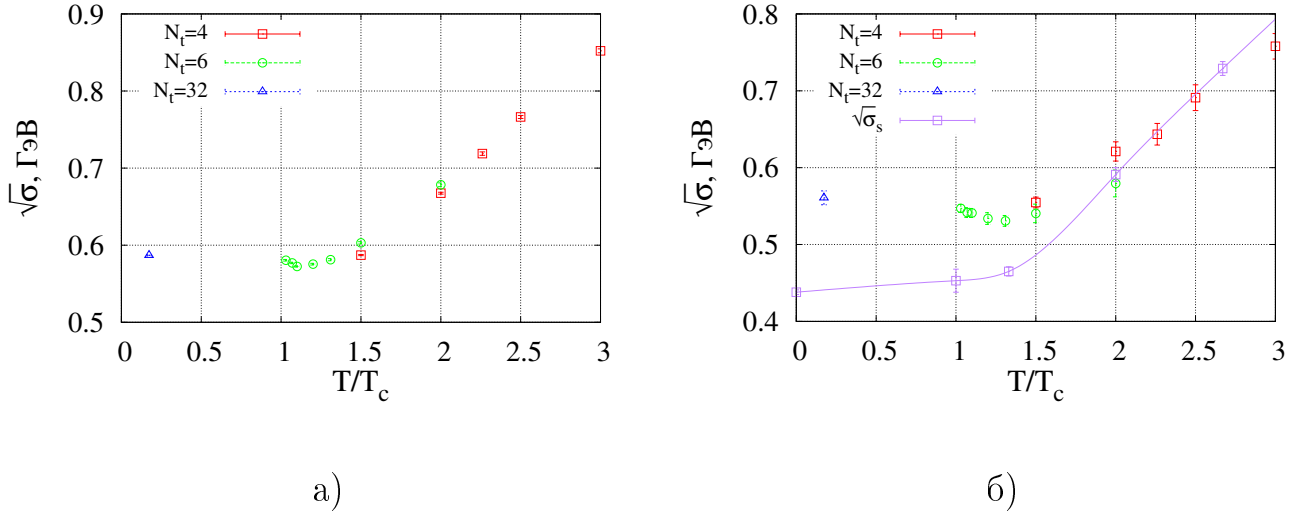


Рис. 3.13. Поведение $\sqrt{\sigma}$ от температуры. а) – объемная зависимость не учитывается ($\gamma \equiv 0$), б) – объемная зависимость учитывается ($\gamma \neq 0$) в фите зависимости $\mathcal{W}^{(3)}(S, V)$. На рис. б) также изображена зависимость квадратного корня пространственного натяжения струны $\sqrt{\sigma_s}$, взятая из статьи [62].

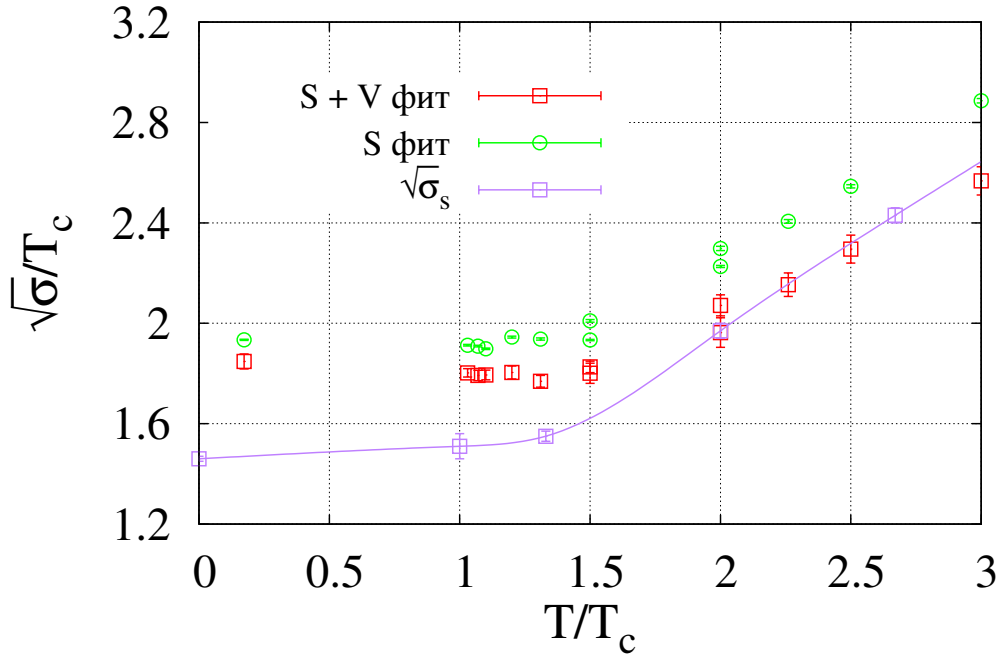


Рис. 3.14. Сравнение зависимости $\sqrt{\sigma}$ от температуры для разных функций фитирования с зависимостью квадратного корня пространственного натяжения струны $\sqrt{\sigma_s}$ [62] от температуры.

сти, натянутой на эту петлю

$$W(R, S) = \left\langle e^{\imath \oint_{R \times S} dx_\mu A_\mu} \right\rangle \sim e^{-\sigma_s R S}. \quad (3.59)$$

Строгое доказательство существования ненулевого пространственного натяжения струны в высокотемпературной фазе калибровочной теории с группой симметрии $SU(N)$ доказана при конечном шаге решетки a в статье [63].

Результаты третьей главы опубликованы в работах [28–30, 32, 35].

Глава 4

Исследование аксиального магнитного эффекта

Киральные свойства среды можно изучать различными способами, например, помещая среду во внешнее аксиальное магнитное поле, либо используя киральный химический потенциал. В статье [64] представлены результаты моделирования методом Монте Карло $SU(2)$ квантовой хромодинамики с ненулевым киральным химическим потенциалом. В статье показано, что критическая температура фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент увеличивается с увеличением киральности среды. Рассмотрим поподробнее исследование киральных свойств среды с помощью внешнего аксиального магнитного поля.

Квантовые аномалии, описывающиеся в терминах проводимости, ответственны за существование стационарных бездиссипативных токов. Таким образом, для исследования такого вида аномалий можно применять методы квантовой теории поля на решетке в евклидовом времени, т.к. решеточные методы позволяют изучать системы при их термодинамическом равновесии. Большинство киральных проводимостей в значительной степени зависят от химических потенциалов, которые, как известно, трудно реализовать на решетке. К счастью, существует одна киральная проводимость при конечной температуре, которая отлична от нуля даже при нулевом значении химического потенциала. Это киральная вихревая проводимость в аксиальном токе:

$$\vec{J}_5 = \sigma_{\text{CVE},5} \vec{\omega}, \quad (4.1)$$

где \vec{J}_5 – аксиальный ток, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ – ротор от поля вектора скоростей \vec{v} в жидкости. Это уравнение сложно изучать в решеточном подходе, так как оно описывает вращательные свойства системы. Известно, что на решетке непрерывной группы вращения нет (считается, что она восстанавливается в непрерывном пределе), таким образом исследование ротационных свойств системы затруднено в решеточном подходе. Другой эффект, который тесно связан с предыдущим,

это так называемый аксиальный магнитный эффект (АМЕ). Он заключается в существовании потока энергии $\vec{J}_\epsilon^i = T^{0i}$ вдоль аксиального магнитного поля, причем действие магнитного поля на левые и правые фермионы отличается знаком. Аксиальный магнитный эффект описывается следующим выражением:

$$\vec{J}_\epsilon = \sigma_{\text{AME}} \vec{B}_5, \quad (4.2)$$

где \vec{B}_5 – аксиальное магнитное поле. Формула Кубо [11] для этих двух киральных проводимостей предполагает их равенство $\sigma_{\text{CVE},5} = \sigma_{\text{AME}}$. В слабо связанном газе из левых и правых фермионов с зарядами q_L и q_R , соответственно, коэффициент проводимости АМЕ растет с температурой по следующему закону:

$$\sigma_{\text{AME}} = \frac{1}{24} \left(\sum_R q_R - \sum_L q_L \right) T^2. \quad (4.3)$$

В рамках квантовой теории поля на решетке можно проверить транспортный закон АМЕ (4.2) и исследовать свойства коэффициента проводимости σ_{AME} , т.к. аксиальный магнитный эффект можно наблюдать при нулевых значениях химических потенциалов, $\mu = \mu_5 = 0$. Введение аксиального магнитного поля \vec{B}_5 так же является достаточно известной процедурой [12, 65].

Согласно уравнению (4.2) аксиальное магнитное поле должно индуцировать бездиссипативный поток энергии кварков вдоль направления поля. В статье [12] были проведены исследования в рамках SU(2) КХД без учета фермионных петель («quenched» КХД), которые подтверждают появление АМЕ в фазе деконфайнмента для одного значения температуры. Этот же эффект был продемонстрирован в статье [65] для свободных фермионов.

В фазе деконфайнмента поток энергии оказался пропорционален величине аксиального магнитного поля в качественном соответствии с аналитическим предсказанием (4.2) (см. рис. 4.1). Теоретически транспортный закон (4.2) должен работать в пределе слабого поля. Удивительно, что численные результаты [12] показали, что линейный закон сохраняется при очень высоких значениях

аксиального магнитного поля $eB_5 \approx 1.2 \text{ ГэВ}^2$. Численные расчеты настоящей диссертации также подтвердили с высокой точностью линейное поведение закона АМЕ (4.2) во всем диапазоне значений исследуемого аксиального магнитного поля.

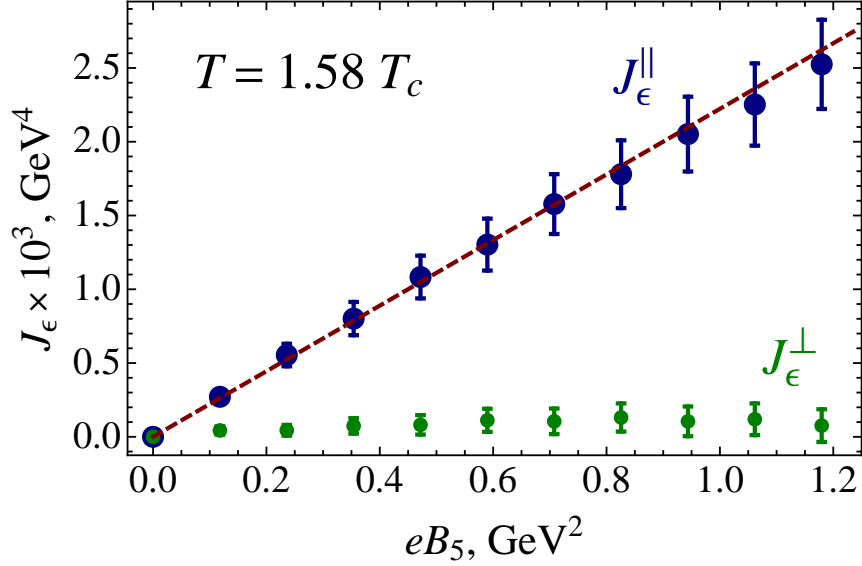


Рис. 4.1. Зависимость потока энергии (4.2) от величины аксиального магнитного поля. Рисунок взят из работы [12].

В фазе конфайнмента $T < T_c$ и в области близкой к фазовому переходу $T \sim T_c$ бездиссипативный перенос энергии перестает существовать. Исчезновение эффекта в области низких температур является следствием того, что закон АМЕ основывается на свойствах кварков, которые отсутствуют в теории при низких температурах в следствии явления конфайнмента.

Рассмотрим один аромат фермионов, $N_f = 1$, с единичным зарядом:

$$q_5^L = -q_5^R = +e. \quad (4.4)$$

В соответствии с выражением (4.3), в КХД с двумя цветами $N_c = 2$ и одним ароматом $N_f = 1$ коэффициент σ в законе, определяющем поведение аксиального магнитного эффекта (4.2), можно определить в следующем виде:

$$\sigma^{\text{th}}(T) = C_{\text{AME}}^{\text{th}} T^2, \quad (4.5)$$

где

$$C_{\text{AME}}^{\text{th}} = \frac{2N_f N_c}{24} \equiv \frac{1}{6}. \quad (4.6)$$

Температурная зависимость (4.5) должна быть справедливой в высокотемпературной фазе деконфайнмента, достаточно далеко от температуры фазового перехода.

В работе [12] были проведены численные исследования закона (4.2) при одном единственном значении температуры $T = 480 \text{ МэВ} \simeq 1.58 T_c$ в фазе деконфайнмента, где критическая температура фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент составляет $T_c = 303 \text{ МэВ}$ в непрерывном пределе решеточной глюодинамики с калибровочной группой $SU(2)$ [66]. В работе [12] был посчитан коэффициент C_{AME} , который сильно отличается от теоретически предсказанного значения:

$$\left. \frac{C_{\text{AME}}(T)}{C_{\text{AME}}^{\text{th}}} \right|_{T=480 \text{ МэВ}} \simeq 0.058. \quad (4.7)$$

Большая разница между теоретическими и численными результатами (4.7) может быть объяснена тем, что при данной температуре ($T = 480 \text{ МэВ}$) зависимость $C_{\text{AME}}(T)$ еще не вышла на асимптотическое поведение.

В настоящей диссертации выполняется исследование температурной зависимости коэффициента проводимости σ_{AME} (4.2) в широком диапазоне температур. В частности, определяется вид ее асимптотики в фазе деконфайнмента.

4.1. Детали вычислений

Для изучения АМЕ рассматривался следующий лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 &= \bar{\psi}(\partial_\mu - igA_\mu^a t^a - i\gamma^5 e A_{5,\mu})\gamma^\mu \psi \\ &\equiv \bar{\psi} \mathcal{D}_5(A_5) \psi, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где аксиальное поле $A_{5,\mu}$ стандартным способом добавляется в удлиненную производную фермионных полей, A_μ^a – неабелево калибровочное поле и t^a – генераторы, соответствующей калибровочной группы $SU(2)$ ($a = 1, 2, 3$).

Работа выполнена методами решеточной КХД без учета фермионных петель, таким образом фермионы не влияют на неабелево калибровочное поле. Известно, что кварковый пропагатор в таком случае не сильно меняется [67], таким образом в общем можно ожидать, что данное допущение внесет несущественные изменения в исследуемую величину. Уменьшение количества цветов N_c (2 вместо 3) уже учтены в теоретической оценке (4.6).

Аксиальное калибровочное поле выбирается в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{5,0} &= A_{5,3} = 0, \\ A_{5,1} &= -\frac{x_2 B_5}{2}, \quad A_{5,2} = \frac{x_1 B_5}{2}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

которое соответствует стационарному аксиальному магнитному полю в 3-ем направлении, $B_{5,i} = B_5 \cdot \delta_{i,3}$ (латинские индексы $i = 1, 2, 3$ соответствуют пространственным координатам и $\mu = 0$ – временное направление). Аксиальное электрическое поле отсутствует.

Поток энергии фермионного поля выражается через вакуумное среднее от T^{0i} компонент тензора энергии импульса фермионного поля:

$$J_\epsilon^i = \langle T^{0i} \rangle \equiv \frac{i}{2} \langle \bar{\psi} (\gamma^0 \mathcal{D}_5^i + \gamma^i \mathcal{D}_5^0) \psi \rangle, \quad (4.10)$$

где ковариантная производная определена в формуле (4.8).

В дополнение к фермионной части (4.10), поток энергии может так же в себя включать глюонный вклад. Однако, в «quenched» аппроксимации кварковых вакуумных петель нет, а это означает, что глюоны не чувствительны к внешнему магнитному полю (хотя глюоны и так не имеют электрического заряда, они могут быть чувствительны к внешнему магнитному полю через взаимодействие с кварковыми вакуумными петлями). Таким образом, формула (4.10) дает величину полного потока энергии в изучаемой теории.

В решеточной формулировке формулу (4.10) нужно дискретизовать, после

чего она принимает вид:

$$\begin{aligned} C_\mu(x, y; A) &= \langle \bar{\psi}(x) U_{x,y}(A_\mu^a) \gamma_\mu \psi(y) \rangle_A \\ &\equiv \text{Tr} \left(U_{x,y}(A_\mu^a) \frac{1}{\not{D}_5 + m} \gamma_\mu \right)_{x,y;A}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где усреднение проводится по фермионному полю при фиксированных значениях аксиального поля $A_{5,\mu}$ и неабелевого поля A_μ^a . Эти поля закладываются в оператор Дирака \not{D}_5 , который определен в выражении (4.8). В выражении (4.11) след берется по цветовому и спинорному индексам, а глюонная струна $U_{x,y}$ между точками x и y делает выражение калибровочно инвариантным. В конечном счете ожидаемое значение наблюдаемой (4.11) должно быть усреднено по ансамблю динамического калибровочного поля A_μ^a .

Фермионный пропагатор (4.11) в работе рассчитывался с помощью следующего тождества:

$$\begin{aligned} \text{tr} [S_5(A_5) \gamma_\mu] &\equiv \text{tr} [(\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) S_5(A_5) \gamma_\mu] \\ &= \text{tr} [\mathcal{P}_R S(A_5) \gamma_\mu] + \text{tr} [\mathcal{P}_L S(-A_5) \gamma_\mu], \end{aligned} \quad (4.12)$$

где след берется по спинорным индексам и $\mathcal{P}_{R,L} = (1 \pm \gamma^5)/2$ – правый и левый киральный проекционный оператор, соответственно. Тождество (4.12) связывает след пропагатора $S_5(A_5)$, определенном в аксиальном поле A_5 , со следом обычного пропагатора $S(\mathcal{A})$, посчитанном в привычном $U(1)$ калибровочном поле \mathcal{A} ,

$$S_5(A_5) = [\not{D}_5(A_5)]^{-1}, \quad S(\mathcal{A}) = [\not{D}(\mathcal{A})]^{-1}. \quad (4.13)$$

Оператор Дирака $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в данном случае имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}_\mu(\mathcal{A}) = \partial_\mu - ig A_\mu^a t^a - ie \mathcal{A}_\mu. \quad (4.14)$$

В выражении (4.12) аксиальное поле A_5 проявляется как два абелевых поля разного знака для левых и правых фермионов, причем знак выбирается в соответствии с их зарядами (4.4).

Корреляционная функция (4.11) рассчитывалась численными методами, параметры которых определяются в статьях [68, 69]. Фермионы вводятся с помощью решеточного «overlap» оператора Дирака \mathcal{D} с точной киральной симметрией [27]. Решеточная версия выражения (4.10) рассчитывается используя корреляционную функцию (4.11). Усреднение выполняется по ансамблю равновесных конфигураций калибровочного поля A_μ^a при конечной температуре:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \left(\int DA_\mu^a e^{-S_{YM}[A_\mu^a]} \right)^{-1} \int DA_\mu^a e^{-S_{YM}[A_\mu^a]} \mathcal{O},$$

где $S_{YM}[A_\mu^a]$ – решеточное действие Янга-Миллса.

Для расчета потока энергии (4.10) использовалось 3000 конфигураций калибровочного поля для каждого набора параметров (пространственные L_s и временные L_t размеры решетки, длина ребра a , величина аксиального калибровочного поля eB_5). В работе используется улучшенное действие для глюонного поля [23, 70]. В предыдущих численных расчетах [12] количество конфигураций было меньше (чем в настоящей диссертации), рассматривались асимметричные решетки $L_s^3 \times L_t$ с тремя размерами временного направления $L_t = 4, 6, 8$ и фиксированным пространственным размером $L_s = 14$. В этой же работе была проверена устойчивость результатов к вариациям объема решетки и величины ребра решетки a .

В настоящей диссертации исследуется высокотемпературная часть фазовой диаграммы $\sigma(T)$, для этого было выбрано единственное значение $L_t = 4$ и разные значения пространственного размера решетки $L_s = 16, 18, 20$. Расчеты выполнялись при $a = (0.068 \dots 0.148)$ фм и температурах $T = (330 \dots 720)$ МэВ.

Посмотрев на тождество (4.12) можно понять, что аксиальное магнитное поле должно иметь общие свойства с обычным магнитным полем. Например, величина аксиального магнитного поля также квантуется как и само магнитное поле на решетке и зависит от пространственного размера решетки:

$$B_5 = k B_{5,\min}, \quad eB_{5,\min} = \frac{2\pi}{L_s^2}. \quad (4.15)$$

В выражении (4.15) целое число k определяет полное число элементарных магнитных потоков через плоскость (x^1, x^2) на решетке и может принимать значения $k = 0, 1, \dots, L_s^2/2$. Чтобы избежать ультрафиолетовых артефактов в работе используются достаточно маленькие значения магнитных полей $k \leq 15$, которые намного меньше максимально возможных полей на решетке $k_{\max} = L_s^2/2 \sim 100$. В физических единицах максимальное значение магнитного поля порядка $eB_{5,\max} \sim 1 \text{ ГэВ}^2$, а минимально возможное порядка $eB_{5,\min} \sim 0.1 \text{ ГэВ}^2$.

4.2. Результаты

Для надежности определения поведения транспортного коэффициента, на решетке вычисляется следующая наблюдаемая:

$$C_{\text{AME}}(T) = \frac{J_\epsilon(T, eB_5)}{eB_5 T^2}, \quad (4.16)$$

для этого достаточно рассчитать поток энергии J_ϵ для одного значения внешнего аксиального магнитного поля B_5 при определенном значении температуры T . На рис. 4.2 представлено поведение безразмерного коэффициента (4.16), как функции температуры T . Видно, что коэффициент проводимости $C_{\text{AME}}(T)$ быстро растет в области фазового перехода, и выходит на постоянное значение при $T \sim 500 \text{ МэВ}$ ($T \sim 1.5 T_c$ для калибровочной теории поля с группой $SU(2)$), что соответствует квадратичной зависимости проводимости $\sigma(T)$ при высоких температурах [16].

Оказывается, что температурная зависимость коэффициента C_{AME} может быть хорошо описана при $T > T_0$ следующей формулой [16]:

$$C_{\text{AME}}^{\text{fit}}(T) = C_{\text{AME}}^\infty \exp\left(-\frac{h T_0}{T - T_0}\right). \quad (4.17)$$

Соответственно, наилучший фит ($\chi^2/\text{d.o.f.} = 1.8$) показан пунктирной линией на рис. 4.2. Важно подчеркнуть, что наилучшее значение параметров

$$C_{\text{AME}}^\infty = 0.0097(2), \quad (4.18)$$

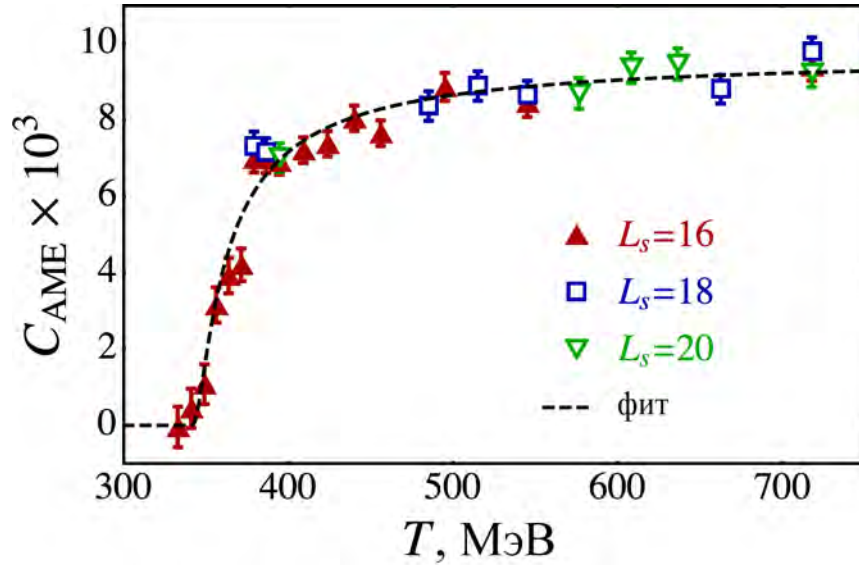


Рис. 4.2. Поведение безразмерного коэффициента (4.16) как функция температуры. Пунктирная линия соответствует наилучшему фиту функции (4.17).

$h = 0.055(7)$ и $T_0 = 339(2)$ МэВ соответствует коэффициенту проводимости аксиального магнитного эффекта $\sigma(T) = C_{AME}^\infty T^2$ в высокотемпературном пределе. Численное значение этой величины намного меньше, чем теоретические предсказания (4.5). Связать такую разницу в коэффициентах можно с непертурбативными эффектами глюонного взаимодействия, потому, что результаты, полученные при помощи решеточных симуляций свободных (невзаимодействующих) фермионов хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями [65], а это означает, что добавление глюонного поля сильно влияет на результаты расчетов.

На рис. 4.2 также демонстрируется независимость результатов к изменению объема решетки. Например, результаты при $T \approx 400$ МэВ $\approx 1.3T_c$ и $T \approx 720$ МэВ $\approx 2.37T_c$ остаются неизменными в пределах ошибок при изменении пространственного объема в диапазоне $V = (8 \dots 15)$ фм³ и $V = (1.3 \dots 2.6)$ фм³, соответственно. Причем, при моделировании аксиального магнитного эффекта в теории со свободными фермионами наблюдались большие поправки конечного объема [65]. Поток энергии оказался почти нечувствительным к изменению ультрафиолетового обрезания $\sim a^{-1}$ на решетке.

Итак, впервые было проведено исследование температурной зависимости аксиального магнитного эффекта в рамках решеточной КХД с калибровочной группой $SU(2)$ без учета кварковых петель. Получено, что поток энергии киральных фермионов вдоль направления аксиального магнитного поля отсутствует в фазе конфайнмента, в то время, как в фазе деконфайнмента поток пропорционален величине магнитного поля. Впервые получено, что транспортный коэффициент (σ_{AME}) резко растет в области перехода $T \sim T_c$ и достигает асимптотической зависимости $\sim T^2$ при высоких температурах $T > T_c$. Транспортный коэффициент оказался в 17 раз меньше коэффициента, предсказанного теорией разложения слабой связи. Это свидетельствует о существенном отличии взаимодействующей теории от свободной.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [16, 31, 33, 34].

Заключение

В настоящей диссертационной работе проводилось исследование свойств механизма конфайнмента, а именно исследование топологических объектов, таких как монополи и вихри. Исследования проводились в рамках решеточной глюодинамики с неабелевой калибровочной группой $SU(2)$. В качестве наблюдаемых впервые исследуются поверхностные операторы на разных типах поверхностей в разных фазах адронной материи. Вихри исследовались в рамках аксиального кирального вихревого эффекта, которое проводилось с помощью исследования транспортного коэффициента аксиального магнитного эффекта.

Путем численного моделирования показано, что изучаемый поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ (2.10) имеет параметризацию следующего вида:

$$\mathcal{W}^{(1)}(S, V) = \exp(-\sigma S - \gamma V),$$

где S – площадь замкнутой поверхности, V – объем, охватываемый поверхностью, σ, γ – поверхностный и объемный коэффициенты, соответственно. Показано, что зависимость от площади замкнутой поверхности является доминирующей в двух фазах адронной материи ($\gamma = 0$). Получено физическое значение поверхностного коэффициента $\sqrt{\sigma_{ph}} = 78(1)$ МэВ (σ_{ph} – поверхностная плотность хромомагнитных диполей, живущих на поверхности), и разложение поверхностного коэффициента σ через среднее значение плакетной переменной и корреляторов типа плакет-плакет.

Проведено исследование поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(2)}$ (2.15), предложена модель для физического толкования значения поверхностного коэффициента $\sigma_{ph} = 4\pi^2 \sigma_{dipole}$ в зависимости $\mathcal{W}^{(2)}(S) = \sigma S + const$. Получено значение квадратного корня поверхностной плотности хромомагнитных диполей $\sqrt{\sigma_{dipole}} = 17.4(3)$ МэВ.

Получена температурная зависимость поверхностного коэффициента в зависимости поверхностного оператора $\mathcal{W}^{(3)}$ (3.57) от площади замкнутой поверх-

ности. Вычисления проводились в максимально абелевой калибровке. Получено, что квадратный корень поверхностного коэффициента $\sqrt{\sigma}$ в зависимости $\mathcal{W}^{(3)}(S, V) = \sigma S + \gamma V + \delta$ при $T < T_c$ ведет себя как константа, а в высокотемпературной фазе при $T > T_c$ линейно возрастает с ростом температуры.

Впервые было проведено исследование температурной зависимости аксиального магнитного эффекта в рамках решеточной КХД с калибровочной группой $SU(2)$ без учета кварковых петель. Получено, что поток энергии киральных фермионов вдоль направления аксиального магнитного поля отсутствует в фазе конфайнмента, в то время, как в фазе деконфайнмента поток пропорционален величине магнитного поля. Впервые получено, что транспортный коэффициент (σ_{AME}) резко растет в области перехода $T \sim T_c$ и достигает асимптотической зависимости $\sim T^2$ при высоких температурах $T > T_c$.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Получено, что поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ зависит только от площади замкнутой поверхности и не зависит от объема в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$.
- Показано, что в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$ поверхностный оператор $\mathcal{W}^{(1)}$ определяется только решеточной обратной константой связи β и не зависит от температуры T . Получено, что поверхностный коэффициент σ в своем разложении имеет пертурбативный вклад $\sim 1/\beta$ и непертурбативный вклад $\sim a^2$.
- Получено значение поверхностной плотности хромагнитных диполей σ_{ph} : $\sqrt{\sigma_{ph}} = 78(1)$ МэВ в глюодинамике с калибровочной группой $SU(2)$.
- В рамках решеточной КХД с калибровочной группой $SU(2)$ без учета кварковых петель (quenched QCD) впервые получена температурная зависимость транспортного коэффициента проводимости аксиального магнитного эффекта (σ_{AME}).

- Получено, что транспортный коэффициент (σ_{AME}) резко растет в области перехода $T \sim T_c$ и достигает асимптотического поведения $\sim T^2$ при высоких температурах $T > T_c$ в фазе кварк-глюонной плазмы. В фазе конфайнмента АМЕ отсутствует.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя д.ф.-м.н. Александра Валентиновича Молочкова за постоянную помощь в работе, полезные советы и поддержку на протяжении всех этапов исследования. Автор признателен своему научному руководителю д.ф.-м.н. Виктору Валерьевичу Брагуге за помощь и активное обсуждение результатов по исследованию поверхностных операторов и АМЕ. Огромное спасибо Михаилу Игоревичу Поликарпову, начальнику решеточной группы ИТЭФ, за его прекрасное отношение к студентам, в числе которых был автор, когда впервые приехал в Москву в ИТЭФ. Автор благодарен М. И. Поликарпову за предоставленную тему исследования поверхностных операторов. Автор искренне признателен Виталию Геннадьевичу Борнякову и Валентину Ивановичу Захарову за конструктивную критику, идеи, полезные советы, которые сильно помогли автору при выполнении исследований. Автор выражает свою благодарность Виталию Геннадьевичу Борнякову и Олегу Кочеткову за предоставленные конфигурации калибровочных полей в максимально абелевой калибровке. Автор благодарен Павлу Васильевичу Буйвидовичу за ценные советы и активное обсуждение результатов, полученных при исследовании поверхностных операторов. Огромное спасибо Андрею Котову и Максиму Улыбышеву за активное участие в обсуждении результатов исследования АМЕ и предоставлении помощи в разработке кода для численных расчетов. Автор выражает свою признательность многим коллегам за ценные комментарии и полезные замечания, полученные во время обсуждений различных материалов исследования. Среди них Артем Бекжанов, Александр Николаев, Денис Бойда и Сергей Юрьев. Автор искренне признателен за помощь своим родителям Александру Александровичу и Юлии Викторовне, брату Владиславу за ценные замечания и помощь в написании работы, за внимательное прочтение всего текста диссертации. Автор признателен своей жене Марии и дочери Диане за поддержку, понимание и предоставлению «свободного времени».

Список литературы

1. Mandelstam S. II. Vortices and quark confinement in non-Abelian gauge theories // [Physics Reports](#). 1976. V. 23, no. 3. P. 245 – 249.
2. Hooft G. Magnetic monopoles in unified gauge theories // [Nuclear Physics B](#). 1974. V. 79, no. 2. P. 276 – 284.
3. Chernodub M. N., Polikarpov M. I. Abelian projections and monopoles. 1997. [arXiv:hep-th/9710205](#).
4. Abelev B. et al. Azimuthal Charged-Particle Correlations and Possible Local Strong Parity Violation // [Phys. Rev. Lett.](#) 2009. V. 103. 251601. [arXiv:nucl-ex/0909.1739](#).
5. Abelev B. et al. Charge separation relative to the reaction plane in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV // [Phys. Rev. Lett.](#) 2013. V. 110. 012301. [arXiv:nucl-ex/1207.0900](#).
6. Kharzeev D. E., McLerran L. D., Warringa H. J. The Effects of topological charge change in heavy ion collisions: 'Event by event P and CP violation' // [Nucl.Phys.](#) 2008. V. A803. P. 227–253. [arXiv:hep-ph/0711.0950](#).
7. Fukushima K., Kharzeev D. E., Warringa H. J. Chiral magnetic effect // [Phys. Rev. D](#). 2008. V. 78. 074033.
8. Zakharov V. I. [Chiral Magnetic Effect in Hydrodynamic Approximation](#) // [Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields](#) / Ed. by D. Kharzeev, K. Landsteiner, A. Schmitt, H.-U. Yee. Springer Berlin Heidelberg, 2013. V. 871 of [Lecture Notes in Physics](#). P. 295–330.
9. Vilenkin A. Equilibrium parity-violating current in a magnetic field // [Phys. Rev. D](#). 1980. V. 22. P. 3080–3084.
10. Vilenkin A. Quantum field theory at finite temperature in a rotating system // [Phys. Rev. D](#). 1980. V. 21. P. 2260–2269.
11. Landsteiner K., Megías E., Pena-Benitez F. Gravitational Anomaly and Transport Phenomena // [Phys. Rev. Lett.](#) 2011. V. 107. 021601.

12. Braguta V., Chernodub M. N., Landsteiner K. et al. Numerical evidence of the axial magnetic effect // [Phys. Rev. D](#). 2013. V. 88. 071501.
13. 't Hooft G. W. Topology of the gauge condition and new confinement phases in non-abelian gauge theories // [Nuclear Physics B](#). 1981. V. 190, no. 3. P. 455 – 478.
14. Curci G., Menotti P., Paffuti G. Symanzik's improved lagrangian for lattice gauge theory // [Physics Letters B](#). 1983. V. 130, no. 3–4. P. 205 – 208.
15. Symanzik K. [Some topics in quantum field theory](#) // *Mathematical Problems in Theoretical Physics* / Ed. by R. Schrader, R. Seiler, D. Uhlenbrock. Springer Berlin Heidelberg, 1982. V. 153 of *Lecture Notes in Physics*. P. 47 – 58.
16. Braguta V. V., Chernodub M. N., Goy V. A. et al. Temperature dependence of the axial magnetic effect in two-color quenched QCD // [Phys. Rev. D](#). 2014. V. 89. 074510. [arXiv:hep-lat/1401.8095](#).
17. Gukov S., Witten E. Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program. 2007. [arXiv:hep-th/0612073v2](#).
18. Gukov S., Witten E. Rigid Surface Operators // *Adv. Theor. Math. Phys.* 2010. V. 14. P. 87–178. [arXiv:hep-th/0804.1561](#).
19. Di Giacomo A., Zakharov V. I. Surface operators and magnetic degrees of freedom in Yang-Mills theories // [Phys. Atom. Nucl.](#) 2010. V. 73. P. 711 – 720. [arXiv:hep-th/0806.2938](#).
20. Drukker N., Gomis J., Matsuura S. Probing N=4 SYM With Surface Operators // [JHEP](#). 2008. V. 0810. 048. [arXiv:hep-th/0805.4199](#).
21. Di Giacomo A. Monopole condensation and color confinement // [Prog. Theor. Phys. Suppl.](#) 1998. V. 131. P. 161 – 188. [arXiv:hep-lat/9802008](#).
22. Chernodub M. N., Gubarev F. V., Polikarpov M. I., Veselov A. I. Monopoles in the Abelian projection of gluodynamics // [Prog. Theor. Phys. Suppl.](#) 1998. V. 131. P. 309 – 321. [arXiv:hep-lat/9802036](#).
23. Bornyakov V. G., Ilgenfritz E.-M., Muller-Preussker M. Universality check of Abelian monopoles // [Phys. Rev. D](#). 2005. V. 72. 054511.

- [arXiv:hep-lat/0507021](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0507021).
24. Banerjee N., Bhattacharya J., Bhattacharyya S. et al. Hydrodynamics from charged black branes // *JHEP*. 2011. V. 1101. 094. [arXiv:hep-th/0809.2596](https://arxiv.org/abs/hep-th/0809.2596).
 25. Alford M., Dimm W., Lepage G. P. et al. Lattice QCD on small computers // *Physics Letters B*. 1995. V. 361, no. 1–4. P. 87 – 94.
 26. Wilson K. G. Confinement of quarks // *Phys. Rev. D*. 1974. V. 10. P. 2445 – 2459.
 27. Neuberger H. Exactly massless quarks on the lattice // *Physics Letters B*. 1998. V. 417, no. 1–2. P. 141 – 144.
 28. Goy V., Molochkov A. Witten parameter in the SU(2)-gluodynamics // *PoS*. 2012. V. Baldin-ISHEPP-XXI. 025. 9 pages.
 29. Goy V., Molochkov A. Witten parameter in pure gauge SU(2) theory // *PoS*. 2012. V. ConfinementX. 313. 4 pages.
 30. Goy V. A., Molochkov A. V. Surface operator study in SU(2) gauge field theory // *PoS*. 2014. V. LATTICE2013. 359. 6 pages.
 31. Braguta V. V., Chernodub M. N., Goy V. A. et al. Study of axial magnetic effect // *PoS*. 2014. V. LATTICE2014. 359. 8 pages.
 32. Molochkov A., Goy V. A. Surface operator study in SU(2) gauge field theory // *PoS*. 2015. V. LATTICE2014. 360. 5 pages.
 33. Braguta V., Chernodub M., Goy V. et al. Axial magnetic effect in two-color quenched lattice QCD // *EPJ Web Conf*. 2015. V. 95. 03002. 6 pages.
 34. Braguta V., Chernodub M., Goy V. et al. Axial magnetic effect in two-color quenched lattice QCD // *Nucl. Part. Phys. Proc*. 2015. V. 258–259. P. 197–200.
 35. Гой В. А. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ «Реализация алгоритма multilevel для расчета поверхностных операторов» №2013611399. 2013.
 36. Noether E. Invariant variation problems // *Transport Theory and Statistical Physics*. 1971. V. 1. P. 186 – 207. [arXiv:physics/0503066](https://arxiv.org/abs/physics/0503066).
 37. Creutz M. Quarks, gluons and lattices. Cambridge Monographs on Math-

- emathical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. 169 p. ISBN: 0-521-31535-2.
38. Montvay I., Münster G. Quantum Fields on a Lattice / Ed. by P. V. Landshoff, D. R. Nelson, D. W. Sciama, S. Weinberg. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 491 p. ISBN: 0-521-40432-0.
39. Heinz J. R. Lattice Gauge Theories: An Introduction (Third Edition). New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005. V. 74 of World Scientific Lecture Notes in Physics. 608 p. ISBN: 981-256-062-9.
40. DeGrand T., DeTar C. Lattice methods for quantum chromodynamics. New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. 364 p. ISBN: 981-256-727-5.
41. Gattringer C., Lang C. B. [Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation](#) / Ed. by W. Beiglböck, J. Ehlers, K. Hepp, H. Weidenmüller. Berlin Heidelberg: Springer, 2010. V. 788 of Lect. Notes Phys. 343 p. ISBN: 978-3-642-01849-7.
42. Райдер Л. Квантовая теория поля: Пер. с англ. / Под ред. Р. А. Мир-Касимова, С. И. Азакова. Москва: Мир, 1987. 511 с.
43. Поляков А. М. Калибровочные поля и струны / Под ред. А. А. Белавин, М. Ю. Дашкевич, В. Г. Книжник. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 312 с. ISBN: 5-7029-0322-6.
44. Пескин М. Е., Шредер Д. В. Введение в квантовую теорию поля / Под ред. А. А. Белавин, А. В. Беркова. Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 784 с. ISBN: 5-93972-083-8.
45. Зи Э. Квантовая теория поля в двух словах / Под ред. И. В. Полюбин, В. Г. Войткевич, К. Ю. В. Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 632 с. ISBN: 978-5-93972-770-9.
46. Швингер Ю. С. Частицы, источники, поля (Том 1) / Под ред. А. М. Бродский, А. И. Наумов. Москва: Мир, 1973. 502 с.
47. Швингер Ю. С. Частицы, источники, поля (Том 2) / Под ред. А. М. Брод-

- ский, А. И. Наумов. Москва: Мир, 1976. 475 с.
48. Faddeev L. D., Popov V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field // [Physics Letters B](#). 1967. V. 25, no. 1. P. 29 – 30.
49. Di Renzo F., Onofri E., Marchesini G. Renormalons from eight loop expansion of the gluon condensate in lattice gauge theory // [Nucl. Phys.](#) 1995. V. B457. P. 202–218. [arXiv:hep-th/9502095](#).
50. Шапиро И. С. К истории открытия уравнений Максвелла // [Успехи физических наук](#). 1972. Т. 108, № 10. С. 319–333.
51. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Под ред. П. С. Кудрявцева, З. А. Цейтлина. Классики естествознания. Математика, механика, физика, астрономия. Москва: Гостехиздат, 1952. 685 с.
52. Dirac P. A. M. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field // [Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences](#). 1931. V. 133, no. 821. P. 60–72.
53. Weyl H. Elektron und Gravitation. I // [Zeitschrift für Physik](#). 1929. Vol. 56, no 5–6. P. 330–352.
54. Fock V. Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons // [Zeitschrift für Physik](#). 1929. Vol. 57, no 3–4. P. 261–277.
55. Fock V., Iwanenko D. Géometrie quantique linéaire et déplacement parallèle // [Compt. Rend. Acad Sci. Paris](#). 1929. V. 188. P. 1470–1472.
56. Sommerfeld A. Zur Quantentheorie der Spektrallinien // [Annalen der Physik](#). 1916. Vol. 356, no 17. P. 1–94.
57. Chernodub M. N., Polikarpov M. I., Veselov A. I. Confinement mechanism in various abelian projections of SU(2) lattice gluodynamics // [Physics Letters B](#). 1995. V. 342, no. 1 – 4. P. 303 – 310.
58. Bali G. S., Bornyakov V. G., Muller-Preussker M., Schilling K. Dual superconductor scenario of confinement: A Systematic study of Gribov copy effects // [Phys. Rev. D](#). 1996. V. 54. P. 2863–2875. [arXiv:hep-lat/9603012](#).

59. Bornyakov V. G., Kononenko A. G. Abelian monopoles in finite temperature lattice SU(2) gluodynamics: first study with improved action // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86. 074508. [arXiv:hep-lat/1111.0169](#).
60. Bornyakov V. G., Braguta V. V. Study of the thermal abelian monopoles with proper gauge fixing // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. 014502. [arXiv:hep-lat/1110.6308](#).
61. Maas A. More on Gribov copies and propagators in Landau-gauge Yang-Mills theory // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 79. 014505. [arXiv:hep-lat/0808.3047](#).
62. Bali G. S., Fingberg J., Heller U. M. et al. The Spatial string tension in the deconfined phase of the (3+1)-dimensional SU(2) gauge theory // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 71. P. 3059–3062. [arXiv:hep-lat/9306024](#).
63. Borgs C. Area Law for Spatial Wilson Loops in High Temperature Lattice Gauge Theories // *Nucl. Phys. B.* 1985. V. 261. 455.
64. Брагута В. В., Гой В. А., Ильгенфритц М. и др. Изучение фазовой диаграммы SU(2)-КХД с ненулевой киральностью // *Письма в ЖЭТФ.* 2014. Т. 100, № 9. С. 623–626.
65. Buividovich P. V. Anomalous transport with overlap fermions // *Nuclear Physics A.* 2014. V. 925, no. 0. P. 218 – 253.
66. Fingberg J., Heller U., Karsch F. Scaling and asymptotic scaling in the SU(2) gauge theory // *Nuclear Physics B.* 1993. V. 392, no. 2. P. 493 – 517.
67. Bowman P. O., Heller U. M., Leinweber D. B. et al. Unquenched quark propagator in Landau gauge // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. 054507.
68. Buividovich P. V., Chernodub M. N., Lushevskaya E. V., Polikarpov M. I. Numerical evidence of chiral magnetic effect in lattice gauge theory // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. 054503.
69. Buividovich P. V., Chernodub M. N., Kharzeev D. E. et al. Magnetic-Field-Induced Insulator-Conductor Transition in *SU(2)* Quenched Lattice Gauge Theory // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 105. 132001.
70. Bornyakov V. G., Ilgenfritz E.-M., Martemyanov B. V. et al. Calorons and dyons

at the thermal phase transition analyzed by overlap fermions // [Phys. Rev. D.](#)
2007. V. 76. 054505.