

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования “Дальневосточный федеральный университет”

На правах рукописи



Николаев Александр Александрович

**Исследование решеточной квантовой теории
поля с калибровочной группой $SU(2)$ при
ненулевой барионной плотности**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Молочков Александр Валентинович

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Брагута Виктор Валериевич

Владивосток – 2017

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Формулировка квантовой теории поля в рамках решеточной регуляризации	8
1.1. КТП в терминах функциональных интегралов	8
1.2. Фермионы Когута-Сасскинда	12
1.3. Введение барионного химического потенциала	18
Глава 2. Теоретические исследования фазовой диаграммы КХД	21
2.1. Сходства $SU(N_c)$ -теорий	22
2.2. Киральная теория возмущений для двухцветного КХД	23
Глава 3. Двухцветное КХД на решетке	35
Глава 4. Результаты	41
4.1. Фиксация масштаба и измерение массы пиона	42
4.2. Дикварковый конденсат	45
4.3. Барионная плотность	51
4.4. Киральный конденсат	55
4.5. Глюонные наблюдаемые	59
4.6. Результаты с улучшенным калибровочным действием	61
Заключение	66
Список литературы	69
Приложение А. Свободная барионная плотность для решеточной формулировки	78

Введение

Актуальность темы исследования. Исследование фазовой диаграммы КХД является крайне важным для космологии и астрофизики. В настоящее время в экспериментальной физике сформировалась самостоятельная область исследований состояния вещества, возникающего при столкновениях тяжелых ионов, которую нельзя напрямую отнести ни к ядерной физике, ни к физике высоких энергий. Данные эксперименты направлены на исследование структуры фазовой диаграммы КХД, хотя непосредственно фазовая диаграмма не учитывает неравновесных эффектов, возникающих в экспериментах. Тем не менее, такие характеризующие равновесное состояние величины как плотность энергии, уравнение состояния, транспортные коэффициенты кварк-глюонной плазмы и т.п. являются весьма востребованными в гидродинамических моделях, позволяющих более точно описать экспериментальную ситуацию.

Область фазовой диаграммы КХД, соответствующая большим температурам и малым значениям барионного химического потенциала, хорошо исследована в рамках экспериментов RHIC и LHC. Для данной области теоретическое описание из первых принципов может быть получено из решеточного КХД, в настоящее время описанный подход демонстрирует хорошее согласие с экспериментальными результатами [1, 2].

С другой стороны, область фазовой диаграммы КХД, соответствующая малым температурам и большим значениям барионного химического потенциала, остается до сих пор не исследованной. С 2010го года в RHIC проводится программа "Beam Energy Scan"(BES), ставящая своей целью исследование данной области. В настоящее время также ведется строительство новых экспериментальных центров: FAIR (Дармштадт, Германия) и NICA (Дубна, Россия), на которых планируется проводить эксперименты CBM, BM&N и MPD, направленные на изучение состояния материи при низких температурах и высоких плотностях (1 — 100 ядерных плотностей). Такое количество действующих и

готовящихся к запуску экспериментов ставит вопрос о создании адекватного теоретического описания адронной/кварковой материи при больших барионных плотностях.

К сожалению, в настоящее время отсутствуют методы, позволяющие из первых принципов моделировать КХД при ненулевой барионной плотности. В решеточном КХД при ненулевом действительном химическом потенциале возникает проблема знака: фермионный детерминант становится комплексным, что делает неприменимым метод выборки по значимости [3]. В качестве альтернативных методов для изучения фазовой диаграммы КХД используются эффективные теории: метод среднего поля, уравнения Дайсона-Швингера, теории при больших N_c и др.

Альтернативой решеточному моделированию КХД с калибровочной группой $SU(3)$ при ненулевом химическом потенциале является исследование КХД с калибровочной группой $SU(2)$ (двухцветного КХД) при $\mu_B \neq 0$. В силу особенностей группы $SU(2)$ в формулировке двухцветного КХД отсутствует вышеописанная проблема знака, что делает возможным исследование данной теории в решеточном подходе. Кроме того фазовая диаграмма двухцветного КХД похожа на фазовую диаграмму трехцветного КХД [4], что дает возможность получить важные качественные результаты.

Диссертация посвящена исследованию структуры фазовой диаграммы двухцветного КХД при помощи формализма КТП на решетке. Рассматривается теория с двумя ароматами динамических кварков и Вильсоновским калибровочным действием. Проводится изучение фазовых свойств двухцветного КХД при нулевой температуре и ненулевом барионном химическом потенциале, также представлены результаты при конечной температуре и ненулевом барионном химическом потенциале.

Цели и задачи диссертационной работы: Целью диссертационной работы является изучение фазовой диаграммы двухцветного КХД при помощи формализма квантовой теории поля на решетке.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- определены зависимости барионной плотности и дикваркового конденсата от барионного химического потенциала при нулевой температуре в двухцветном КХД на решетке;
- исследовано поведение кирального конденсата от барионного химического потенциала и затравочной массы кварков при нулевой температуре;
- исследована зависимость петли Полякова от барионного химического потенциала при нулевой и конечной температурах.

Научная новизна. В настоящей работе было впервые проведено численное исследование двухцветного КХД с двумя ароматами динамических кварков в рамках формализма КХД на решетке с фермионами Когута-Сасскинда. Впервые в результате численного моделирования были получены все три фазы, предсказанные в теоретических работах [5, 6] (в предыдущих работах [7–10] с $N_f = 4$ и $N_f = 8$ не было обнаружено фазы БКШ, а в работах [11–14] с $N_f = 2$ Вильсоновскими фермионами не было найдено БЭК-фазы). Впервые для случая $N_f = 2$ было исследовано восстановление киральной симметрии в БКШ-фазе в киральном пределе.

Теоретическая и практическая значимость. В представленной диссертационной работе изучается структура фазовой диаграммы двухцветного КХД при помощи формализма КТП на решетке. Диссертация носит теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для моделирования фазовых состояний адронной материи при экстремальных условиях. В частности, результаты могут быть проверены в экспериментах по столкновениям ядер тяжелых элементов при высоких энергиях (ЛНС, RHIC, FAIR, J-PARC, NICA) при исследовании кварк-глюонной плазмы.

Положения, выносимые на защиту:

- Показано, что при нулевой температуре для двухцветного КХД могут

существовать три фазы: адронная фаза при малых значениях μ_q ; фаза Бозе-Эйнштейновской конденсации скалярных дикварков при промежуточных значениях μ_q ($m_\pi/2 < \mu_q < \mu_d$); фаза конденсации кварковых куперовских пар при больших значениях барионного химического потенциала ($\mu_q > \mu_d$).

- В адронной и БЭК-фазах получено согласие с киральной теорией возмущений в лидирующем порядке для поведения дикваркового конденсата и барионной плотности. Для кирального конденсата показана недостаточность учета только лидирующего порядка.
- Впервые исследовано поведение кирального конденсата в пределе нулевой массы при конечной барионной плотности. Показано, что в БКШ-фазе происходит восстановление киральной симметрии.
- Показано, что при конечной температуре по мере увеличения химического потенциала система переходит в состояние деконфайнмента.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность выводов обеспечена надежностью применявшихся методов и подтверждается результатами апробации работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях:

1. 15th International Conference on Strangeness in Quark Matter – SQM 2015,
2. The 33rd International Symposium on Lattice Field Theory – LATTICE 2015,
3. XXV International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions – Quark Matter 2015,
4. The 34th International Symposium on Lattice Field Theory – LATTICE 2016,
5. The 14th International workshop on QCD in eXtreme conditions,

6. XII International Conference “Quark Confinement and the Hadron Spectrum”,

а так же на научных семинарах лаборатории решеточных калибровочных теорий ИТЭФ (г. Москва), кафедры теоретической и ядерной физики ШЕН ДВФУ (г. Владивосток).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых научных изданиях [15, 16], 2 статьи в сборниках трудов конференций [17, 18].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав основного текста, заключения, благодарностей, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации составляет 80 страниц, включая 20 рисунков и 1 таблицу. Список литературы включает 97 наименования на 8 страницах.

Глава 1

Формулировка квантовой теории поля в рамках решеточной регуляризации

1.1. КТП в терминах функциональных интегралов

В формализме функциональных интегралов после перехода к Евклидовому времени статистическая сумма системы имеет следующий вид:

$$Z = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi e^{-S_F[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] - S_G[A_\mu]}, \quad (1.1)$$

где функциональное интегрирование выполняется по неабелевым калибровочным полям $A_\mu \in su(N_c)$ и фермионным полям $\bar{\psi}$, ψ , S_F представляет собой фермионное действие в Евклидовом времени и выглядит как (индекс аромата у фермионных полей опущен)

$$S_F[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \int d^4x \bar{\psi}_x (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi_x, \quad (1.2)$$

где введено обозначение ковариантной производной $D_\mu = \partial_\mu + igA_{x,\mu}$. Калибровочное действие имеет вид

$$S_G[A_\mu] = \frac{1}{2} \int d^4x Tr (G_{x,\mu\nu} G_{x,\mu\nu}), \quad (1.3)$$

где

$$G_{x,\mu\nu} = -\frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_{x,\nu} - \partial_\nu A_{x,\mu} + ig [A_{x,\mu}, A_{x,\nu}] \quad (1.4)$$

представляет собой тензор напряженности глюонного поля. В определениях (1.2) и (1.3) действия являются калибровочно инвариантными, а их плотности определены локально. Необходимо по возможности сохранить данные свойства при переходе к решеточной регуляризации.

Следует заострить внимание на том, что γ -матрицы в действии (1.2) определены для пространства R^4 и подчиняются алгебре ($\mu, \nu = 1 \dots 4$):

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Необходимые γ -матрицы в Евклидовом пространстве легко получить из соответствующих γ -матриц в пространстве Минковского (обозначены индексом M) в любом представлении:

$$\gamma_j = -i\gamma_j^M, \quad \gamma_4 = \gamma_0^M. \quad (1.6)$$

В остальном γ -матрицы (1.6) обладают теми же свойствами: $\gamma_\mu^2 = 1$, $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$. Матрица γ_5 определяется как

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad (1.7)$$

и антикоммутирует с остальными γ_μ .

В случае решеточной регуляризации непрерывное пространство R^4 заменяется дискретным набором точек (узлов решетки):

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \\ n_1, n_2, n_3 &= 0, \dots, N_s - 1; n_4 = 0, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

расстояние между которыми считается равным шагу решетки a . Естественно считать фермионные поля расположенными в узлах решетки, но возникает проблема с тем, как в случае вышеописанной дискретизации ввести аналог ковариантной производной. Для ответа необходимо сначала рассмотреть свободное фермионное действие и ввести дискретную производную, которая в наиболее простом симметричном варианте выглядит как:

$$\partial_\mu \psi_x \rightarrow \frac{1}{2a} (\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}}). \quad (1.8)$$

Благодаря (1.8) фермионное действие на решетке для свободного случая примет вид:

$$S_F^{free}[\bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_n \bar{\psi}_n \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu (\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}}) + m\psi_n \right). \quad (1.9)$$

Если провести калибровочное преобразование для фермионных полей:

$$\psi'_n = \Omega_n \psi_n, \quad \bar{\psi}'_n = \bar{\psi}_n \Omega_n^\dagger, \quad (1.10)$$

то в (1.9) появятся билинейные формы вида $\bar{\psi}_n \Omega_n^\dagger \Omega_{n+\hat{\mu}} \psi_{n+\hat{\mu}}$. Чтобы (1.9) стало калибровочно инвариантным, следует ввести расположенные на ребрах решетки матрицы $U_{n,\mu} \in SU(N_c)$, которые калибровочно преобразуются как

$$U'_{n,\mu} = \Omega_n U_{n,\mu} \Omega_{n+\hat{\mu}}^\dagger, \quad (1.11)$$

и переписать действие в следующем виде:

$$S_F[\bar{\psi}, \psi, U] = a^4 \sum_n \bar{\psi}_n \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \left(U_{n,\mu} \psi_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}} \right) + m \psi_n \right). \quad (1.12)$$

Легко видеть, что действие (1.12) является калибровочно инвариантным. Преобразованиям (1.11) в непрерывной теории удовлетворяет P -экспонента [19]: $G(x, y) = P \text{Exp} \left[ig \int_{C_{xy}} ds_\mu A_\mu \right]$, которая в случае решеточной регуляризации при $a \rightarrow 0$ может быть записана в виде

$$U_{n,\mu} = e^{igaA_{n,\mu}}. \quad (1.13)$$

Соответственно, действие (1.12) с учетом определения (1.13) в пределе стремящегося к нулю шага решетки переходит в (1.2).

Обратимся теперь к калибровочному действию (1.3). С учетом (1.13) и (1.11) становится очевидным, что калибровочное действие в решеточной формулировке должно состоять из замкнутых контуров, чтобы удовлетворять требованию калибровочной инвариантности. Наименьшим замкнутым контуром при данной дискретизации является грань:

$$U_{n,\mu\nu} = U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\mu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger. \quad (1.14)$$

В пределе $a \rightarrow 0$ грань принимает вид $U_{n,\mu\nu} = \text{Exp} \left[ia^2 g G_{n,\mu\nu} + O(a^3) \right]$, благодаря чему калибровочное действие в решеточной формулировке можно записать как

$$S_G[U] = \frac{2}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \text{Re} [Tr (I - U_{n,\mu\nu})] \rightarrow \frac{a^4}{2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} Tr (G_{n,\mu\nu} G_{n,\mu\nu}) + O(a^6), \quad (1.15)$$

что соответствует исходному выражению (1.3). Решеточное калибровочное действие (1.15) называют действием Вильсона [20], его принято записывать также в форме

$$S_G[U] = \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu} \operatorname{Re} \left[1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Tr} (U_{n,\mu\nu}) \right], \quad (1.16)$$

где $\beta = (2N_c)/g^2$, обратная константа связи.

В итоге статистическая сумма (1.1) в рамках решеточной регуляризации принимает вид

$$Z = \int DUD\bar{\psi}D\psi e^{-S_F[\bar{\psi},\psi,U] - S_G[U]}, \quad (1.17)$$

где для калибровочных полей проводится функциональное интегрирование по групповому многообразию. В случае групп $SU(N_c)$ групповое многообразие является компактным и конечным, благодаря чему в (1.17) не возникает расходимостей, а специальной фиксации калибровки не требуется. Что касается фермионного действия в (1.17), то вариант (1.12) представляет собой далеко не оптимальную форму, возможны разные варианты дискретизации оператора Дирака на пространственно-временной решетке, но как правило фермионная часть действия является билинейной формой по фермионным полям:

$$S_F[\bar{\psi}, \psi, U] = a^4 \sum_{n,m} \bar{\psi}_n M_{n,m}(U) \psi_m. \quad (1.18)$$

В таком случае в (1.17) можно аналитически провести функциональное интегрирование по фермионным полям [21], что приведет нас к финальному виду статистической суммы:

$$Z = \int DU \det M(U) e^{-S_G[U]}. \quad (1.19)$$

Выражение (1.19) накладывает ряд ограничений на решеточную формулировку оператора Дирака: его детерминант должен быть действительным и положительным, в противном случае применение методов выборки по значимости для численной оценки физическим наблюдаемых становится невозможным.

С другой стороны, если оператор Дирака обладает γ_5 -эрмитовостью:

$$M^\dagger = \gamma_5 M \gamma_5, \quad (1.20)$$

то такое свойство уже гарантирует действительность детерминанта:

$$\det M = \det (\gamma_5 M \gamma_5) = \det M^\dagger = (\det M)^*. \quad (1.21)$$

Подробное доказательство свойств фермионного детерминанта зависит от конкретной формулировки действия в решеточной регуляризации.

1.2. Фермионы Когута-Сасскинда

Наивная дискретизация оператора Дирака (1.12) обладает следующим решеточным артефактом: в фермионном пропагаторе возникает 16 равноправных полюсов вместо одного. Чтобы увидеть данную особенность, рассмотрим Фурье-образ от оператора Дирака (1.9) (p_μ ниже понимается в решеточных единицах):

$$\begin{aligned} D_{pp'} &= \frac{1}{N_s^3 N_t} \sum_{n,m} M_{nm} e^{-i(pn-p'm)} \\ &= \frac{1}{N_s^3 N_t} \sum_n e^{-i(p-p')n} \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{e^{ip'_\mu} - e^{-ip'_\mu}}{2a} + m \right) = D(p) \delta_{p-p'}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$D(p) = m + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(p_\mu). \quad (1.23)$$

Теперь, оператор (1.23) необходимо обратить для получения кваркового пропагатора в решеточной формулировке:

$$G(p) = D^{-1}(p) = \frac{m - ia^{-1} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(p_\mu)}{m^2 + a^{-2} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2(p_\mu)}. \quad (1.24)$$

Легко заметить, что пропагатор (1.24) дает корректный непрерывный предел: поскольку $p_\mu = p_\mu a$, то при $a \rightarrow 0$ получаем $G(p) = (m - i \sum_\mu \gamma_\mu p_\mu) / (m^2 + p^2)$.

Однако, при конечном шаге решетки полюсы кваркового пропагатора определяются не из уравнения $m^2 + p^2 = 0$, а из уравнения

$$m^2 + a^{-2} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2(p_\mu) = 0, \quad (1.25)$$

что дает дополнительные нефизические полюсы. В киральном пределе ($m = 0$) получается 16 полюсов вида $p_\mu = \pi n_\mu$, $n_\mu = 0, 1$, соответствующих углам первой зоны Бриллюэна. Таким образом, на решетке при наивной дискретизации фермионного действия помимо исходного кварка возникают 15 дополнительных ароматов, называемых дублями, которые в случае взаимодействующей теории могут приводить к некорректным физическим результатам.

Для борьбы с описанным выше артефактным вырождением используются различные улучшенные формулировки оператора Дирака на решетке, такие как Вильсоновские фермионы [22], фермионы Когута-Сасскинда [23], overlap-фермионы [24] и т.д. В данной работе вычисления проводились с фермионным оператором в формулировке Когута-Сасскинда.

Основная идея фермионов Когута-Сасскинда состоит в том, чтобы специальным преобразованием фермионных полей уменьшить число искусственных дублей. Рассмотрим следующее преобразование (его также называют преобразованием Когута-Сасскинда), позволяющее диагонализировать действие по Дираковским индексам:

$$\psi_n = \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3} \gamma_4^{n_4} \chi_n, \quad \bar{\psi}_n = \bar{\chi}_n \gamma_4^{n_4} \gamma_3^{n_3} \gamma_2^{n_2} \gamma_1^{n_1}, \quad (1.26)$$

где под n_i , как и раньше, понимаются координаты узла решетки по отдельным направлениям: $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$. Преобразование (1.26) замешивает Дираковские и пространственные индексы, распределяя фермионные степени свободы в узле по гиперкубу.

Рассмотрим теперь, как описанная выше трансформация отразится на действии (1.9). Очевидно, что массовый член не изменится по форме, поскольку $\gamma_\mu^2 = 1$. Что касается кинетического члена, то из-за сдвига поля $\psi_{n\pm\hat{\mu}}$ на один

узел относительно поля $\bar{\psi}_n$ получим следующее:

$$\bar{\psi}_n \gamma_\mu \psi_{n\pm\hat{\mu}} = \eta_{n,\mu} \bar{\chi}_n \bar{\chi}_{n\pm\hat{\mu}}. \quad (1.27)$$

Функции $\eta_{n,\mu}$ называются знаковыми факторами и имеют вид:

$$\begin{aligned} \eta_{n,1} &= 1, \\ \eta_{n,2} &= (-1)^{n_1}, \\ \eta_{n,3} &= (-1)^{n_1+n_2}, \\ \eta_{n,4} &= (-1)^{n_1+n_2+n_3}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Соответственно, действие (1.9) после преобразования (1.26) будет выглядеть как

$$S_F^{free}[\bar{\chi}, \chi] = a^4 \sum_n \bar{\chi}_n \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \eta_{n,\mu} (\chi_{n+\hat{\mu}} - \chi_{n-\hat{\mu}}) + m\chi_n \right). \quad (1.29)$$

Введение в фермионное действие калибровочных полей проводится из тех же соображений, что и при наивной дискретизации:

$$S_F^{(stag)}[\bar{\chi}, \chi, U] = a^4 \sum_n \bar{\chi}_n \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \eta_{n,\mu} \left(U_{n,\mu} \chi_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger \chi_{n-\hat{\mu}} \right) + m\chi_n \right). \quad (1.30)$$

Легко видеть, что действие (1.30) диагонально по Дираковским индексам, но на калибровочной инвариантности данный факт никак не отражается. Можно оставить только один из четырех одинаковых вкладов в действие, соответствующих различным Дираковским компонентам, тогда фермионные поля χ и $\bar{\chi}$ будут обладать только цветовым и координатным индексами, а вместо 16 идентичных копий фермионов мы получим только 4 за счет отказа от спинорной структуры полей. Ниже будет показано, что в непрерывном пределе правильная спинорная структура восстанавливается. Фермионное действие (1.30) называется действием Когута-Сасскинда.

Обратимся теперь к непрерывному пределу фермионов Когута-Сасскинда. Прежде всего следует сконструировать преобразование, обратное (1.26), кото-

рое будет восстанавливать спинорную структуру, собирая воедино степени свободы с узлов гиперкуба. Пусть для определенности число узлов по каждому из четырех направлений четно, обозначим его за N_μ . Разобьем всю решетку на гиперкубы размером 2×2 , тогда координата узла примет следующий вид ($\mu = 1 \dots 4$):

$$n_\mu = 2h_\mu + s_\mu, \quad (1.31)$$

где h_μ — координаты гиперкуба ($h_\mu = 0 \dots N_\mu/2 - 1$), а $s_\mu = 0, 1$. За счет того, что координаты гиперкубов входят в координаты узлов с коэффициентом 2, множители (1.28) не будут зависеть от h_μ , то есть $\eta_{n,\mu} = \eta_{s,\mu}$. Теперь введем 4×4 -матрицы $\Gamma^{(s)}$:

$$\Gamma^{(s)} = \gamma_1^{s_1} \gamma_2^{s_2} \gamma_3^{s_3} \gamma_4^{s_4}, \quad (1.32)$$

которые обладают следующими свойствами ортогональности и полноты:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr} \left(\Gamma^{(s)\dagger} \Gamma^{(s')} \right) &= \delta_{s,s'}, \\ \frac{1}{4} \sum_s \Gamma_{ba}^{(s)*} \Gamma_{b'a'}^{(s)} &= \delta_{a,a'} \delta_{b,b'}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Для выполнения обратного преобразования Когута-Сасскинда определим на гиперкубах фермионные поля $q_{h,ab}$, обладающие матричной структурой:

$$\begin{aligned} q_{h,ab} &= \frac{1}{8} \sum_s \Gamma_{ab}^{(s)} \chi_{2h+s}, \\ \bar{q}_{h,ba} &= \frac{1}{8} \sum_s \bar{\chi}_{2h+s} \Gamma_{ba}^{(s)*}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Используя первое из свойств (1.33), можно выразить $\bar{\chi}$, χ через \bar{q} , q :

$$\begin{aligned} \chi_{2h+s} &= 2 \text{Tr} \left(\Gamma^{(s)\dagger} q_h \right), \\ \bar{\chi}_{2h+s} &= 2 \text{Tr} \left(\bar{q}_h \Gamma^{(s)} \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы выразить фермионные поля в действии (1.29) через \bar{q} и q , а затем соотнести компоненты последних полей с Дираковскими

спинорами $\bar{\psi}$, ψ . Массовый член не вызывает затруднений:

$$\begin{aligned} ma^4 \sum_n \bar{\chi}_n \chi_n &= ma^4 \sum_{h,s} \bar{\chi}_{2h+s} \chi_{2h+s} = 4ma^4 \sum_{h,s} \bar{q}_{h,ba} \Gamma_{ab}^{(s)} \Gamma_{b'a'}^{(s)\dagger} q_{h,a'b'} \\ &= m(2a)^4 \sum_h Tr(\bar{q}_h q_h) . \end{aligned} \quad (1.36)$$

Кинетический член расписать не так просто, поскольку в него входят поля из разных гиперкубов. Из определения (1.32) можно заметить, что $\Gamma^{(s\pm\hat{\mu})} = \eta_{s,\mu} \gamma_\mu \Gamma^{(s)}$, и получить следующее:

$$\chi_{2h+s+\hat{\mu}} = 2\eta_{s,\mu} Tr\left(\Gamma^{(s)\dagger} \gamma_\mu (q_h \delta_{s_\mu,0} + q_{h+\hat{\mu}} \delta_{s_\mu,1})\right) . \quad (1.37)$$

Тогда кинетический член примет вид

$$4a^4 \sum_h \frac{1}{2a} \sum_s Tr\left(\bar{q}_h \Gamma^{(s)}\right) Tr\left(\Gamma^{(s)\dagger} \gamma_\mu (q_h \delta_{s_\mu,0} + q_{h+\hat{\mu}} \delta_{s_\mu,1}) - q_{h-\hat{\mu}} \delta_{s_\mu,0} - q_h \delta_{s_\mu,1}\right) \quad (1.38)$$

Однако, поскольку во втором следе $\Gamma^{(s)\dagger}$ скомбинирована с множителями, зависящими от s , использовать условие полноты нельзя. Здесь следует прибегнуть к следующему трюку: за счет периодических граничных условий \sum_n в действии можно записать, сдвинув все узлы на $\hat{\mu}$, тогда в выражении (1.38) индексы $s_\mu = 0, 1$ поменяются местами. Записав кинетический член как среднее обычной и сдвинутой на μ сумм по всем узлам решетки, можно использовать второе из свойств (1.33), что даст

$$S_{kin}[\bar{q}, q] = (2a)^4 \sum_h \sum_\mu \left(Tr(\bar{q}_h \gamma_\mu \nabla_\mu q_h) - a Tr(\bar{q}_h \gamma_5 \Delta_\mu q_h \gamma_\mu \gamma_5) \right) , \quad (1.39)$$

где для краткости записи были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu q_h &= \frac{1}{4a} (q_{h+\hat{\mu}} - q_{h-\hat{\mu}}) , \\ \Delta_\mu q_h &= \frac{1}{(2a)^2} (q_{h+\hat{\mu}} - 2q_h + q_{h-\hat{\mu}}) , \end{aligned} \quad (1.40)$$

имеющие смысл первой и второй производной, соответственно. Действие в полной записи выглядит следующим образом:

$$S_F^{free}[\bar{q}, q] = (2a)^4 \sum_h \left(m Tr(\bar{q}_h q_h) + \sum_\mu Tr(\bar{q}_h \gamma_\mu \nabla_\mu q_h) - a \sum_\mu Tr(\bar{q}_h \gamma_5 \Delta_\mu q_h \gamma_\mu \gamma_5) \right) . \quad (1.41)$$

Теперь, исходя из вида действия (1.41), можно соотнести индексы полей \bar{q} , q с Дираковскими спинорами как $a \equiv \alpha$ и $b \equiv (f)$, то есть:

$$q_{h,ab} = \psi^{\alpha(f)}, \quad \bar{q}_{h,ba} = \bar{\psi}_h^{(f)\alpha}, \quad (1.42)$$

где индекс (f) соответствует ароматам, а индекс α — спинорной структуре. В таком случае

$$\begin{aligned} S_F^{free}[\bar{\psi}, \psi] &= (2a)^4 \sum_h \left(m \bar{\psi}_h^{(f)\alpha} (I \times I) \psi_h^{\alpha'(f')} + \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}_h^{(f)\alpha} (\gamma_\mu \times I) \nabla_\mu \psi_h^{\alpha'(f')} \right. \\ &\quad \left. - a \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}_h^{(f)\alpha} (\gamma_5 \times \tau_5 \tau_\mu) \Delta_\mu \psi_h^{\alpha'(f')} \right), \end{aligned} \quad (1.43)$$

где в прямых произведениях матриц вида $(A \times B)$ первая матрица действует в пространстве Дирака (индексы α, α'), а вторая — в пространстве ароматов (индексы $(f), (f')$), матрицы $\tau_\mu = \gamma_\mu^T$ ($\mu = 1 \dots 5$). Прежде всего видно, что в пределе $a \rightarrow 0$ действие (1.43) переходит в обычное фермионное действие (1.2) для свободного случая, но с числом фермионных ароматов, вчетверо превышающим исходное значение. Данная особенность является артефактом, число ароматов можно регулировать, извлекая корень нужной степени $(1/4, 1/2)$ из фермионного детерминанта в статистической сумме.

Действие (1.43) в киральном пределе обладает глобальной симметрией $U(4) \times U(4)$, но при ненулевом шаге решетки третий член в (1.43) нарушает её до $U(1)_o \times U(1)_e$, где $o(e)$ обозначают нечетные (четные) узлы. Соответственно, вместо проекторов $(I \pm \gamma_5)/2$ будем иметь

$$P_{e(o)} = (I \times I \pm \gamma_5 \times \tau_5) / 2, \quad (1.44)$$

тогда произвольное $U(1)_o \times U(1)_e$ -преобразование будет выглядеть как

$$\begin{aligned} \psi'_h &= (U_o P_o + U_e P_e) \psi_h, \\ \bar{\psi}'_h &= \bar{\psi}_h (P_o U_e^\dagger + P_e U_o^\dagger). \end{aligned} \quad (1.45)$$

1.3. Введение барионного химического потенциала

В непрерывное действие (1.2) можно ввести член $\mu_q \bar{\psi}_x \gamma_4 \psi_x$, отвечающий плотности кварков, сопряженной с кварковым химическим потенциалом. Однако, такой непосредственный введения химического потенциала приводит к расходимостям в решеточной формулировке. Рассмотрим для примера плотность энергии системы в свободном случае:

$$\epsilon(\mu_q) = -\frac{1}{L_s^3} \frac{\partial}{\partial(1/T)} \ln Z = -\frac{1}{(N_s a_s)^3} \frac{\partial}{\partial(N_t a_t)} \ln \det M, \quad (1.46)$$

где для удобства явно обозначены шаги решетки по пространству и по времени, a_s и a_t , соответственно. При дискретизации (1.9) оператор Дирака с учетом барионной плотности выглядит как

$$M_{nm} = \frac{1}{2a_s} \sum_{j=1}^3 \gamma_j \left(\delta_{n+\hat{j},m} - \delta_{n-\hat{j},m} \right) + \frac{1}{2a_t} \gamma_4 \left(\delta_{n+\hat{4},m} - \delta_{n-\hat{4},m} \right) + m \delta_{nm} + \mu_q \gamma_4 \delta_{nm}. \quad (1.47)$$

Для вычисления выражения (1.46) перейдем в импульсное представление оператора Дирака:

$$M_{nm} = \frac{1}{N_s^3 N_t} \sum_{p,q} D(p) e^{i(np-mq)}, \quad (1.48)$$

где

$$D(p) = \frac{i}{a_s} \sum_{j=1}^3 \gamma_j \sin(a_s p_j) + \frac{i}{a_t} \gamma_4 \sin(a_t p_4) + m + \mu_q \gamma_4. \quad (1.49)$$

Таким образом, для $\ln \det M$ получаем следующее (след берется по Дираковским индексам):

$$\ln \det M = \sum_p \ln \det D(p) = \sum_p \ln e^{\text{Tr}(\ln D(p))} = \sum_p \text{Tr}(\ln D(p)). \quad (1.50)$$

Соответственно, выражение (1.46) с учетом (1.50) принимает вид

$$\begin{aligned} \epsilon(\mu_q) &= -\frac{1}{(N_s a_s)^3 N_t} \sum_p \text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial a_t} \ln D(p) \right) = \frac{4}{a_t a_s^3} - \\ &- \frac{1}{(N_s a_s)^3 N_t a_t} \sum_p \text{Tr} \left(\left(m + \mu_q \gamma_4 + \frac{i}{a_s} \sum_{j=1}^3 \gamma_j \sin(a_s p_j) + i p_4 \gamma_4 \cos(a_t p_4) \right) / D(p) \right). \end{aligned} \quad (1.51)$$

После взятия следа и возвращения к обозначениям $a_s = a_t = a$ получаем

$$\epsilon(\mu_q) = \frac{4}{a^4} - \frac{1}{N_s^3 N_t a^4} \sum_p \frac{(ma)^2 + \sum_{j=1}^3 \sin^2(p_j a)}{(ma)^2 + (\sin(p_4 a) - im_q a)^2 + \sum_{j=1}^3 \sin^2(p_j a)}. \quad (1.52)$$

Выражение (1.52) представляет собой плотность энергии для свободного случая в решеточной формулировке. При переходе к непрерывному пределу следует сначала рассмотреть $N_s, N_t \rightarrow \infty$, заменив суммирование по импульсам интегрированием:

$$\frac{1}{N_s^3 N_t a^4} \sum_{p_1, p_2, p_3=0}^{N_s-1} \sum_{p_4=0}^{N_t-1} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d^4 p, \quad (1.53)$$

а затем взять $a \rightarrow 0$. Первый константный член в (1.52) не приводит к проблемам, поскольку в физических случаях вычисляется разность термодинамических величин, например, $\epsilon(\mu_q) - \epsilon(\mu_q = 0)$. Что касается основного выражения, то при взятии интеграла по p_4 возникает вклад $\propto (\mu_q/a)^2$, который приводит к расходимости в пределе $a \rightarrow 0$ (впервые данный результат был получен в [26]). Таким образом, “наивное” введение химического потенциала через дополнительное токовое слагаемое в фермионном действии не годится для решеточной формулировки теории, поскольку приводит к неправильным результатам в непрерывном пределе.

Решение состоит в том, чтобы рассматривать μ_q по аналогии с внешним полем, поскольку ненулевая барионная плотность соответствует нарушению глобальной симметрии $U(1)_V$. Калибровочные поля внедряются в решеточную формулировку путем экспоненцирования (1.13), аналогично можно поступить с химическим потенциалом:

$$\begin{aligned} S_F^{(free)} &= a^3 \sum_n \left(ma \bar{\psi}_n \psi_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\bar{\psi}_n \gamma_j \psi_{n+\hat{j}} - \bar{\psi}_{n+\hat{j}} \gamma_j \psi_n \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(e^{\mu_q a} \bar{\psi}_n \gamma_4 \psi_{n+\hat{4}} - e^{-\mu_q a} \bar{\psi}_{n+\hat{4}} \gamma_4 \psi_n \right) \right). \end{aligned} \quad (1.54)$$

В пределе $a \rightarrow 0$ последний член в действии (1.54) переходит в стандартное выражение для кварковой плотности, $\mu_q \sum_x \bar{\psi}_x \gamma_4 \psi_x$. При расчете плотности энер-

гии для выражения (1.54) в итоге в формуле (1.52) в знаменателе возникает не $(\sin(p_4 a) - im_q a)^2$, а $\sin^2(p_4 a - im_q a)$, что приводит к корректному результату в непрерывном пределе.

При ненулевом химическом потенциале оператор Дирака теряет γ_5 -эрмитовость в исходном виде, но можно записать аналогичное свойство:

$$\gamma_5 M(\mu_q) \gamma_5 = M^\dagger(-\mu_q^*). \quad (1.55)$$

Очевидно, что при действительном химическом потенциале $\det M$ уже не является действительным, то есть стандартные методы выборки по значимости для вычисления (1.19) не могут быть применены. В некоторых случаях типа чисто мнимого μ_q [27–30], изоспинового химического потенциала [31–33] или КХД с калибровочной группой $SU(2)$ при действительном μ_q фермионный детерминант действителен и положительно определен при конечной массе кварков, но для полноценного КХД вычисления в решеточной формулировке при действительном химическом потенциале в настоящее время невозможны (“проблема знака”) [3].

Теоретические исследования фазовой диаграммы КХД

Первые представления о фазовой диаграмме квантовой хромодинамики начали формироваться во второй половине 1970-х годов [34, 35], постепенно усложняясь с течением времени (исторический обзор становления теоретических представлений приведен в [36]). В современном представлении фазовая диаграмма КХД выглядит следующим образом [37] (см. рисунок 2.1): при низких температурах и низких плотностях материя находится в адронной фазе, при высоких температурах — в фазе кварк-глюонной плазмы, при низких температурах и высоких плотностях возможен переход в фазу цветовой сверхпроводимости [38, 39].

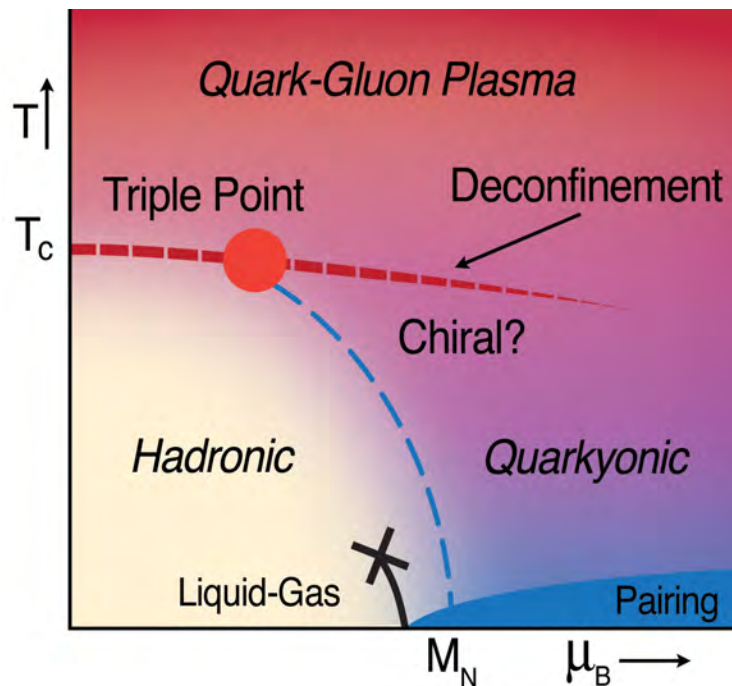


Рис. 2.1. Фазовая диаграмма КХД в современном представлении (рисунок из работы [37]).

Для теоретического исследования фазовой диаграммы КХД в плоскости (T, μ_q) использовались следующие подходы: теория среднего поля [40], уравне-

ния Дайсона-Швингера [41], исследование $SU(N_c)$ -теорий при больших N_c [4, 42], пертурбативное КХД [43], решеточное моделирование КХД с изоспиновым химическим потенциалом [31–33, 44, 45] и другие. В решеточном КХД в настоящее время получены результаты при $\mu_q = 0$ для различных температур, хорошо согласующиеся с экспериментом [1, 2], но моделирование при конечной барионной плотности невозможно (см. раздел 1.3).

Соответственно, можно рассмотреть более простую теорию, КХД с калибровочной группой $SU(2)$, для которой проблемы знака не возникает (см. главу 3), и провести вычисления в рамках решеточного моделирования, чтобы получить результаты из первых принципов. Полученные результаты позволят сделать качественные оценки для фазовой диаграммы $SU(3)$ -КХД, поскольку у $SU(N_c)$ -теорий есть ряд общих свойств.

2.1. Сходства $SU(N_c)$ -теорий

Некоторые величины (адронный спектр, топологическая восприимчивость, следовая аномалия), нормированные соответствующим образом, оказываются довольно близкими по значениями в $SU(N_c)$ -теориях с различным N_c , особенно при больших N_c [46]. Для $SU(2)$ - и $SU(3)$ -глюодинамики такие величины, как топологическая восприимчивость и критическая температура фазового перехода “конфайнмент-деконфайнмент”, нормированные на $\sqrt{\sigma}$, практически одинаковы [47, 48]. Если сравнить отношение сдвиговой вязкости к плотности энтропии для $SU(2)$ - и $SU(3)$ -теорий [49, 50], то значения будут совпадать в пределах ошибок. Далее, в работе [51] было проведено вычисление адронного спектра для $SU(N_c)$ -теорий с двумя динамическими кварками, некоторые безразмерные величины, например, отношение масс π - и ρ -мезонов, оказываются весьма близкими при $N_c = 2 \dots 5$. Наконец, в работе [52] были вычислены термодинамические величины для $SU(N_c)$ -глюодинамики с $N_c = 2 \dots 6$, результаты для следовой аномалии при различных N_c , нормированной на $N_c^2 - 1$, хорошо совпадают.

Также следует отметить работу [42], где рассматривалась фазовая диаграмма $SU(N_c)$ -теорий в пределе $N_c \rightarrow \infty$ и при $T \rightarrow 0$. Авторы предсказывают, что система должна проходить через несколько фаз по мере увеличения химического потенциала: при достаточно малых μ_q система находится в адронной фазе; когда химический потенциал достигает значения $\mu = m_N/N_c$, где m_N — масса самого легкого бариона, формируется ненулевая барионная плотность, и образуется разреженный барионный газ, возможна Бозе-Эйнштейновская конденсация барионов; по мере дальнейшего увеличения μ_q возможен переход в кваркионную фазу, обладающую рядом интересных свойств: в данной фазе основными степенями свободы являются кварки, находящиеся внутри Ферми-сферы, и барионы, располагающиеся на Ферми-поверхности, киральная симметрия восстановлена, но система находится в конфайнменте.

2.2. Киральная теория возмущений для двухцветного КХД

Исследования двухцветного КХД в рамках киральной теории возмущений были проведены в работах [5, 6, 53–55]. В данном разделе будет рассмотрено построение кирального Лагранжиана в ведущем порядке при $T = 0$ и получены аналитические зависимости фермионных наблюдаемых от химического потенциала, которые понадобятся в дальнейшем для описания результатов.

Рассмотрим плотность действия (1.2) для КХД с калибровочной группой $SU(2)$ и проанализируем глобальные симметрии. Введя левый и правый проекторы

$$\psi_{R(L)} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi, \quad (2.1)$$

можно переписать плотность Лагранжиана как (пока положим $m = 0$):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi = i \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_\mu D_\mu & 0 \\ 0 & -\sigma_\mu^\dagger D_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где для удобства введено обозначение $\sigma_\mu = (\sigma_k, -i)$, σ_k представляют собой матрицы Паули, а также учтено свойство $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4 = \psi^{*T} \gamma_4$, поскольку в качестве независимых Грассмановых переменных можно рассматривать как $\bar{\psi}$, ψ , так и ψ^* , ψ . Ароматный индекс у фермионных полей в (2.2) опущен, подразумевается N_f ароматов кварков.

Теперь следует учесть особенность калибровочной группы $SU(2)$: калибровочные поля имеют вид $A_\mu = \sum_{a=1}^3 A_\mu^a \tau_a / 2$, где $A_\mu^a \in R$, а τ_a — матрицы Паули в цветовом пространстве. Матрицы Паули обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned}\tau_2 \tau_k \tau_2 &= -\tau_k^T, \\ \sigma_2 \sigma_\nu \sigma_2 &= -\sigma_\nu^T,\end{aligned}\tag{2.3}$$

которое необходимо учесть при анализе симметричных свойств Лагранжиана. Можно ввести спинор $\tilde{\psi}_R = \sigma_2 \tau_2 \psi_R^*$ и задать 4-спинор (следует помнить, что ψ имеет опущенный индекс f , $f = 1 \dots N_f$) как

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \tilde{\psi}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \sigma_2 \tau_2 \psi_R^* \end{pmatrix},\tag{2.4}$$

тогда (2.2) переписется в виде

$$\mathcal{L} = i \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \tilde{\psi}_R^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_\mu D_\mu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu D_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \tilde{\psi}_R \end{pmatrix} = i \Psi^\dagger \sigma_\mu D_\mu \Psi.\tag{2.5}$$

Из формы записи (2.5) легко видеть, что Лагранжиан обладает глобальной симметрией $U(2N_f)$, которая за счет аксиальной аномалии понижается до $SU(2N_f)$.

Если киральная симметрия теории нарушена, то формируется ненулевой киральный конденсат

$$\bar{\psi} \psi = \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Psi^T \sigma_2 \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi + \text{h.c.},\tag{2.6}$$

где под “h.c.” понимается эрмитово сопряженное слагаемое. Конденсат (2.6) инвариантен относительно преобразований из группы $Sp(2N_f)$. Можно подсчитать число Голдстоуновских степеней свободы: группа $SU(2N_f)$ обладает

$4N_f^2 - 1$ генераторами, а $Sp(2N_f) - N_f(2N_f + 1)$ генераторами [56], следовательно киральный конденсат нарушает $4N_f^2 - 1 - 2N_f^2 - N_f = N_f(2N_f - 1) - 1$ генераторов. Можно построить эффективный Лагранжиан для Голдстоуновских мод, введя поле Σ , представляющее собой антисимметричную унимодулярную матрицу размера $2N_f \times 2N_f$ (содержит $N_f(2N_f - 1) - 1$ независимых компонент, столько же, сколько Голдстоуновских мод) и соответствующее киральному конденсату. Относительно глобальных преобразований $SU(2N_f)$ поле Σ будет преобразовываться как

$$\Sigma = U \Sigma_c U^T, \quad (2.7)$$

где Σ_c соответствует равновесному значению кирального конденсата, а U параметризуются Голдстоуновскими модами π_b , $b = 1 \dots N_f(2N_f - 1) - 1$:

$$U = \text{Exp} \left[\frac{i\pi_b X_b}{2\sqrt{2N_f F}} \right]. \quad (2.8)$$

В выражении (2.8) X_b представляют собой генераторы $SU(2N_f)$ для класса смежности $SU(2N_f)/Sp(2N_f)$, нормированные как

$$\text{Tr} (X_a X_b) = 2N_f \delta_{ab}. \quad (2.9)$$

Эффективный Лагранжиан должен быть инвариантным относительно глобальных $SU(2N_f)$ преобразований, а также Лоренц-инвариантным. В первом порядке киральной теории возмущений он может быть записан как

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F^2}{2} \text{Tr} (\partial_\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger), \quad (2.10)$$

где F представляет собой константу распада пиона. Далее введем в исходный Лагранжиан (2.5) ненулевую кварковую массу m , одинаковую для всех ароматов. Соответственно, нужно добавить в (2.10) новый член, содержащий массу кварка как параметр. Чтобы определить вид такого члена, сначала распишем массовый член $m\bar{\psi}\psi$ в терминах (2.4):

$$m\bar{\psi}\psi = \frac{1}{2} m \Psi^T \sigma_2 \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \Psi^T \sigma_2 \tau_2 M \Psi + \text{h.c.}, \quad (2.11)$$

где введена массовая матрица

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Легко видеть, что (2.11) инвариантен относительно преобразований из $Sp(2N_f) \subset SU(2N_f)$. Чтобы восстановить $SU(2N_f)$ -инвариантность, матрица M должна преобразовываться как $M \rightarrow V^* M V^\dagger$ вместе с $\Psi \rightarrow V \Psi$. Тогда, если учесть трансформационное свойство (2.7) поля Σ , то можно записать массовый член эффективного Лагранжиана в наименьшем порядке по Σ :

$$\mathcal{L}_{eff}^{(m)} = -G \text{ReTr} (M \Sigma), \quad (2.13)$$

где $G = \langle \bar{\psi} \psi \rangle_0 / (2N_f)$ представляет собой феноменологический коэффициент, пропорциональный киральному конденсату в киральном пределе при $\mu_q = 0$ [53]. Следует отметить, что (2.13) достигает минимума при $\Sigma_c = M^\dagger / m$, что соответствует

$$\Sigma_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Такая форма Σ_c согласуется с (2.6).

Эффективный Лагранжиан с массовым членом выглядит как

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F^2}{2} \text{Tr} (\partial_\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger) - m G \text{ReTr} (\hat{M} \Sigma), \quad (2.15)$$

где введено обозначение

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Лагранжиан (2.15) представляет собой Лагранжиан киральной теории возмущений в первом порядке, его спектр соответствует $N_f(2N_f - 1) - 1$ вырожденным Голдстоуновским бозонам [57–59] с массами, удовлетворяющими соотношению Гелл-Манна-Оакса-Реннера:

$$m_\pi^2 = \frac{mG}{F^2} = \frac{m \langle \bar{\psi} \psi \rangle_0}{2N_f F^2}. \quad (2.17)$$

Соответственно, можно выразить параметр G в (2.15) через массу пиона, тогда

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F^2}{2} \left[Tr (\partial_\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger) - 2m_\pi^2 Re Tr (\hat{M} \Sigma) \right]. \quad (2.18)$$

Теперь необходимо ввести кварковый химический потенциал μ_q . Соответствующий добавочный член в (2.2) будет выглядеть как $-\mu_q \bar{\psi} \gamma_4 \psi$, что в терминах (2.4) примет вид

$$\bar{\psi} \gamma_4 \psi = \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}^T = \Psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi. \quad (2.19)$$

Следует обратить внимание, что билинейная форма (2.19) инвариантна относительно глобальных преобразований $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)$, то есть для безмассовых кварков ($m = 0$) конечный химический потенциал приведет к нарушению симметрии $SU(2N_f) \rightarrow SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)$, а при одновременном $m \neq 0$ и $\mu_q \neq 0$ глобальная симметрия нарушится до $SU(N_f) \times U(1)$.

Для дальнейшего построения эффективного Лагранжиана следует действовать по описанному выше методу. Удобно ввести матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

тогда кварковая плотность переписется как

$$\bar{\psi} \gamma_4 \psi = \Psi^\dagger B \Psi. \quad (2.21)$$

При преобразовании $\Psi \rightarrow V \Psi$ ($V \in SU(2N_f)$) билинейная форма $\Psi^\dagger B \Psi$ остается инвариантной, если $B \rightarrow V B V^\dagger$. Надо сконструировать член эффективного Лагранжиана, который был бы инвариантен относительно преобразования

$$\Sigma \rightarrow V \Sigma V^T, \quad B \rightarrow V B V^\dagger \quad (2.22)$$

и был четным по μ_q^2 . В низшем порядке по киральной теории возмущений такой член имеет вид

$$\mathcal{L}_{eff}^{(\mu_q)} = \alpha \mu_q^2 Tr (\Sigma B^T \Sigma^\dagger B) + \beta \mu_q^2 Tr (B^2), \quad (2.23)$$

с некоторыми коэффициентами α и β . Для определения коэффициентов можно ввести член (2.23) в Лагранжиан (2.18) следующим путем: обобщим преобразование (2.22) для матрицы B до локальных $SU(2N_f)$ -преобразований [5]:

$$B \rightarrow VBV^\dagger - \frac{1}{\mu_q} V \partial_4 V^\dagger, \quad (2.24)$$

тогда необходимо заменить обычные производные ∂_μ в кинетическом члене выражения (2.18) ковариантными производными, учитывающими поле B :

$$\begin{aligned} \nabla_4 \Sigma &= \partial_4 \Sigma - \mu (B \Sigma + \Sigma B^T), \\ \nabla_4 \Sigma^\dagger &= \partial_4 \Sigma^\dagger + \mu (\Sigma^\dagger B + B^T \Sigma^\dagger), \\ \nabla_k &= \partial_k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Теперь при замене $Tr(\partial_\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger)$ на $Tr(\nabla_\mu \Sigma \nabla_\mu \Sigma^\dagger)$ в (2.18) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \frac{F^2}{2} \left[Tr(\partial_\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger) + 4\mu_q Tr(B \Sigma^\dagger \partial_4 \Sigma) - 2m_\pi^2 Re Tr(\hat{M} \Sigma) \right. \\ &\quad \left. - 2\mu_q^2 Tr(\Sigma B^T \Sigma^\dagger B + B^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

В (2.26) возникло линейное по μ_q слагаемое, но оно содержится в кинетической части. В потенциальную часть (2.26) вошли оба члена (2.23). Интересно, что если для введения массы в Лагранжиан киральной теории возмущений потребовался новый параметр G (или m_π), то введение барионного химического потенциала нового параметра не потребовало.

Эффективный Лагранжиан (2.26) позволяет исследовать физические свойства двухцветного КХД при ненулевом кварковом химическом потенциале. Чтобы понять, какой конденсат $\bar{\Sigma}$ соответствует вакуумному состоянию, нужно найти минимум потенциальной части Лагранжиана, которая имеет вид

$$\mathcal{L}_{eff}^{(st.)} = \frac{F^2 m_\pi^2}{2} \left[-\frac{x^2}{2} Tr(\Sigma B^T \Sigma^\dagger B + B^2) - 2 Re Tr(\hat{M} \Sigma) \right], \quad (2.27)$$

где введено обозначение $x = (2\mu_q)/m_\pi$. Первый член в (2.27) пропорционален μ_q^2 , а второй — m_π^2 , значит, что форма искомого конденсата зависит от соотношения химического потенциала и массы пиона. Очевидно, что при $x = 0$ минимум

(2.27) достигается при $\bar{\Sigma} = \hat{M}^\dagger$, что соответствует Σ_c , киральному конденсату, который не обладает барионным зарядом. С другой стороны, при $x \rightarrow \infty$ минимум Лагранжиана определяется первым членом и достигается при $\bar{\Sigma} = \Sigma_d$ [5]:

$$\Sigma_d = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

где каждый из элементов является диагональной матрицей размера $(N_f/2) \times (N_f/2)$. Конденсат (2.28) называется дикварковым, поскольку физически соответствует формированию скалярных дикварков. Данный конденсат содержит ненулевой барионный заряд и нарушает соответствующую глобальную симметрию $U(1)$. Также следует отметить, что Σ_d связана с Σ_c преобразованием из группы $SU(2N_f)$.

При промежуточных значениях x величину $\bar{\Sigma}$ можно параметризовать в виде поворота в пространстве Σ от Σ_c к Σ_d :

$$\bar{\Sigma} = \Sigma_\alpha = \Sigma_c \cos \alpha + \Sigma_d \sin \alpha, \quad (2.29)$$

где $\alpha = 0$ при $x = 0$ и $\alpha = \pi/2$ при $x = \infty$ (можно показать, что $\bar{\Sigma} = \Sigma_\alpha$ определяет не просто минимум, а глобальный минимум [53]). Чтобы определить явную зависимость от $\alpha(x)$ нужно подставить (2.29) в (2.27) и учесть явный вид (2.20), тогда:

$$\mathcal{L}_{eff}^{(st.)}(\Sigma_\alpha) = F^2 m_\pi^2 N_f \left[\frac{x^2}{2} (\cos 2\alpha - 1) - 2 \cos \alpha \right]. \quad (2.30)$$

Теперь надо найти экстремум (2.30) по α , рассматривая x как константу, что приводит к кусочно-заданной зависимости $\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 & \text{при } x < 1, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{x^2} & \text{при } x > 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Таким образом, вакуумный конденсат (2.29) не является аналитической функцией x , то есть присутствует фазовый переход второго рода при $x = 1$ ($\mu_q = m_\pi/2$). Физическая картина выглядит так: при $\mu_q < m_\pi/2$ вакуумное состояние соответствует киральному конденсату, барионная плотность равна нулю; далее, при $\mu_q^c = m_\pi/2$ происходит фазовый переход, по мере увеличения μ_q вакуумный конденсат начинает поворачиваться от Σ_c к Σ_d , глобальная симметрия $U(1)$, соответствующая барионному заряду, спонтанно нарушается, формируется ненулевая барионная плотность. Критическое значение кваркового химического потенциала равно половине массы самого легкого бариона в двухцветном КХД, скалярного дикварка, который в данной теории при $\mu_q < \mu_q^c$ вырожден по массе с пионом.

Поскольку минимум статической части эффективного Лагранжиана (2.27) при $\Sigma = \Sigma_\alpha$ соответствует энергии вакуума, то можно определить зависимости кирального и дикваркового конденсатов, а также барионной плотности от μ_q , взяв производные по соответствующим источникам. Но сначала надо ввести в эффективный Лагранжиан дикварковый источник j , которых в исходном Лагранжиане должен действовать аналогично массе для кирального конденсата. В двухцветном КХД можно построить соответствующий член в исходном Лагранжиане таким образом, чтобы он был бесцветным, локальным и калибровочно-инвариантным. В терминах фермионных полей дикварковый член записывается аналогично (2.6), но с матрицей Σ_d вместо Σ_c :

$$\mathcal{L}_{diq} = -\frac{j}{2}\Psi^T\sigma_2\tau_2\Sigma_d\Psi + \text{h.c.} = -i\left(\frac{j}{2}\psi^T C\gamma_5\tau_2 I\psi + \text{h.c.}\right), \quad (2.32)$$

где $C = -\gamma_4\gamma_2$ представляет собой матрицу зарядового сопряжения, а I — антисимметричная матрица размера $N_f \times N_f$ следующего вида:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Можно объединить (2.32) с массовым членом в одно выражение:

$$m\bar{\psi}\psi - i\frac{j}{2}(\psi^T C\gamma_5\tau_2 I\psi + \text{h.c.}) = -\frac{1}{2}\Psi^T \sigma_2\tau_2 M_\phi \Psi + \text{h.c.} \quad (2.34)$$

с матрицей

$$M_\phi = m\hat{M} + j\hat{J} = \sqrt{m^2 + j^2}\hat{M}_\phi, \quad (2.35)$$

где

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Сравнивая (2.34) с (2.11), можно понять, как модифицируется второй член в (2.15): \hat{M} поменяется на \hat{M}_ϕ , а в соотношении Гелл-Манна-Оакса-Реннера войдет j , то есть

$$m_\pi^2 = \frac{\sqrt{m^2 + j^2}G}{F^2}. \quad (2.37)$$

Соответственно, эффективный Лагранжиан с дикварковым источником будет выглядеть как

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F^2}{2} \left[\text{Tr}(\nabla_\mu \Sigma \nabla_\mu \Sigma^\dagger) - 2m_\pi^2 \text{ReTr}(\hat{M}_\phi \Sigma) \right], \quad (2.38)$$

где производные заданы как (2.25), а для массы пиона действует соотношение (2.37). Далее следует действовать аналогично и найти минимум потенциальной части Лагранжиана. $\Sigma\alpha$ по-прежнему будет вакуумным конденсатом, но (2.30) слегка модифицируется:

$$\mathcal{L}_{eff}^{(st.)}(\Sigma_\alpha) = F^2 m_\pi^2 N_f \left[\frac{x^2}{2} (\cos 2\alpha - 1) - 2 \cos(\alpha - \phi) \right], \quad (2.39)$$

где $\phi = \arctan(j/m)$, а зависимость $\alpha(x)$ будет аналитической:

$$x^2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(\alpha - \phi). \quad (2.40)$$

При $\phi \rightarrow 0$ ($j \rightarrow 0$) картина (2.31) восстанавливается. Таким образом, при ненулевом дикварковом источнике фазовый переход при $\mu_q^c = m_\pi/2$ отсутствует, поскольку дикварковый член сам по себе явно нарушает $U(1)_B$ -симметрию, то есть система уже находится во второй фазе при $\mu_q = 0$.

Теперь можно определить зависимости конденсатов и барионной плотности от μ_q . Плотность энергии для вакуумного состояния определяется как (2.39)

$$\mathcal{E}_{vac} = \mathcal{L}_{eff}^{(st.)}(\Sigma_\alpha) = -4F^2 N_f \mu_q^2 \sin^2 \alpha - 2N_f G (m \cos \alpha + j \sin \alpha), \quad (2.41)$$

а искомые величины как

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{\partial \mathcal{E}_{vac}}{\partial m}, \quad \langle \psi\psi \rangle = -\frac{\partial \mathcal{E}_{vac}}{\partial j}, \quad n_q = -\frac{\partial \mathcal{E}_{vac}}{\partial \mu_q}, \quad (2.42)$$

где под $\psi\psi$ кратко обозначен дикварковый конденсат (2.32). Дифференцируя (2.41) с учетом свойства $\partial \mathcal{E}_{vac}/\partial \alpha = 0$, так как α определяет минимум потенциальной части Лагранжиана, получим

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 2N_f G \cos \alpha, \quad \langle \psi\psi \rangle = 2N_f G \sin \alpha, \quad n_q = 8N_f F^2 \mu_q \sin^2 \alpha. \quad (2.43)$$

Если положить $j = 0$, то вместе с (2.31) и (2.17) придем к следующим зависимостям (см. рисунок 2.2):

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 \quad \text{при } \mu_q < \frac{m_\pi}{2}; \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 \left(\frac{m_\pi}{2\mu_q} \right)^2 \quad \text{при } \mu_q > \frac{m_\pi}{2}, \quad (2.44)$$

$$\langle \psi\psi \rangle = 0 \quad \text{при } \mu_q < \frac{m_\pi}{2}; \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{2\mu_q} \right)^4} \quad \text{при } \mu_q > \frac{m_\pi}{2}, \quad (2.45)$$

$$n_q = 0 \quad \text{при } \mu_q < \frac{m_\pi}{2}; \quad 8N_f F^2 \mu_q \left[1 - \left(\frac{m_\pi}{2\mu_q} \right)^4 \right] \quad \text{при } \mu_q > \frac{m_\pi}{2}. \quad (2.46)$$

В случае $j \neq 0$ аналогичные выражения представлены на рисунке 2.3, легко видеть, что фазовый переход второго рода в таком случае отсутствует, о чем было упомянуто выше.

Формулы (2.44)–(2.46) соответствуют лидирующему порядку киральной теории возмущений и были получены в работе [53]. Из первых двух формул видно, что $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + \langle \psi\psi \rangle^2 = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0^2$, однако приведенная выше картина поворота конденсата от кирального к дикварковому уже не будет справедлива при учете более высоких порядков [6]. Также следует отметить, что данные зависимости характеризуют поведение системы при нулевой температуре. Киральная теория

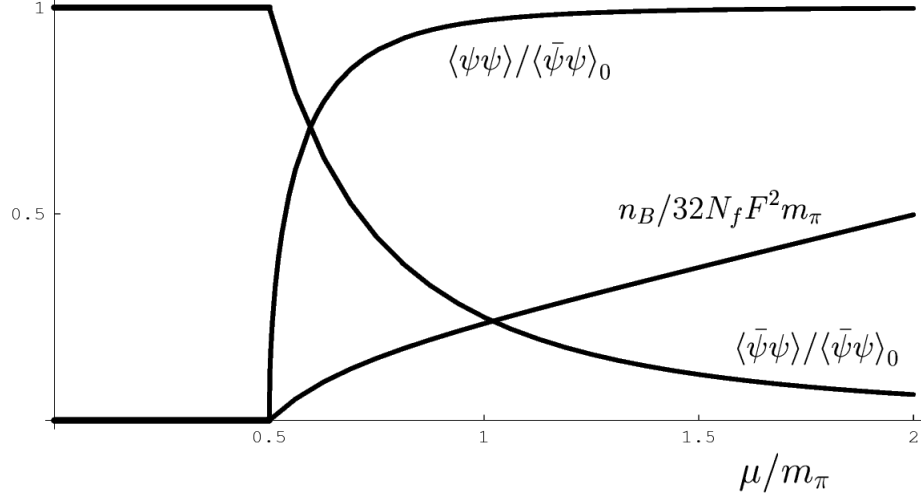


Рис. 2.2. Формулы (2.44)–(2.46), соответствующие зависимости коденсатов и барионной плотности от химического потенциала при $j = 0$ (рисунок из работы [5]).

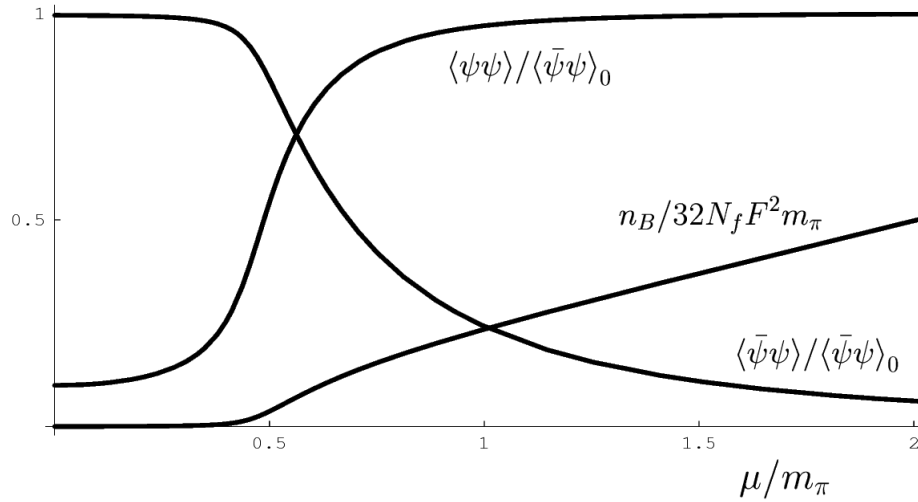


Рис. 2.3. Формулы (2.43), соответствующие поведению коденсатов и барионной плотности от химического потенциала при ненулевом дикварковом источнике, зависимость α от химического потенциала определяется формулой (2.40) (рисунок из работы [5]).

возмущений для двухцветного КХД при конечной температуре была построена в [60].

К сожалению, провести аналогичные выкладки в рамках киральной теории возмущений для настоящего КХД с калибровочной группой $SU(3)$ не пред-

ставляется возможным. Во-первых, Лагранжиан КХД обладает глобальной симметрией $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ в отличие от $SU(2N_f)$ для случая двухцветного КХД. Для последнего случая генератор, соответствующий барионному заряду, входит в группу глобальной симметрии, благодаря чему существуют Голдстоуновские моды (скалярные дикварки и антидикварки для $N_f = 2$), содержащие барионный заряд. В КХД с калибровочной группой $SU(3)$ аналогичных мод нет из-за более низкой симметрии действия, поэтому нельзя построить киральный Лагранжиан с химическим потенциалом. Во-вторых, критическое значение $\mu_q^c \approx m_N/3$ составит примерно 313 МэВ, что может оказаться достаточно большой величиной для киральной теории возмущений, поскольку последняя работает только при малых μ_q . В третьих, при $N_c = 3$ нельзя построить бесцветный оператор, аналогичный (2.32).

Глава 3

Двухцветное КХД на решетке

В данной работе в функциональном интеграле (1.19) рассматривается фермионное действие в формулировке Когута-Сасскинда [23, 25]:

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}_x e^{\mu_q a \delta_{\mu,4}} U_{x,\mu} \chi_{x+\hat{\mu}} - \bar{\chi}_x e^{-\mu_q a \delta_{\mu,4}} U_{x-\hat{\mu},\mu}^\dagger \chi_{x-\hat{\mu}} \right] + m_q a \sum_x \bar{\chi}_x \chi_x = \sum_{x,y} \bar{\chi}_x M_{xy} \chi_y, \quad (3.1)$$

где суммирование осуществляется по всем узлам решетки, M_{xy} представляет собой решеточный оператор Дирака для фермионов Когута-Сасскинда, m_q — голая масса кварка, а спиноры обладают цветовым ($c = 1, 2$) и ароматным ($f = 1, \dots, N_f$) индексами (подразумевается, что кварки вырождены, то есть обладают одинаковой массой). Факторы $\eta_\mu(x)$ в (3.1) имеют следующий вид: $\eta_1(x) = 1$, $\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1 + \dots + x_{\mu-1}}$, $\mu = 2, 3, 4$. Кварковый химический потенциал вводится в (3.1) путем добавления соответствующих множителей $e^{\pm \mu_q a}$ к временным ребрам решетки, поскольку такой способ позволяет воспроизвести правильный результат в непрерывном пределе [26].

Калибровочные поля $U_{x,\mu}$ в принадлежат группе $SU(2)$, благодаря чему обладают следующим свойством:

$$U_{x,\mu}^* = \tau_2 U_{x,\mu} \tau_2, \quad (3.2)$$

где τ_2 представляет собой матрицу Паули в цветовом пространстве. Кроме того, оператор Дирака (3.1) обладает аналогом γ_5 -эрмитовости:

$$M_{xy}^\dagger(-\mu_q^* a) = \eta_5(x) M_{xy}(\mu_q a) \eta_5(y), \quad (3.3)$$

где $\eta_5(x) = (-1)^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$. Благодаря сочетанию свойств (3.2) и (3.3) фермионный детерминант для оператора (3.1) является действительным и положительно определенным при действительном $\mu_q a$ и ненулевой затравочной массе кварка (строгое доказательство приведено в [61]).

Обратимся теперь к симметричным свойствам (3.1). В киральном пределе при ненулевом химическом потенциале действие обладает двумя глобальными симметриями (o и e обозначают, соответственно, нечетные и четные узлы решетки):

$$\begin{aligned}\chi_e &\rightarrow P\chi_e; \bar{\chi}_o \rightarrow \bar{\chi}_o P^\dagger & P &\in U(N_f) \\ \chi_o &\rightarrow Q\chi_o; \bar{\chi}_e \rightarrow \bar{\chi}_e Q^\dagger & Q &\in U(N_f).\end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\bar{X}_e = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_e & -\chi_e^T \tau_2 \end{pmatrix}, \quad X_o = \begin{pmatrix} \chi_o \\ -\tau_2 \bar{\chi}_o^T \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

то действие (3.1) можно переписать в более наглядном виде (используется суммирование только по четным узлам решетки):

$$\begin{aligned}S_F &= \frac{1}{2} \sum_{x \in e} \sum_{\mu=1}^3 \eta_\mu(x) \left[\bar{X}_{e,x} U_{x,\mu} X_{o,x+\hat{\mu}} - \bar{X}_{e,x} U_{x-\hat{\mu},\mu}^\dagger X_{o,x-\hat{\mu}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{x \in e} \eta_4(x) \left[\bar{X}_{e,x} \begin{pmatrix} e^{\mu_q a} & 0 \\ 0 & e^{-\mu_q a} \end{pmatrix} U_{x,4} X_{o,x+\hat{4}} - \bar{X}_{e,x} \begin{pmatrix} e^{-\mu_q a} & 0 \\ 0 & e^{\mu_q a} \end{pmatrix} U_{x-\hat{4},4}^\dagger X_{o,x-\hat{4}} \right] \\ &+ \frac{m_q a}{2} \sum_x \left[\bar{X}_{e,x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_2 \bar{X}_{e,x}^T + X_{o,x}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_2 X_{o,x} \right].\end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим сначала случай $m_q = \mu = 0$, тогда действие (3.5) обладает глобальной симметрией $U(2N_f)$ (аксиальная аномалия не учитывается при решеточной регуляризации):

$$X_o \rightarrow V X_o, \quad \bar{X}_e \rightarrow \bar{X}_e V^\dagger, \quad V \in U(2N_f). \quad (3.6)$$

Если теперь предположить сценарий спонтанного нарушения киральной симметрии, то должен сформироваться киральный конденсат, соответствующий массовому члену в (3.5):

$$\bar{\chi}\chi = \frac{1}{2} \sum_x \left[\bar{X}_{e,x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_2 \bar{X}_{e,x}^T + X_{o,x}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_2 X_{o,x} \right]. \quad (3.7)$$

Данная квадратичная форма инвариантна относительно преобразований $O(2N_f)$, таким образом при нулевом химическом потенциале для решеточного действия должен наблюдаться следующий сценарий спонтанного нарушения симметрии: $U(2N_f) \rightarrow O(2N_f)$. Следует отметить, что такой сценарий отличается от описанного в главе 2.2 для непрерывного случая, $SU(2N_f) \rightarrow Sp(2N_f)$. Соответственно, сценарий нарушения симметрии должен поменяться при переходе к непрерывному пределу.

В случае $\mu \neq 0$ физическая картина усложняется, поскольку система переходит из вакуума в состояние с барионной материей. Во-первых, формируется ненулевая барионная плотность при некотором $\mu_q > \mu_q^c$. Качественный аргумент при оценке μ_q^c состоит в том, что он должен быть примерно равен массе самого легкого из возможных барионов, деленной на число цветов. Поскольку в данной теории самым легким барионом является дикварк, при нулевом хим. потенциале вырожденный по массе с пионом, то получаем $\mu_q^c \approx m_\pi/2$. Сама барионная плотность инвариантна относительно преобразований $U(N_f) \times U(N_f)$.

Во-вторых, в двухцветном КХД возможно построить синглетный по цвету, локальный и калибровочно инвариантный дикварковый конденсат [10] (матрица τ_2 действует в цветовом пространстве):

$$\chi\chi = \frac{1}{2} \sum_x (\chi_x^T \tau_2 \chi_x + \bar{\chi}_x \tau_2 \bar{\chi}_x^T), \quad (3.8)$$

что в обозначениях (3.4) примет вид

$$\chi\chi = \frac{1}{2} \sum_x \left[\bar{X}_{e,x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tau_2 \bar{X}_{e,x}^T + X_{o,x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tau_2 X_{o,x} \right]. \quad (3.9)$$

Ненулевой дикварковый конденсат нарушает симметрию $U(1)_B$ и сигнализирует о формировании сверхтекучего состояния кварковой материи. Кроме того, в обозначениях (3.4) наглядно видно, что дикварковый конденсат (3.9) может быть преобразован в киральный (3.7) проведением $U(2N_f)$ -вращения. Соответственно, можно предположить, что по мере увеличения химического потенци-

ала дикварковый конденсат будет возрастать при $\mu_q > \mu_q^c$, а киральный будет убывать, но сумма их квадратов будет оставаться постоянной.

Для исследования сверхтекучей фазы системы можно ввести в действие (3.1) затравочный член $(\lambda/2) \sum_x (\chi_x^T \tau_2 \chi_x + \bar{\chi}_x \tau_2 \bar{\chi}_x^T)$ аналогично тому, как вводится массовый член $m_q a \bar{\chi} \chi$ для исследования нарушения киральной симметрии. Можно проводить вычисления при нескольких значениях λ , экстраполирую затем физические результаты в предел $\lambda \rightarrow 0$. Функциональный интеграл по фермионным степеням свободы модифицируется после введения дикваркового источника следующим образом [21]:

$$\int D\bar{\chi} D\chi e^{-\bar{\chi} M \chi + \frac{\lambda}{2} (\chi^T \tau_2 \chi + \bar{\chi} \tau_2 \bar{\chi}^T)} = [\det (M^\dagger M + \lambda^2)]^{1/2}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) видно, что ненулевой дикварковый источник всего лишь сдвигает спектр $M^\dagger M$ вправо по действительной оси, не создавая никаких препятствий для проведения численных расчетов.

В данной работе рассматривается статистическая сумма с извлечением из фермионного детерминанта корня четвертой степени:

$$Z = \int DU [\det (M^\dagger(\mu_q, U) M(\mu_q, U) + \lambda^2)]^{1/4} e^{-S_G[U]}, \quad (3.11)$$

где в качестве калибровочного действия используется действия Вильсона (1.16) для группы $SU(2)$, $M(\mu_q, U)$ — определенный выше оператор (3.1). Поскольку каждый из двух операторов Дирака в (3.11) для фермионов Когута-Сасскинда соответствует четырем ароматам кварков, то после взятия корня остается $N_f = 8/4 = 2$ аромата. При достаточно малом шаге решетки и достаточно точной аппроксимации корня в вычислениях [62, 63] решеточные артефакты будут сведены к минимуму.

Дополнительным аргументом в пользу правильного числа ароматов может служить непрерывный предел для дикваркового конденсата. Используя обратное преобразование Когута-Сасскинда для фермионных полей (см. раздел 1.2),

легко показать, что

$$\frac{\lambda}{2} \sum_x (\chi_x^T \tau_2 \chi_x + \bar{\chi}_x \tau_2 \bar{\chi}_x^T) \Big|_{a \rightarrow 0} = \frac{\lambda}{2} \int d^4x (q_i^T C \gamma_5 \tau_2 q_j + \bar{q}_i C \gamma_5 \tau_2 \bar{q}_j^T) \times \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}_{ij},$$

где $C = \gamma_2 \gamma_4$ представляет собой матрицу зарядового сопряжения, матрицы γ действуют в Дираковском пространстве, τ_2 — в цветовом, σ_2 — в пространстве ароматов. Таким образом, в непрерывном пределе для дикваркового конденсата мы получаем две копии фермионов в фундаментальном представлении. Соответственно, можно полагать, что статистическая сумма (3.11) в непрерывном пределе описывает два аромата фермионов в фундаментальном представлении.

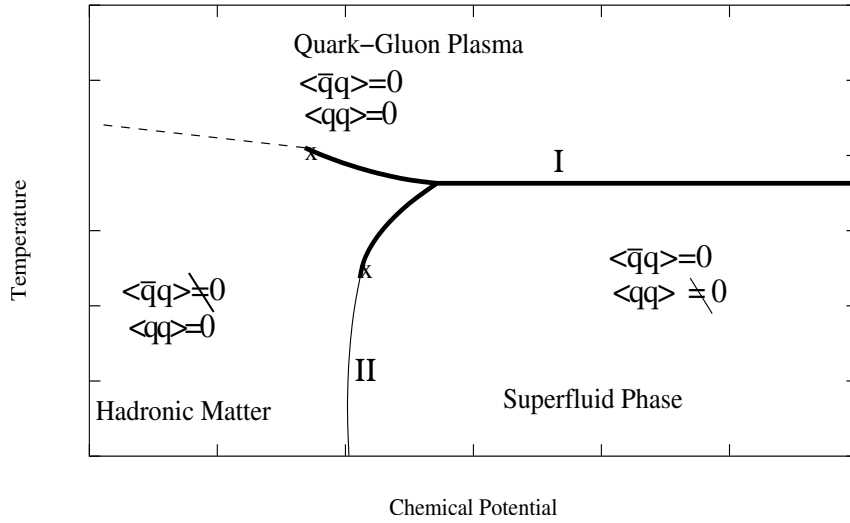


Рис. 3.1. Примерный вид фазовой диаграммы двухцветного КХД (рисунок из работы [9]).

К настоящему времени для исследования фазовой диаграммы двухцветного КХД были опробованы следующие теоретические подходы: модель Намбу-Иона-Лазинио [64–67], ренормгрупповой функционал [68–71], теория произвольных матриц [72–74]. В основном все описанные эффективные теории указывают на следующую фазовую структуру двухцветного КХД при низкой температуре: (1) адронная фаза при $0 < \mu_q < \mu_q^c = m_\pi/2$, (2) сверхтекучий конденсат ска-

лярных дикварков при $\mu^c < \mu < \mu^d$ (3) конденсация дикварков по механизму Бардина-Купера-Шриффера при $\mu^d < \mu$ [75]). Интерес представляет проверка данных предсказаний непосредственными вычислениями в рамках решеточного КХД. Следует также отметить, что фазовая двухцветного КХД (изображена на рисунке 3.1) в целом похожа на фазовую диаграмму КХД с калибровочной группой $SU(3)$ (см. рис. 2.1): присутствует фазовый переход “конфайнмент-деконфайнмент”, возможно существование фазы, аналогичной фазе цветовой сверхпроводимости, возможно существование трикритической точки. Таким образом, вычисления в рамках решеточного КХД при конечном химическом потенциале позволяют сделать качественные предсказания для настоящего КХД при конечном химическом потенциале.

Глава 4

Результаты

Для исследования области $T = 0$ и конечного μ_q рассматривалась решетка $16^3 \times 32$ с $\beta = 2.15$ и $m_q a = 0.005$. Данные параметры соответствуют шагу решетки $a = 0.112(1)$ фм ($L_s \approx 1.8$ фм), массе пиона $M_\pi \approx 380$ МэВ и $M_\pi L_s \approx 3.4$. Пион в данной модели тяжелее физического, поскольку расчеты в решеточном КХД при физических массах кварков являются вычислительно затратными, а представленная работа ориентирована в первую очередь на обнаружение нетривиальных качественных эффектов. Вычисления проводились при трех значениях λ : 0.001, 0.00075 и 0.0005, с последующей экстраполяцией в $\lambda \rightarrow 0$, химический потенциал брался в диапазоне $\mu_q a \in [0.0; 0.6]$, что соответствует $\mu_q \in [0.0; 1050]$ МэВ в физических единицах. Также рассматривались значения $\mu_q a = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$ и 1.0 при фиксированном $\lambda = 0.0005$ для исследования эффектов конечного объема.

В процессе решеточного моделирования были вычислены следующие наблюдаемые:

- петля Полякова:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_s^3} \sum_{x_1, x_2, x_3=0}^{N_s-1} \frac{1}{2} \left\langle \text{Tr} \prod_{x_4=0}^{N_\tau-1} U_{x,4} \right\rangle ; \quad (4.1)$$

- времениподобные петли Вильсона для прямоугольного контура $C = R \times T$:

$$W(R, T) = \left\langle \text{Tr} \left[\prod_C U_{x,\mu} \right] \right\rangle ; \quad (4.2)$$

- киральный конденсат:

$$a^3 \langle \bar{q}q \rangle = -\frac{1}{N_s^3 N_\tau} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial(ma)} = a^3 \langle \bar{q}_{i\alpha} q_{i\alpha} \rangle ; \quad (4.3)$$

- барионная плотность (отличается от кварковой коэффициентом $1/2$, так как $N_c = 2$):

$$a^3 n_B = \frac{1}{2} \frac{1}{N_s^3 N_\tau} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\mu_q a)} = a^3 \frac{1}{2} \langle \bar{q}_{i\alpha} \gamma_0 q_{i\alpha} \rangle ; \quad (4.4)$$

- дикварковый конденсат:

$$\begin{aligned} a^3 \langle qq \rangle &= -\frac{1}{N_s^3 N_\tau} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial \lambda} \\ &= a^3 \left\langle q_{i\alpha}^T \hat{C} \gamma_5 (\tau_2)_{ij} (\sigma_2)_{\alpha\beta} q_{j\beta} + \bar{q}_{i\alpha} \hat{C} \gamma_5 (\tau_2)_{ij} (\sigma_2)_{\alpha\beta} \bar{q}_{j\beta}^T \right\rangle . \end{aligned} \quad (4.5)$$

В приведенных выше формулах (4.3)–(4.5) поля \bar{q} , q представляют собой кварковые поля в непрерывной теории, $\hat{C} = \gamma_2 \gamma_4$ — оператор зарядового сопряжения, а τ_2 и σ_2 — матрицы Паули в ароматном и цветовом пространствах, соответственно (Дираковский индекс у фермионных полей опущен для краткости, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Также следует отметить, что при положительных значениях барионного химического потенциала второй член в формуле (4.5), соответствующий вкладу антидикварков, оказывается подавлен по сравнению с первым.

Выбор наблюдаемых обусловлен следующими причинами: петли Полякова и Вильсона чувствительны к фазовому переходу “конфайнмент-деконфайнмент”, киральный конденсат чувствителен к нарушению/восстановлению киральной симметрии, ненулевая барионная плотность говорит о нарушении $U(1)_V$ -симметрии, дикварковый конденсат является параметром порядка для перехода из адронной фазы в фазу конденсации скалярных дикварков.

4.1. Фиксация масштаба и измерение массы пиона

Для того, чтобы выразить результаты вычислений в физических единицах, необходимо провести фиксацию масштаба, то есть выразить шаг решетки a в Ферми. В данной работе фиксация масштаба проводилась при помощи па-

параметра Зоммера, суть метода состоит в следующем: рассчитывается производная кварк-антикваркового потенциала $r^2 dV(r)/dr$, которая имеет смысл силы притяжения между кварком и антикварком. Фиксированное значение данной величины

$$r^2 \frac{dV(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = 1.65 \quad (4.6)$$

соответствует физическому расстоянию $r_0 = 0.468(4)$ фм [76]. При использовании для потенциала фита в форме

$$V(r) = V_0 + \sigma r + \frac{\alpha}{r}, \quad (4.7)$$

где σ – натяжение струны, условие (4.6) принимает вид

$$\sigma r_0^2 - \alpha = 1.65. \quad (4.8)$$

Если указать шаг решетки в явном виде, то придем к следующей формуле:

$$\frac{r_0}{a} = \sqrt{\frac{1.65 + \alpha}{\sigma a^2}}, \quad (4.9)$$

где σa^2 и α представляют собой параметры фита, а значение r_0 фиксировано в физических единицах, благодаря чему становится возможным определить шаг решетки в физических единицах. Описанный способ фиксации масштаба в решеточной КХД довольно нагляден и не требует значительных вычислительных затрат, однако не является единственным: шаг решетки также можно определить из спектра масс или методом градиентного потока.

Были сгенерированы конфигурации на решетке $16^3 \times 32$ с $m_q a = 0.005$ и $\lambda = 0.0005$ при нулевом химическом потенциале для четырех различных значений β . Для вычисления Вильсоновских петель использовалось сглаживание (smearing), 1 шаг гиперкубического сглаживания [77] для временных линков, далее 20 шагов АРЕ-сглаживания [78] для пространственных линков, параметры сглаживания брались такими же, как в работе [79]. Шаг решетки в физических единицах вычислялся исходя из значения параметра Зоммера. Результаты представлены в Таблице 4.1 и на Рис. 4.1.

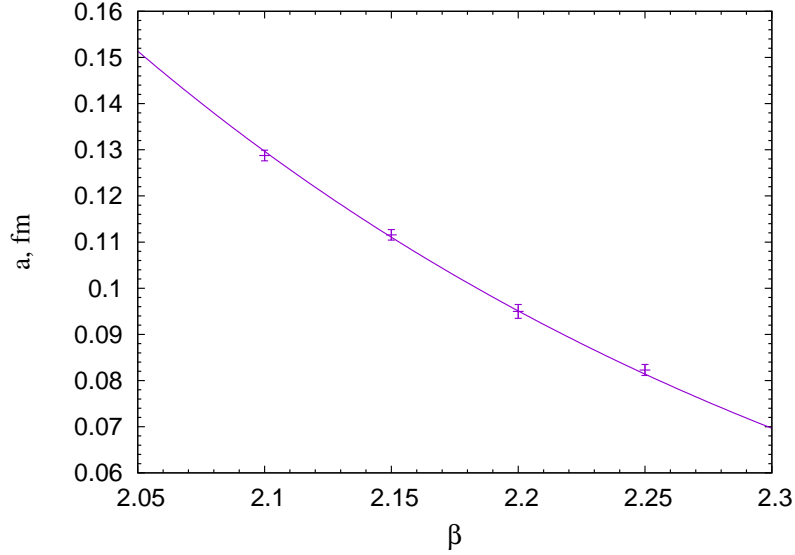


Рис. 4.1. Зависимость шага решетки от обратной константы связи $\beta = 4/g^2$.

β	a, fm	M_π, MeV
2.1	0.129(1)	329(3)
2.15	0.112(1)	377(4)
2.2	0.095(2)	493(8)
2.25	0.082(1)	561(9)

Таблица 4.1. Шаг решетки a и масса пиона m_π для различных значений обратной константы связи β при голой решеточной массе кварка $ma = 0.005$ и $\lambda = 0.0005$.

Для всех рассмотренных значений β результаты для шага решетки могут быть хорошо профитированы двухпетлевой формулой ($N_f = 2$, $N_c = 2$):

$$a(\beta) = \frac{1}{\Lambda_L} \left(\frac{4\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp\left(\frac{-\beta}{8\beta_0}\right), \quad (4.10)$$

$$\beta_0 = \frac{3}{8\pi^2}, \quad \beta_1 = \frac{29}{256\pi^4},$$

причем $\chi^2/dof = 0.47$ и $\Lambda_L = 0.0222(1) \text{ fm}^{-1}$. Хорошее согласие полученных результатов с формулой (4.10) для бета-функции является аргументом в пользу того, что при данных параметрах вычислений решеточная формулировка близка к непрерывному пределу.

Кроме того для тех же значений $\beta \in [2.1; 2.25]$ было проведено измерение

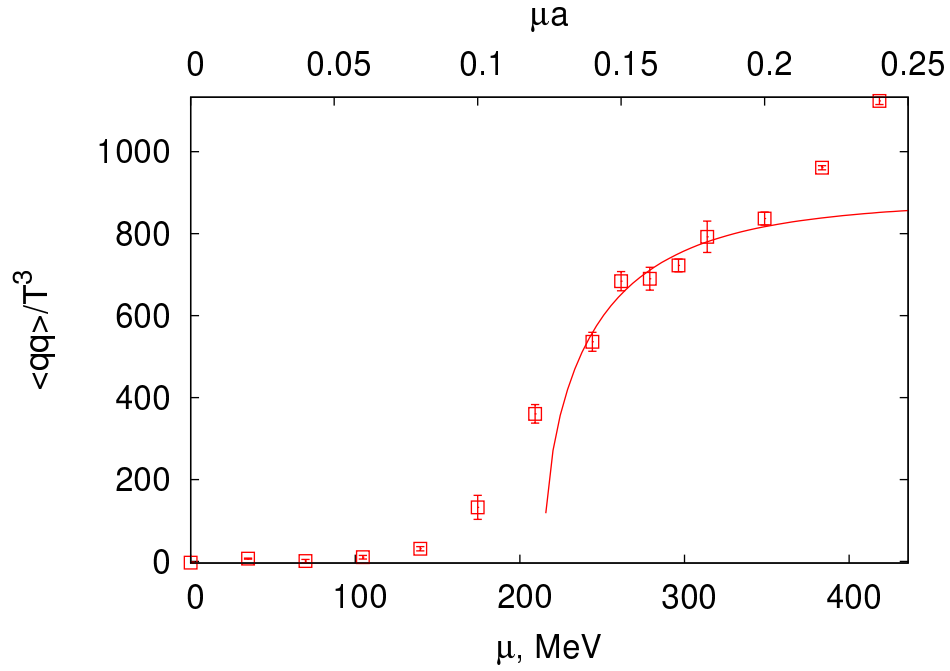


Рис. 4.2. Дикварковый конденсат $\langle qq \rangle / T^3$ как функция химического потенциала. Кривая представляет собой фит функцией (4.11).

массы пиона, результаты представлены в Таблице 4.1. Для вычисления массы пиона рассчитывался пионный пропагатор $C_\pi(t, \mathbf{q} = 0)$, который затем фитировался как $C_\pi(t, \mathbf{q} = 0) = C \cosh(-m_\pi(t - T/2))$. Также была проведена проверка того, что ненулевое значение λ не вносит каких-либо систематических искажений в значения Вильсоновских петель и масс пиона при $a\mu_q = 0$. Например, при $\beta = 2.15$ масса пиона для $\lambda = 0.0$ составляет $m_\pi = 378(4)$ МэВ, для $\lambda = 0.0005$ — $m_\pi = 377(4)$ МэВ, в для $\lambda = 0.001$ — $m_\pi = 382(4)$ МэВ, что согласуется в пределах ошибок. Следует отметить, что в представленном исследовании пион легче по массе по сравнению с предыдущими работами [7–9, 11–14].

4.2. Дикварковый конденсат

Обратимся сначала к результатам для дикваркового конденсата. На рисунке 4.2 приведена зависимость данного конденсата от химического потенциала, точки получены путем линейной экстраполяции в $\lambda = 0$. Для области химиче-

ского потенциала в области $\mu_q \leq 141$ МэВ и при $\mu_q \geq 263$ МэВ ($\mu_q a \geq 0.15$) линейная экстраполяция оказывается достаточно хорошей ($\chi^2/dof \sim 1$), но для значений $\mu_q a = 176$ МэВ, 211 МэВ and 246 МэВ ($\mu_q a = 0.1, 0.12, 0.14$, соответственно) линейная функция плохо описывает зависимость конденсата от величины дикваркового источника. Данный факт может быть объяснен близостью указанных значений к точке фазового перехода из адронной фазы в фазу с ненулевым дикварковым конденсатом.

Легко видеть, что при $\mu_q \leq 141$ МэВ ($\mu_q a \leq 0.08$) $\langle qq \rangle$ сравним с нулем в пределах ошибок, но уже начиная с $\mu_q \geq 176$ МэВ ($\mu_q a \geq 0.1$) дикварковый конденсат начинает отклоняться от нуля и возрастать. Если мы находимся достаточно далеко от фазового перехода, то можно попытаться использовать киральную теорию возмущений для описания результатов [5, 6, 53, 54]. В частности, киральная теория возмущений предсказывает положение перехода из адронной фазы в фазу конденсации скалярных дикварков около $\mu_q^c = m_\pi/2$, а зависимость дикваркового конденсата от химического потенциала в лидирующем порядке имеет вид (2.45). Представленные результаты можно профитировать формулой

$$\langle qq \rangle = A \sqrt{1 - (\mu_q^c/\mu_q)^4}, \quad (4.11)$$

рассматривая A и μ_q^c как параметры фита. Фит (4.11) в области $\mu_q a \in [0.15; 0.20]$ дает $\mu_q^c = 215(10)$ МэВ с $\chi^2/dof \approx 2.5$.

Поскольку формула (4.11) дает достаточно большой χ^2/dof , то следует рассмотреть фит альтернативной зависимостью. В первом порядке теории возмущений присутствует следующее соотношение между дикварковым и киральным конденсатами: $\langle \bar{q}q \rangle^2 + \langle qq \rangle^2 = \langle \bar{q}q \rangle_0^2$. В лидирующем порядке зависимость кирального конденсата от химического потенциала определяется как (2.44), но на практике оказывается, что киральный конденсат может спадать медленнее, чем $\sim 1/\mu^2$, о чем будет подробно рассказано ниже, поэтому можно ввести в зависимость $\langle qq \rangle(\mu_q)$ степень α , рассматривая её как дополнительный параметр

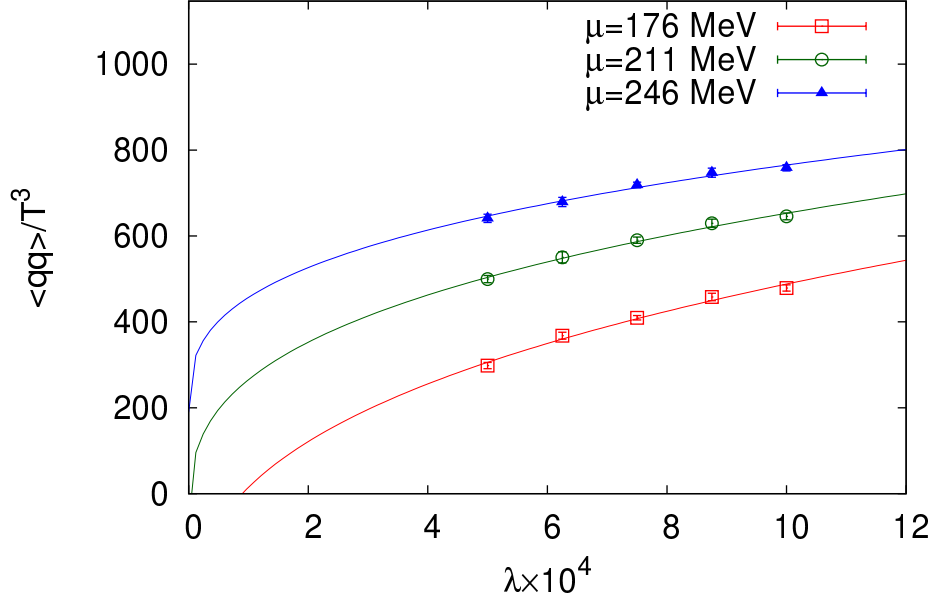


Рис. 4.3. Дикварковый конденсат $\langle qq \rangle / T^3$ как функция дикваркового источника λ в окрестности фазового перехода. Кривые представляют собой фит $\langle qq \rangle = A + B\lambda^{1/3}$.

фита:

$$\langle qq \rangle = \langle \bar{q}q \rangle_0 \sqrt{1 - (\mu^c / \mu)^{2\alpha}}. \quad (4.12)$$

Фит формулой (4.12) в определенном выше интервале μ_q дает $\alpha = 0.78(2)$ и $\mu_q^c = 193(10)$ МэВ с $\chi^2/dof \approx 1.4$. Лучший результат фита модельной функцией (4.12) объясняется тем, что формула (4.11) не учитывает более высоких порядков киральной теории возмущений, то есть не может полностью описать непертурбативные эффекты. Также следует отметить, что с достаточно хорошей точностью выполняется соотношение $\mu_q^c \approx m_\pi/2$, предсказанное ранее в работах [42, 53].

Теперь рассмотрим более подробно область перехода между фазами адронной материи и конденсации скалярных дикварков. Для определения критического индекса δ для трех значений химического потенциала, $\mu_q a = 0.1, 0.12$ и 0.14 ($\mu_q = 176, 210$ и 246 МэВ), были сгенерированы конфигурации при пяти значениях дикваркового источника: $\lambda = 0.0005, 0.000625, 0.00075, 0.000825$ и 0.001 , результаты представлены на рисунке 4.3. Из теории среднего поля из-

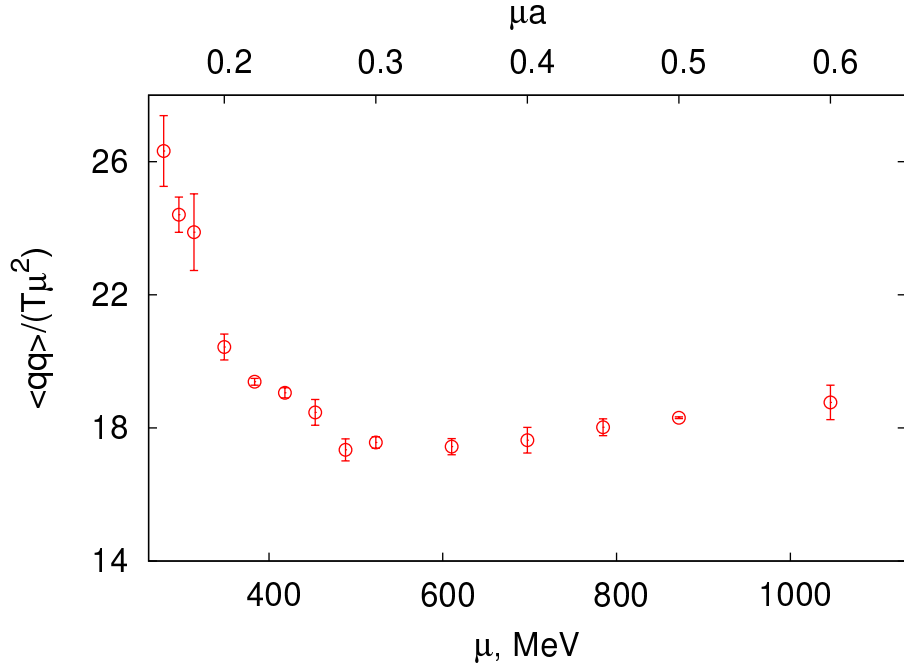


Рис. 4.4. Отношение $\langle qq \rangle / (T \mu_q^2)$ как функция кваркового химического потенциала.

вестно, что вблизи μ_q^c дикварковый конденсат должен вести себя примерно как $\langle qq \rangle \propto \lambda^{1/3}$ [9], поэтому результаты были профитированы функцией $\langle qq \rangle = A + B\lambda^{1/3}$. Для всех трех значений $\chi^2/dof \approx 1$, но только для $\mu_q a = 0.12$ ($\mu_q = 210$ МэВ) фит продемонстрировал корректное поведение в нуле: $\langle qq \rangle|_{\lambda \rightarrow 0} = -0.0021(12)$. При $\mu_q = 176$ МэВ ($\mu_q a = 0.1$) значение $\langle qq \rangle|_{\lambda \rightarrow 0} = -0.012(2)$ получается ненулевым отрицательным, а при $\mu_q = 246$ МэВ ($\mu_q a = 0.14$) ненулевым положительным: $\langle qq \rangle|_{\lambda \rightarrow 0} = 0.0058(14)$, откуда можно заключить, что $\mu = 210$ МэВ ($\mu_q a = 0.12$) ближе к μ_q^c , чем два других рассмотренных значения. Также были протестированы функции с другими показателями степени λ , но они дали больший χ^2/dof . Можно сделать вывод о том, что точка фазового перехода находится около $\mu_q = 210$ МэВ, что согласуется с приведенными выше результатами для зависимости $\langle qq \rangle(\mu_q)$, а критический индекс δ для дикваркового конденсата приблизительно равен 3.

Обратимся к области больших значений μ_q ($\mu_q \geq m_\pi$). Из рисунка 4.2 видно, что при $\mu_q > 350$ МэВ поведение дикваркового конденсата начинает отклоняться от зависимости, полученной в рамках киральной теории возмущений.

Данный эффект может указывать на переход системы в новую фазу, поскольку при достаточно высокой плотности барионная материя уже не может считаться разреженной, а межбарионное взаимодействие уже не описывается пертурбативно. При больших значениях химического потенциала возможно формирование состояния конденсации кварковых куперовских пар (БКШ-фаза). В данной фазе кварки будут сконцентрированы внутри Ферми-сферы, а величина дикваркового конденсата будет пропорциональной площади поверхности Ферми-сферы. Для проверки данного предположения на рисунке 4.4 приведено отношение $\langle qq \rangle / (T \mu_q^2)$ при $\mu_q > 350$ МэВ. Легко видеть, что на участке $\mu_q \in (500; 750)$ МэВ данные выходят на константу, то есть величина $\langle qq \rangle$ действительно пропорциональна площади поверхности Ферми-сферы, что говорит в пользу сценария перехода в БКШ-фазу. Можно сказать, что переход между БЭК- и БКШ-фазами является плавным.

Здесь уместно провести сравнение с результатами, полученными ранее другими группами. Первое исследование двухцветного КХД при ненулевом μ_q , но без дикваркового источника было проведено в работе [80]. В работах с фермионами Когута-Сасскинда [7–9] ($N_f = 4$) и [10] ($N_f = 8$) БКШ-фазы обнаружено не было, но была найдена БЭК-фаза, начинающаяся также примерно с $\mu_q^c = m_\pi/2$. С другой стороны, в работах [11–14] с Вильсоновскими фермионами ($N_f = 2$) не было найдено БЭК-фазы, но присутствовала БКШ-фаза. В случае Вильсоновских фермионов причина может крыться в плохих киральных свойствах формулировки теории [25]. Для работ с фермионами Когута-Сасскинда проблема может быть в неудачном подборе параметров вычислений: малый размер решетки, слишком большая масса пиона, значение β близко к переходу теории между режимами сильной и слабой связи. Можно провести сравнение масс пиона для данного исследования и [9], поскольку в последнем используется схожая по размеру решетка (16^4), а в статье [81] приведена β -функция для двухцветного КХД с $N_f = 4$. Из приведенных здесь результатов $\mu_q^c a \simeq 0.12$, а в работе [9] $\mu_q^c a \simeq 0.29$ при большем шаге решетки. Из соотношения $\mu_q^c = m_\pi/2$

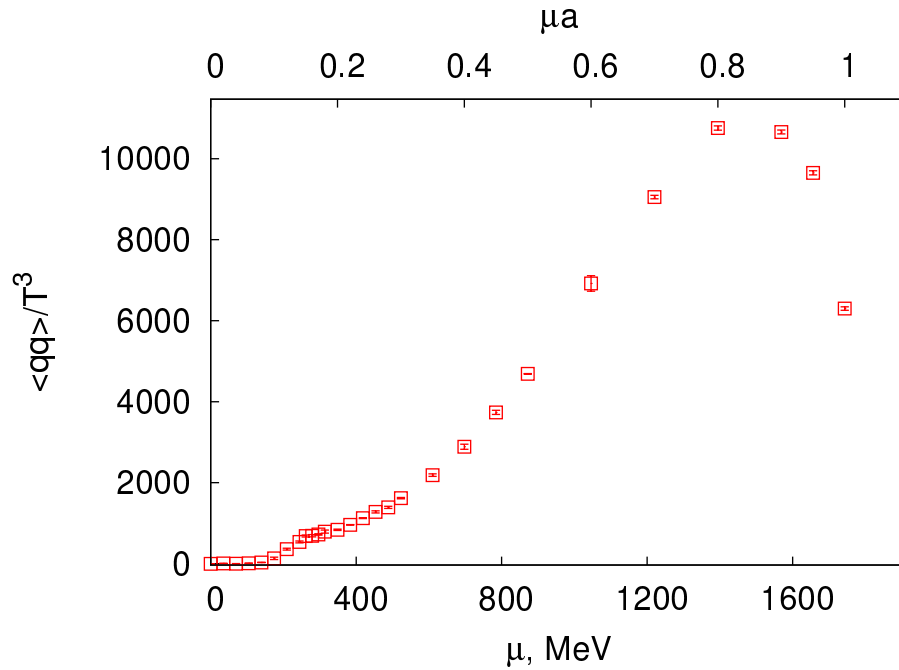


Рис. 4.5. Дикварковый конденсат $\langle qq \rangle / T^3$ при $\lambda = 0.0005$ как функция кваркового химического потенциала.

с учетом разных значений $a(\beta)$ получается, что в [9] пион примерно вдвое тяжелее, чем в данном диссертационном исследовании. Чтобы обнаружить БКШ-фазу химический потенциал должен быть достаточно большим, но при этом по мере приближения $\mu_q a$ к единице усиливаются артефакты, связанные с конечным шагом решетки. Таким образом, тяжелый пион может сдвинуть необходимые для БКШ-фазы значения химического потенциала в нефизическую область вычислений.

Рассмотрим теперь область $\mu_q a > 0.6$ ($\mu_q > 1055$ МэВ), чтобы попытаться найти область насыщения, поскольку при $\mu_q > 1055$ МэВ дикварковый конденсат начинает отклоняться от поведения $\sim \mu_q^2$, характерного для БКШ-фазы (см. рис. 4.4). На таких значениях химического потенциала расчеты становятся весьма вычислительно тяжелыми из-за увеличения числа обусловленности у оператора $M^\dagger M + \lambda^2$, однако было обнаружено, что физические наблюдаемые становятся менее чувствительными к значению λ , поэтому при $\mu_q a > 0.6$ вычисления проводились при фиксированном $\lambda = 0.0005$. На рисунке 4.5 приведены

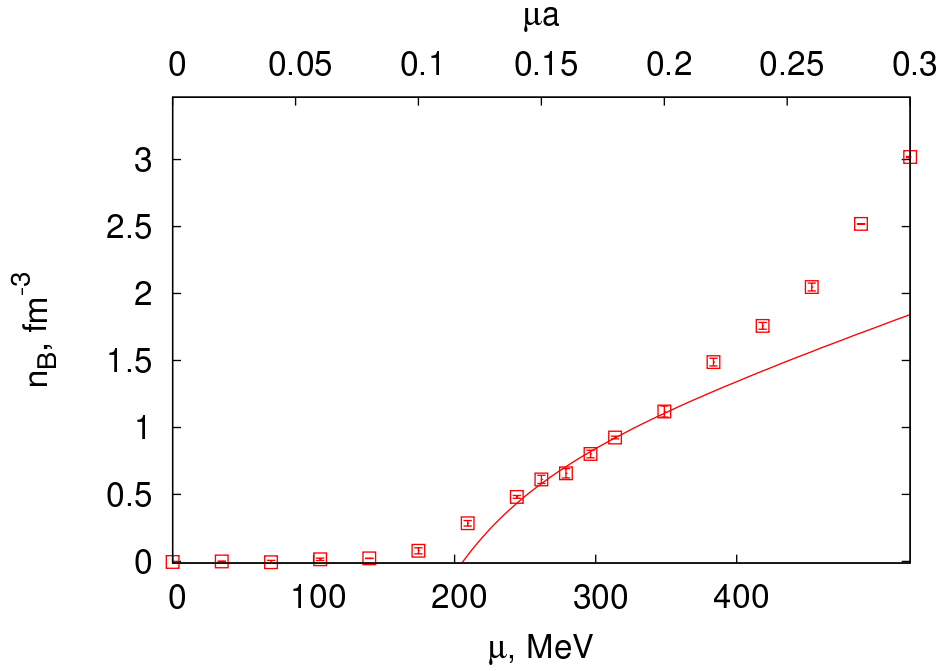


Рис. 4.6. Барионная плотность в физических единицах как функция кваркового химического потенциала. Кривая представляет собой фит формулой (4.13).

результаты для дикваркового конденсата при $\lambda = 0.0005$ и $\mu_q a \in [0.0; 1.0]$. Видно, что при $\mu_q > 1410$ МэВ ($a\mu_q > 0.8$) конденсат начинает снижаться, такое поведение может рассматриваться как артефактное и связано с конечностью числа узлов на решетке. Подобный спад $\langle qq \rangle$ в области $\mu_q a \sim 1$ был также найден в упомянутых выше работах [8, 9].

4.3. Барионная плотность

Обратимся теперь к зависимости барионной плотности от химического потенциала при нулевой температуре, для экстраполяции результатов в $\lambda \rightarrow 0$ использовалась формула $n_B(\lambda) = a + b\lambda^2$. Как и в случае с дикварковым конденсатом, рассмотрим сначала области химических потенциалов меньше массы пиона, чтобы проверить согласие с предсказаниями киральной теории возмущений. На рисунке 4.6 представлены результаты для барионной плотности в пределе $\lambda \rightarrow 0$ при $\mu_q a \leq 0.3$, из графика видно, что при достаточно малых

значениях химического потенциала, $\mu_q < 176$ МэВ ($\mu_q a < 0.1$), барионная плотность равна нулю, то есть $U(1)_B$ в адронной фазе не нарушена. Далее, по мере увеличения μ_q и прохождения критического значения $\mu_q^c \approx m_\pi/2$ можно наблюдать постепенное возрастание барионной плотности. Киральная теория возмущений в первом порядке дает зависимость (2.46), поэтому формулу для фита можно задать как (A и μ_q^c — параметры фита)

$$n_B = C (\mu_q - (\mu_q^c)^4/\mu_q^3) , \quad (4.13)$$

при фитировании с помощью которой имеющихся данных в области $\mu_q \in [263; 352]$ МэВ ($\mu_q a \in [0.15; 0.20]$) получается $\mu_q^c = 207(7)$ МэВ с $\chi^2/dof = 1.2$. Полученный результат для μ_q^c из барионной плотности согласуется со значением, полученным из фита дикваркового конденсата. Описанное поведение барионной плотности поддерживает сценарий перехода системы из адронной фазы в БЭК-фазу конденсации дикварков.

Из рисунка 4.6 также видно, что при $\mu_q > 352$ МэВ ($\mu_q a > 0.2$) данные начинают отклоняться от зависимости (4.13), то есть необходимо рассмотреть область более высоких значений химического потенциала на предмет БКШ-фазы, описанной ранее. В указанной сверхтекучей фазе барионная плотность должна быть пропорциональна объему Ферми-сферы, то есть $n_B \propto \mu_q^3$, поскольку кварки внутри Ферми-сферы являются в данной фазе основными степенями свободы. На рисунке 4.7 представлены результаты, нормированные на барионную плотность для свободных кварков в непрерывном случае, $n_0 = (2\mu_q^3)/(3\pi^2)$, и в решеточной формулировке (см. приложение А). Из рисунка видно, что в диапазоне $\mu_q \in (500; 750)$ МэВ ($\mu_q a \in [0.3; 0.5]$) указанное отношение для непрерывного случая хорошо ложится на константу, в то время как сама барионная плотность меняется примерно на порядок. Такое поведение является ещё одним аргументом в пользу существования БКШ-фазы в области $\mu_q \in (500; 750)$ МэВ наряду с описанным выше поведением дикваркового конденсата. Тот факт, что отношение плотностей для взаимодействующего и свободного случаев выходит

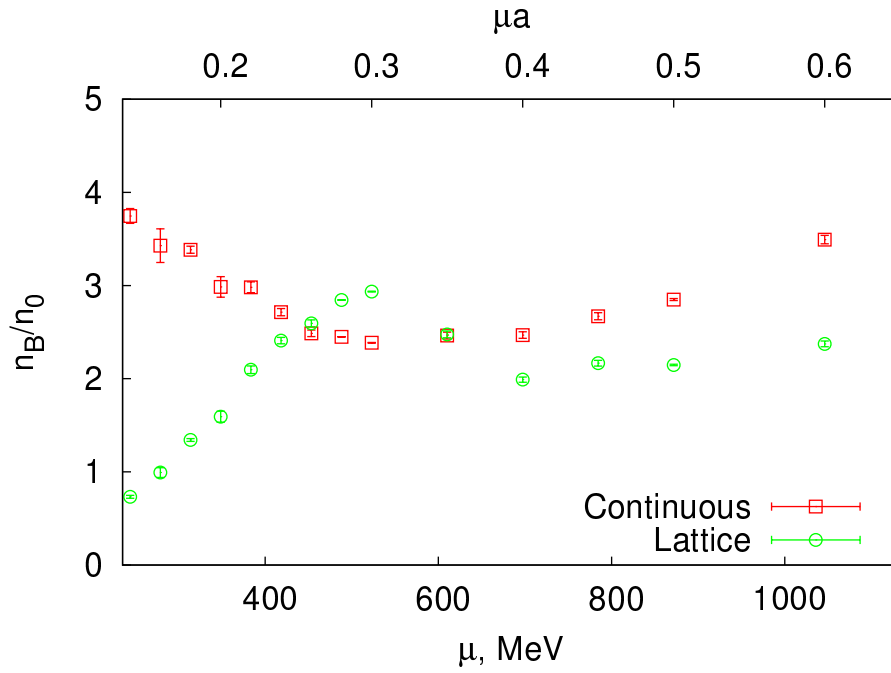


Рис. 4.7. Барийонная плотность, деленная на плотность для свободного случая, как функция кваркового химического потенциала. Для квадратов под n_0 понимается плотность для свободного непрерывного случая, $(2\mu_q^3)/(3\pi^2)$, а для кружков — плотность для свободного решеточного случая (формула (A.4) с $N_c = 2$ и учетом $n_B = n_q/2$).

не на единицу, а на 2.0 – 2.5, может быть объяснен наличием инфракрасных решеточных артефактов (подобные артефакты наблюдали в [13], см. рис. 6).

Особенностью решеточных вычислений является ограниченный пространственный объем рассматриваемой системы и ограниченное число узлов дискретизации (1.8). Фермионные поля заданы в узлах решетки, поэтому благодаря принципу Паули на одном узле не может находиться более $(2s + 1) \times N_f \times N_c = 2N_f N_c$ кварков. Соответственно, при очень больших значениях μ_q , по мере приближения $\mu_q a$ к 1, плотность кварков будет выходить на константу, что свидетельствует о насыщении системы и является эффектом конечного объема. Для проверки того, что рассмотренный выше диапазон $\mu_q a \in [0.0; 0.6]$ не затрагивает артефактную область, была посчитана кварковая плотность на решетке для свободного случая в области ($\mu_q a \in [0.0; 1.9]$), результаты представлены на рисунке 4.8 (для взаимодействующей теории рассматривался диапазон

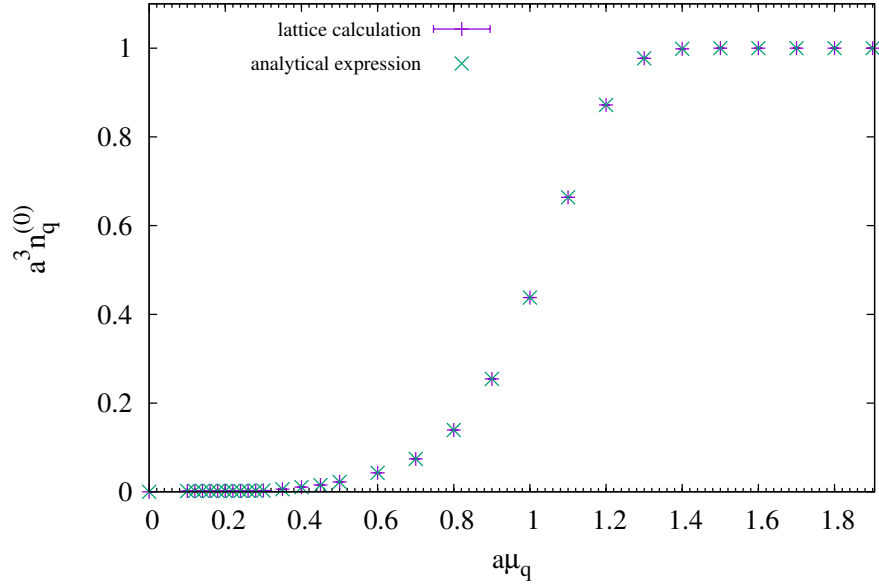


Рис. 4.8. Кварковая плотность в решеточной формулировке для свободного случая как функция кваркового химического потенциала. Фиолетовые точки представляют собой результат расчетов на конфигурациях без взаимодействия (все $U_{n,\mu} = 1$), зеленые крестики соответствуют формуле (A.4) с $N_c = 2$.

$\mu_q a \in [0.0; 1.0]$, на котором насыщения обнаружено не было, а численные расчеты при $\mu_q a > 1.0$ требуют больших вычислительных ресурсов). Из рисунка видно, что область насыщения начинается примерно с $\mu_q a = 1.3$ ($\mu_q \geq 2290$ МэВ), где кварковая плотность в решеточных единицах выходит на 1.0, что физически соответствует одному кварку на область пространства размером a^3 . Насыщение свободной кварковой плотности при $\mu_q a > 1.0$, а также возрастание n_B для взаимодействующей теории в диапазоне $\mu_q a \in [0.0; 1.0]$ позволяют сделать вывод о том, что область $\mu_q a \in [0.0; 0.6]$ ($\mu_q \in [0.0; 1050]$ МэВ), рассмотренная при анализе результатов, является безопасной с точки зрения эффектов конечного объема.

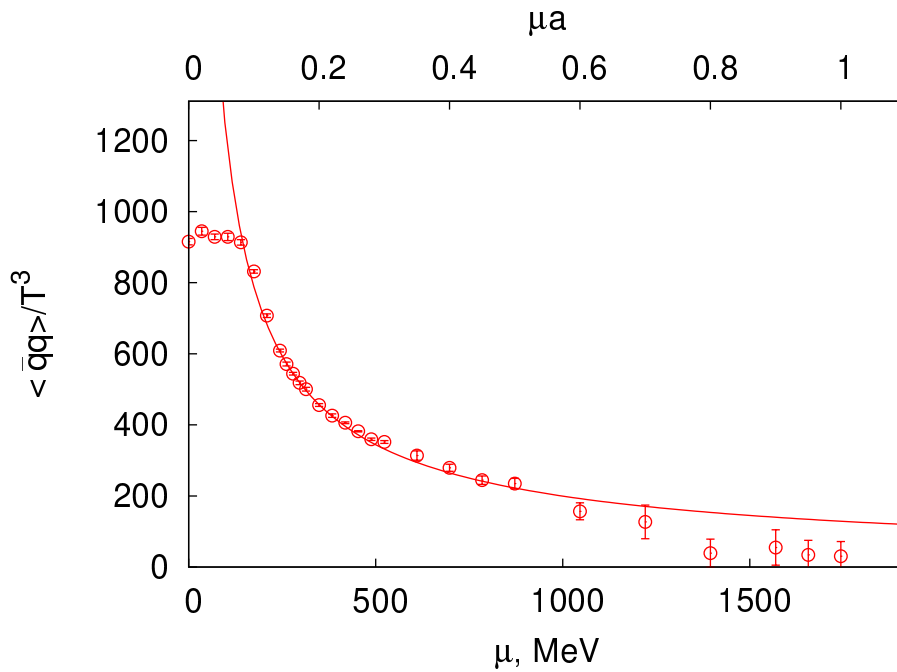


Рис. 4.9. Киральный конденсат как функция кваркового химического потенциала. Кривая представляет собой фит (4.14).

4.4. Киральный конденсат

В рамках данной работы также была исследована зависимость кирального конденсата от химического потенциала при нулевой температуре. В процессе расчетов было обнаружено, что киральный конденсат практически не зависит от λ , поэтому для экстраполяции в $\lambda \rightarrow 0$ использовался фит константой, либо брался результат при наименьшем λ .

На рисунке 4.9 представлены результаты для кирального конденсата при $\lambda = 0.0005$ и в диапазоне химического потенциала $\mu_q \in [0; 1800)$ МэВ. Важно отметить, что доверять можно лишь результатам при $\mu_q < 1100$ МэВ ($\mu_q a \leq 0.6$), поскольку при достаточно больших плотностях начинают проявляться артефакты, связанные с конечным объемом решетки, как было показано в предыдущих параграфах, а по мере приближения $\mu_q a$ к единице усиливаются ультрафиолетовые решеточные артефакты. Прежде всего из рисунка видно, что при достаточно малых значениях химического потенциала, $\mu_q < 180$ МэВ, киральный

конденсат остается постоянным, то есть киральная нарушена. Далее, после достижения $\mu_q \approx m_\pi/2$ киральный начинает уменьшаться, соответственно, киральная симметрия начинает восстанавливаться по мере перехода системы в БЭК-фазу, что согласуется с предсказаниями киральной теории возмущений в лидирующем порядке, описанными в главе 2.2. Однако, если фит представленных результатов формулой (2.44) в интервале $\mu_q a \in [0.15; 0.20]$ ($\mu_q \in [263; 352]$ МэВ) оказывается плохим, поэтому в качестве альтернативы была рассмотрена следующая зависимость:

$$\langle \bar{q}q \rangle = A/\mu_q^\alpha, \quad (4.14)$$

где A и α трактовались как параметры фита. Фит формулой (4.14) в интервале $\mu_q a \in [0.15; 0.20]$ дает $\chi^2/dof = 0.3$ и $\alpha = 0.78(2)$ (также следует отметить, что формула (4.14) хорошо согласуется с данными вплоть до $\mu_q < 900$ МэВ). Столь сильное расхождение в значении степени μ_q у кирального конденсата с предсказаниями киральной теории возмущений говорит о недостаточности учета только лидирующего порядка и возможной роли непертурбативных эффектов. Чтобы проверить данное предположение, можно проанализировать предыдущие исследования в рамках решеточного КХД. Хорошее согласие с ведущим порядком киральной теории возмущений было обнаружено в [61] для 1 аромата фермионов в присоединенном представлении, а также в [8] для $N_f = 4$ в фундаментальном представлении при $\beta = 1.5$. С другой стороны, в [9] были проведены вычисления для $N_f = 4$ при $\beta = 1.85$, где киральный конденсат продемонстрировал спад как $\langle \bar{q}q \rangle \propto 1/\mu_q^\alpha$ с $\alpha = 1 \dots 1.3$ (см. Таблицу 3 в [9]), что согласуется с представленными в данной диссертации результатами. Аналогичная зависимость $\langle \bar{q}q \rangle \propto 1/\mu_q$ была найдена в работе [10] для $N_f = 8$ фундаментальных кварков при $\beta = 1.3$. Можно сделать вывод о том, что поведение кирального конденсата в зависимости от μ_q чувствительно к тому, в режиме сильной или слабой связи находится система. Если значение β достаточно мало, то система в режиме сильной связи, где ведущего порядка киральной теории возмущений

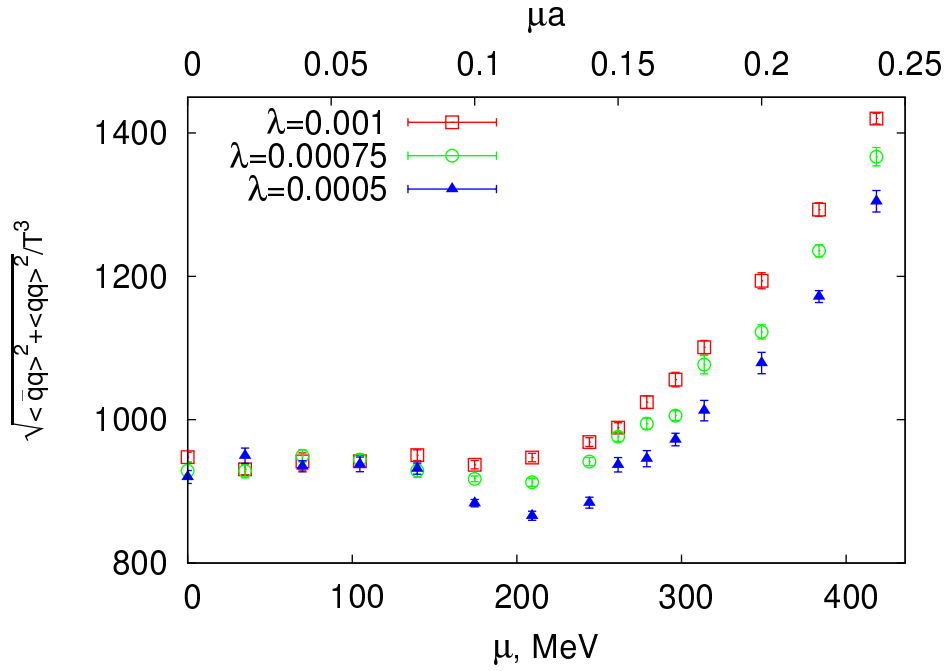


Рис. 4.10. Модуль вакуумного конденсата $\sqrt{\langle qq \rangle^2 + \langle \bar{q}q \rangle^2} / T^3$, вычисленный из дикваркового и кирального конденсатов, в зависимости от кваркового химического потенциала при трех значениях λ .

достаточно для хорошего описания результатов.

Рассмотрим теперь поворот вакуумного конденсата (2.29) по мере перехода теории из адронной фазы в БЭК-фазу. Из формул (2.44) и (2.45) видно, что величина $\sqrt{\langle qq \rangle^2 + \langle \bar{q}q \rangle^2}$ должна оставаться постоянной по мере увеличения μ_q на всей области применимости киральной теории возмущений (следует заметить, что учет следующего порядка теории нарушает соотношение $\sqrt{\langle qq \rangle^2 + \langle \bar{q}q \rangle^2} = \text{const}$ [6]). Вычисления в рамках решеточного КХД позволяют провести непосредственную проверку. На рисунке 4.10 показано поведение вакуумного конденсата в зависимости от μ_q . Из рисунка видно, что для дикваркового источника $\lambda = 0.001$ модуль вакуумного конденсата остается примерно постоянным при $\mu_q < 263$ МэВ ($\mu_q a < 0.15$). При $\lambda = 0.00075$ и 0.0005 отклонения от соотношения $\langle qq \rangle^2 + \langle \bar{q}q \rangle^2 = \text{const}$ можно наблюдать в области фазового перехода, при $\mu_q \in [176; 246]$ МэВ ($\mu_q a \in [0.1; 0.14]$), причем отклонения усиливаются по мере уменьшения λ . Такие отклонения могут быть объяснены

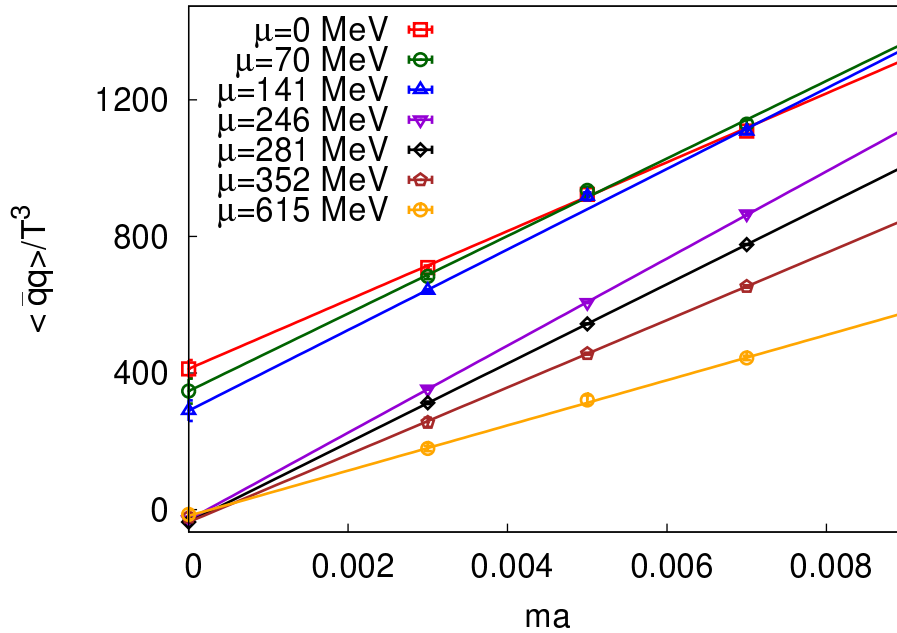


Рис. 4.11. Киральный предел для кирального конденсата, взятый при нескольких значениях кваркового химического потенциала.

близостью системы к точке фазового перехода, где учет только лидирующего порядка киральной теории возмущений недостаточен.

Отдельным интересным вопросом является восстановление киральной симметрии при конечной барионной плотности. Данные, приведенные на рис. 4.9, действительно указывают на восстановление киральной симметрии по мере увеличения химического потенциала, однако они получены при конечной затравочной массе кварков $ma = 0.005$, поэтому следует обратиться к киральному пределу. Для исследования кирального предела были взяты несколько точек по химическому потенциалу: $\mu_q = 0, 70$ и 141 МэВ в адронной фазе, $\mu_q = 246, 281, 352$ МэВ в БЭК-фазе и $\mu_q = 615$ ($\mu_q a = 0.35$) МэВ в БКШ-фазе. Для каждого из указанных значений кваркового химического потенциала были сгенерированы калибровочные конфигурации при трех значениях затравочной массы кварков: $ma = 0.0025, 0.005$ и 0.0075 . На рисунке 4.11 приведены значения кирального конденсата как функция ma при фиксированном μ_q , а также результаты киральной экстраполяции. Из рисунка видно, что в киральном пределе в фазах

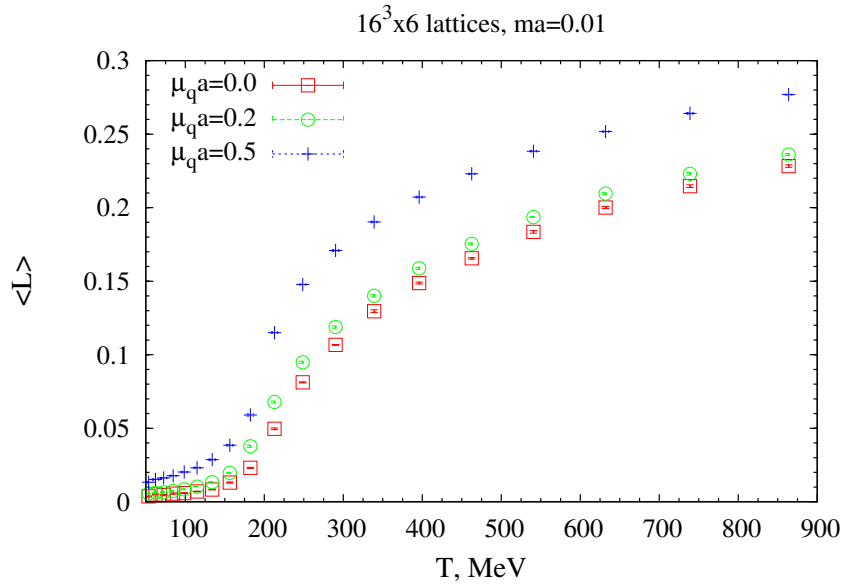


Рис. 4.12. Петля Полякова как функция температуры для трех значений решеточного химического потенциала.

БЭК и БКШ восстанавливается киральная симметрия, в то время как в адронной фазе киральная симметрия остается нарушенной. С другой стороны, масса пиона зависит от затравочной массы кварков, поэтому по мере уменьшения ma критический химический потенциал сдвигается в сторону нуля, то есть область адронной фазы уменьшается. Следует также отметить, что восстановление киральной симметрии в БЭК-фазе в киральном пределе согласуется с предсказаниями киральной теории возмущений [6, 53, 54].

4.5. Глюонные наблюдаемые

Помимо барионной плотности и конденсатов была также исследована петля Полякова (4.1) при нулевой и конечной температурах, петли Вильсона (4.2) при $T = 0$. Для системы с динамическими кварками петля Полякова является приближительным параметром порядка для фазового перехода “конфайнмент-деконфайнмент” (точным параметром порядка она выступает в чистой глюодинамике), а из времениподобных петель Вильсона можно получить потенциал

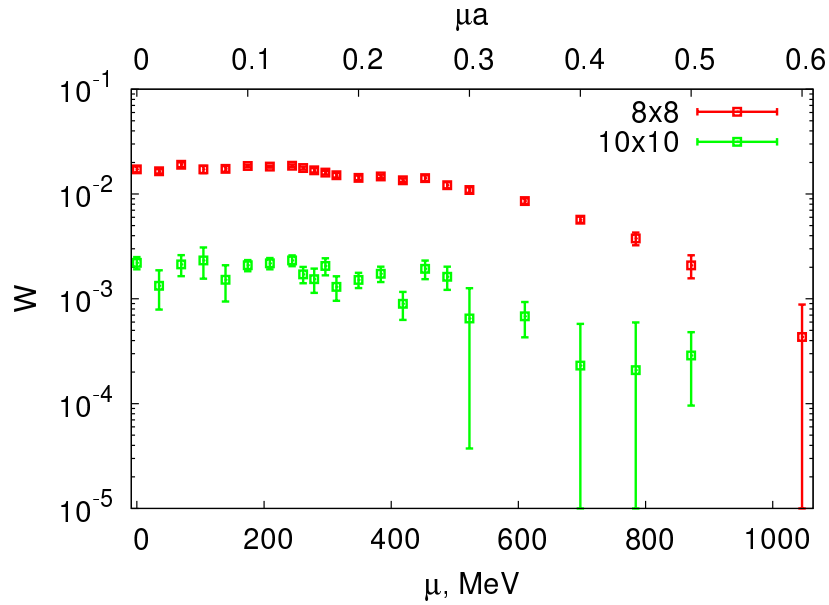


Рис. 4.13. Зависимость времениподобных прямоугольных петель Вильсона 8×8 и 10×10 от химического потенциала.

кварк-антикваркового взаимодействия при достаточно большой протяженности по времени [82]

$$W(R, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} C e^{-V(R)T}. \quad (4.15)$$

При нулевой температуре, для набора параметров, приведенных в начале главы 4, петля Полякова оказалась равной нулю в пределах ошибок для всех рассмотренных значений $\mu_q a \in [0.0; 1.0]$ и λ . Данный результат может быть объяснен либо тем, что даже при достаточно больших барионных плотностях система не переходит в состояние деконфайнмента, либо тем, что при нулевой температуре в рамках решеточного КХД невозможно получить четкий сигнал для петли Полякова. Также было выдвинуто предположение о том, что $\langle L \rangle$ подвержена сильной перенормировке, для проверки которого было проведено сглаживание методом градиентного потока [83–85] калибровочных конфигураций, полученных для нескольких значений химического потенциала, $\mu_q a = 0.0, 0.1, \dots, 0.45$. Однако, перенормированная петля Полякова также оказалась равна нулю в пределах ошибок.

Также было рассмотрено поведение петли Полякова при конечной темпера-

туре, расчеты проводились на решетках $16^3 \times 6$ с $ma = 0.01$ и $\beta = 1.6 \dots 2.7$ для трех значений решеточного кваркового химического потенциала: $\mu_q a = 0.0, 0.2$ и 0.5 , результаты представлены на рисунке 4.12. Из рисунка видно, что при фиксированной температуре увеличение химического потенциала приводит к возрастанию петли Полякова, то есть к переходу системы в состояние деконфайнмента. Данные результаты качественно согласуются с представлениями о критической линии на фазовой диаграмме КХД, полученных в решеточном КХД путем аналитического продолжения из области чисто мнимого химического потенциала в действительную [86–88].

Что касается петель Вильсона, то в данной работе при нулевой температуре были вычислены прямоугольные времениподобные петли размером 8×8 и 10×10 , результаты представлены на рисунке 4.13, при расчетах использовалась схема сглаживания, описанная в разделе 4.1. Следует отметить, что для больших по размеру петель Вильсона соотношение “сигнал/шум” довольно плохое, что может быть связано с недостаточным пространственным размером решетки ($N_s = 16$). Из рис. 4.13 видно, что для химического потенциала $\mu_q \in [0; 263]$ МэВ ($\mu_q a \in [0.0; 0.15]$) наблюдается плато, а затем, начиная с $\mu > 352$ МэВ ($\mu > 0.2$), Вильсоновских петли уменьшаются, то есть кварк-антикварковый потенциал увеличивается. Можно заключить, что при $T = 0$ система находится в конфайнменте для всех рассмотренных значений химического потенциала. Возможное объяснение такого поведения может состоять в отсутствии Дебаевского экранирования в двухцветном КХД при нулевой температуре [55, 89].

Результаты разделов 4.1–4.5 третьей главы опубликованы в работах [15–18].

4.6. Результаты с улучшенным калибровочным действием

В разделах 4.2 и 4.3 было продемонстрировано, что физические результаты, полученные в рамках решеточного моделирования, могут быть подвержены

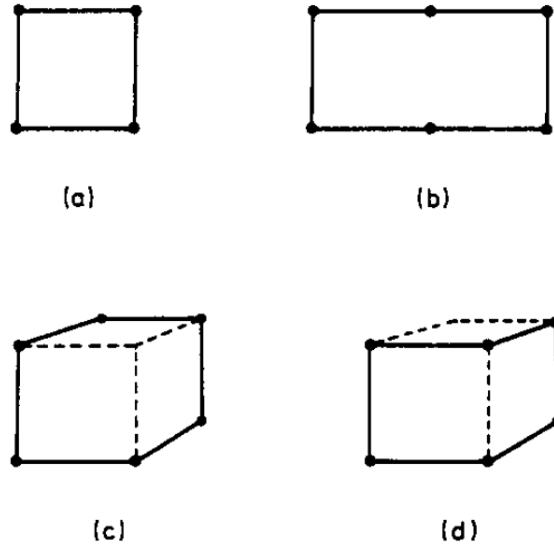


Рис. 4.14. (a) — грань (1.14), (b), (c), (d) — возможные виды замкнутых контуров, состоящих из шести ребер (рисунок из работы [90]).

влиянию артефактов, связанных с конечным шагом решетки. Для подавления таких артефактов была предложена следующая идея [91, 92]: можно добавить в решеточное действие дополнительные члены, которые не будут менять непрерывный предел, но будут ослаблять влияние решеточных артефактов на физические результаты. Для калибровочного действия Вильсона (1.15) можно добавить члены, содержащие замкнутые контуры большего размера, наименьшие такие контуры после грани будут состоять из 6 ребер. Соответственно, калибровочное действие примет вид [93]

$$\begin{aligned}
 S_G^{(impr.)}[U] &= \frac{\beta}{N_c} \sum_n \left(c^{(4)}(g^2) \sum_{\mu < \nu} \text{Re} [I - \text{Tr} (U_{n,\mu\nu})] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=b,c,d} c_i^{(6)}(g^2) \sum_{\mu \neq \nu} \text{Re} \left[I - \text{Tr} \left(U_{n,\mu\nu}^{(6)i} \right) \right] \right), \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

где $U_{n,\mu\nu}^{(6)i}$ представляют собой замкнутые контуры, изображенные на рисунке 4.14 под обозначениями b, c, d . Коэффициенты $c^{(4)}(g^2)$ и $c^{(6)}(g^2)$ вычисляются в рамках теории возмущений, на уровне древесных диаграмм они были вычислены в [93–95]. В работе [90] был проведен расчет данных коэффициентов

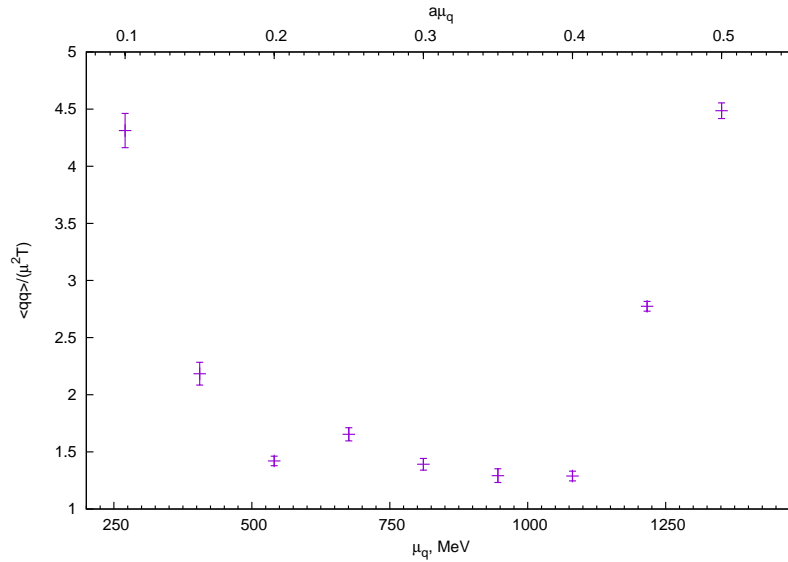


Рис. 4.15. Дикварковый конденсат $\langle qq \rangle / T^3$, вычисленный на конфигурациях с улучшенным калибровочным действием, как функция химического потенциала.

в одной петле для $SU(2)$ -теории:

$$c^{(4)}(g^2) = \frac{5}{3} + 0.1352g^2, \quad (4.17)$$

$$c_b^{(6)}(g^2) = -\frac{1}{12} - 0.01396g^2, \quad (4.18)$$

$$c_c^{(6)}(g^2) = -0.00295g^2, \quad (4.19)$$

$$c_d^{(6)}(g^2) = 0. \quad (4.20)$$

Легко видеть, что наиболее удобно использовать улучшенное калибровочное действие в режиме слабой связи ($g^2 \rightarrow 0$), поскольку в таком случае достаточно учета только плоских прямоугольных контуров ((b) на рис. 4.14).

В рамках данного диссертационного исследования были также проведены расчеты с улучшенным калибровочным действием вида

$$S_G^{(impr.)}[U] = \frac{\beta}{2} \sum_n \left(\frac{5}{3} \sum_{\mu < \nu} \text{Re} [I - \text{Tr} (U_{n,\mu\nu})] \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \sum_{\mu \neq \nu} \text{Re} \left[I - \text{Tr} \left(U_{n,\mu\nu}^{(6)b} \right) \right] \right) \quad (4.21)$$

и обычным оператором Дирака (3.1). Была рассмотрена решетка 32^4 , проведены

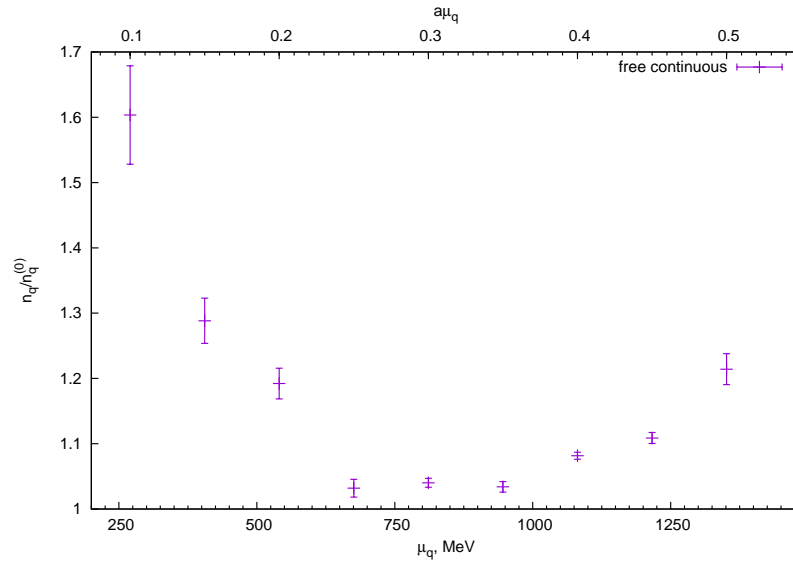


Рис. 4.16. Кварковая плотность, посчитанная на конфигурациях с улучшенным калибровочным действием, деленная на плотность для свободного случая, $(2\mu_q^3)/(3\pi^2)$, как функция кваркового химического потенциала.

фиксация масштаба и измерение массы пиона для нескольких значений β аналогично процедурам из раздела 4.1. Были выбраны следующие параметры расчетов: $\beta = 1.85$, $m_q a = 0.0075$, что соответствует шагу решетки $a = 0.073(1)$ фм ($L_s \approx 2.34$ фм) и $M_\pi = (435 \pm 25)$ МэВ ($M_\pi L_s \approx 5.15$). Таким образом, можно проверить, сохраняются ли представленные в разделах 4.2 и 4.3 результаты при большем объеме решетки и меньшем шаге. Химический потенциал брался в диапазоне $\mu_q a \in [0.0; 0.5]$, а величина дикваркового источника была фиксирована как $\lambda = 0.00075$.

При малых значениях химического потенциала для улучшенного действия была получена аналогичная фазовая структура: адронная фаза при $\mu_q < 200$ МэВ, далее переход в фазу конденсации скалярных дикварков при $\mu_q \approx 210$ МэВ ($\mu_q a \approx 0.08$). Однако, гораздо более интересной является область больших значений μ_q ($\mu_q \geq m_\pi$). На рисунке 4.15 приведено отношение $\langle qq \rangle / (T\mu_q^2)$ при $\mu_q \geq 250$ МэВ ($\mu_q a \geq 0.1$), полученное в вычислениях с улучшенным действием. Легко видеть, что на участке $\mu_q \in (540; 1080)$ МэВ ($\mu_q a \in (0.2; 0.4)$) дан-

ные выходят на константу, то есть величина $\langle qq \rangle$ пропорциональна площади поверхности Ферми-сферы, что говорит в пользу перехода в БКШ-фазу. Обратимся теперь к кварковой плотности, на рисунке 4.16 представлена плотность в том же диапазоне μ_q , нормированная на плотность для свободных кварков в непрерывном случае, $n_0 = (2\mu_q^3)/(3\pi^2)$. Из рисунка видно, что в области $\mu_q \in (675; 950)$ МэВ ($\mu_q a \in [0.25; 0.35]$) указанное отношение выходит на плато со значением ≈ 1.05 (сравните с рис. 4.7 для обычного действия), что является ещё одним аргументом в пользу существования БКШ-фазы в данной области.

Таким образом, при расчетах на большей по размеру решетке, с меньшим шагом, улучшенным калибровочным действием и примерно такой же массой пиона БКШ-фаза сохраняется, более того, отношение $n_q/n_q^{(0)}$ становится значительно ближе к единице по сравнению с результатами для обычного действия, что говорит об успешном подавлении артефактов улучшенным действием.

Заключение

В настоящей диссертационной работе было проведено исследование фазовой диаграммы двухцветного КХД с двумя ароматами динамических кварков при помощи формализма квантовой теории поля на решетке. Для проведения решеточного моделирования был написан программный код на языке CUDA C. Были определены зависимости барионной плотности, кирального и дикваркового конденсатов от барионного химического потенциала при нулевой температуре, а также исследованы зависимости петель Вильсона от барионного химического потенциала при нулевой температуре и петли Полякова от барионного химического потенциала при нулевой и конечной температурах.

Впервые в результате численного моделирования были получены все три фазы, предсказанные в теоретической работе [42]. Впервые для случая двух ароматов при нулевой температуре было исследовано восстановление киральной симметрии в БКШ-фазе в киральном пределе.

Положения, выносимые на защиту:

- Показано, что при нулевой температуре для двухцветного КХД могут существовать три фазы: адронная фаза при малых значениях μ_q ; фаза Бозе-Эйнштейновской конденсации скалярных дикварков при промежуточных значениях μ_q ($m_\pi/2 < \mu_q < \mu_d$); фаза конденсации кварковых куперовских пар при больших значениях барионного химического потенциала ($\mu_q > \mu_d$).
- В адронной и БЭК-фазах получено согласие с киральной теорией возмущений в лидирующем порядке для поведения дикваркового конденсата и барионной плотности. Для кирального конденсата показана недостаточность учета только лидирующего порядка.
- Впервые исследовано поведение кирального конденсата в пределе нулевой массы при конечной барионной плотности. Показано, что в БКШ-фазе

происходит восстановление киральной симметрии.

- Показано, что при конечной температуре по мере увеличения химического потенциала система переходит в состояние деконфайнмента.

Благодарности

Автор благодарен Виктору Валериевичу Брагуге за предложенную тему диссертации, научное руководство и ценные советы. Автор признателен Александру Валентиновичу Молочкову за предоставление рабочего места и разного рода замечания. Автор весьма обязан Михаилу Игоревичу Поликарпову за спасение от деградации, Андрею Юрьевичу Котову и Никите Астраханцеву, в лице которых встретил адекватных людей и хороших товарищей. Автор признателен Олегу Владимировичу Павловскому за полезные советы и указания на хорошую литературу по квантовой теории поля. Автор благодарен Эрнсту-Михаэлю Ильгенфрицу, Петро Жидичи, Джон-Ивару Скуллеруду, Саймону Хэндсу, Лоренцу фон Смекалу, Лукасу Холицки и Дональду Синклару за обсуждения работы, интерес к тематике исследования и ценные комментарии. Автор выражает признательность Андрею Садофьеву, который всегда был для него примером в учебе и труде.

Список литературы

1. Ding H.-T., Karsch F., Mukherjee S. Thermodynamics of strong-interaction matter from Lattice QCD // *Int. J. Mod. Phys.* 2015. Vol. E24, no. 10. P. 1530007. [arXiv:hep-lat/1504.05274](#).
2. Philipsen O. The QCD phase diagram at zero and small baryon density // *PoS.* 2006. Vol. LAT2005. P. 016. [PoSJHW2005,012(2006)]. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0510077](#).
3. Muroya S., Nakamura A., Nonaka C., Takaishi T. Lattice QCD at finite density: An Introductory review // *Prog. Theor. Phys.* 2003. Vol. 110. P. 615–668. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0306031](#).
4. Hanada M., Yamamoto N. Universality of Phases in QCD and QCD-like Theories // *JHEP.* 2012. Vol. 02. P. 138. [arXiv:hep-ph/1103.5480](#).
5. Kogut J. B., Stephanov M. A., Toublan D. et al. QCD - like theories at finite baryon density // *Nucl. Phys.* 2000. Vol. B582. P. 477–513. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0001171](#).
6. Splittorff K., Toublan D., Verbaarschot J. J. M. Diquark condensate in QCD with two colors at next-to-leading order // *Nucl. Phys.* 2002. Vol. B620. P. 290–314. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0108040](#).
7. Kogut J. B., Toublan D., Sinclair D. K. Diquark condensation at nonzero chemical potential and temperature // *Phys. Lett.* 2001. Vol. B514. P. 77–87. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0104010](#).
8. Kogut J. B., Sinclair D. K., Hands S. J., Morrison S. E. Two color QCD at nonzero quark number density // *Phys. Rev.* 2001. Vol. D64. P. 094505. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0105026](#).
9. Kogut J. B., Toublan D., Sinclair D. K. The Phase diagram of four flavor SU(2) lattice gauge theory at nonzero chemical potential and temperature // *Nucl. Phys.* 2002. Vol. B642. P. 181–209. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0205019](#).
10. Hands S., Kogut J. B., Lombardo M.-P., Morrison S. E. Symmetries and spec-

- trum of SU(2) lattice gauge theory at finite chemical potential // *Nucl. Phys.* 1999. Vol. B558. P. 327–346. [arXiv:hep-lat/hep-lat/9902034](#).
11. Hands S., Kim S., Skullerud J.-I. Deconfinement in dense 2-color QCD // *Eur. Phys. J.* 2006. Vol. C48. P. 193. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0604004](#).
 12. Hands S., Kim S., Skullerud J.-I. A Quarkyonic Phase in Dense Two Color Matter? // *Phys. Rev.* 2010. Vol. D81. P. 091502. [arXiv:hep-lat/1001.1682](#).
 13. Cotter S., Giudice P., Hands S., Skullerud J.-I. Towards the phase diagram of dense two-color matter // *Phys. Rev.* 2013. Vol. D87, no. 3. P. 034507. [arXiv:hep-lat/1210.4496](#).
 14. Boz T., Cotter S., Fister L. et al. Phase transitions and gluodynamics in 2-colour matter at high density // *Eur. Phys. J.* 2013. Vol. A49. P. 87. [arXiv:hep-lat/1303.3223](#).
 15. Braguta V. V., Ilgenfritz E. M., Kotov A. Yu. et al. Study of the phase diagram of dense two-color QCD within lattice simulation // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D94, no. 11. P. 114510. [arXiv:hep-lat/1605.04090](#).
 16. Braguta V. V., Kotov A. Yu., Nikolaev A. A., Valgushev S. N. Lattice simulation study of SU(2) QCD with a nonzero baryon density // *JETP Lett.* 2015. Vol. 101, no. 11. P. 732–734. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.101,no.11,827(2015)].
 17. Braguta V. V., Kotov A. Yu., Nikolaev A. A., Valgushev S. N. Lattice simulation of two-color QCD with $N_f = 2$ at non-zero baryon density // *Journal of Physics: Conference Series.* 2016. Vol. 668, no. 1. P. 012120. URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/668/i=1/a=012120>.
 18. Braguta V. V., Kotov A. Yu., Nikolaev A. A., Valgushev S. N. Lattice simulation of QC_2D with $N_f = 2$ at non-zero baryon density // *PoS.* 2016. Vol. LATTICE2015. P. 186. [arXiv:hep-lat/1511.04842](#).
 19. Peskin M. E., Schroeder D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Advanced Book Program. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
 20. Wilson K. G. Confinement of quarks // *Phys. Rev.* 1974. Vol. D10. P. 2445.
 21. Zinn-Justin J. *Path Integrals in Quantum Mechanics.* New York, USA: Oxford

- University Press, 2005.
22. Montvay I., Münster G. Quantum Fields on a Lattice. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1994.
 23. Kogut J., Susskind L. Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories // *Phys. Rev.* 1975. Vol. D11. P. 395.
 24. Neuberger H. More about exactly massless quarks on the lattice // *Phys. Lett.* 1998. Vol. B427. P. 353–355. [arXiv:hep-lat/9801031](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9801031).
 25. Rothe H. J. Lattice Gauge Theories: An Introduction. World Scientific Lecture Notes in Physic. Singapore: World Scientific Publishing, 2005.
 26. Hasenfratz P., Karsch F. Chemical Potential on the Lattice // *Phys. Lett.* 1983. Vol. B125. P. 308–310.
 27. Roberge A., Weiss N. Gauge Theories With Imaginary Chemical Potential and the Phases of QCD // *Nucl. Phys.* 1986. Vol. B275. P. 734–745.
 28. de Forcrand P., Philipsen O. Constraining the QCD phase diagram by tricritical lines at imaginary chemical potential // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 105. P. 152001. [arXiv:hep-lat/1004.3144](https://arxiv.org/abs/hep-lat/1004.3144).
 29. Bonati C., de Forcrand P., D'Elia M. et al. Chiral phase transition in two-flavor QCD from an imaginary chemical potential // *Phys. Rev.* 2014. Vol. D90, no. 7. P. 074030. [arXiv:hep-lat/1408.5086](https://arxiv.org/abs/hep-lat/1408.5086).
 30. Nagata K., Nakamura A. Imaginary Chemical Potential Approach for the Pseudo-Critical Line in the QCD Phase Diagram with Clover-Improved Wilson Fermions // *Phys. Rev.* 2011. Vol. D83. P. 114507. [arXiv:hep-lat/1104.2142](https://arxiv.org/abs/hep-lat/1104.2142).
 31. Kogut J. B., Sinclair D. K. Lattice QCD at finite isospin density at zero and finite temperature // *Phys. Rev.* 2002. Vol. D66. P. 034505. [arXiv:hep-lat/0202028](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0202028).
 32. Kogut J. B., Sinclair D. K. The Finite temperature transition for 2-flavor lattice QCD at finite isospin density // *Phys. Rev.* 2004. Vol. D70. P. 094501. [arXiv:hep-lat/0407027](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0407027).

33. Endrödi G. Magnetic structure of isospin-asymmetric QCD matter in neutron stars // *Phys. Rev.* 2014. Vol. D90, no. 9. P. 094501. [arXiv:hep-lat/1407.1216](#).
34. Cabibbo N., Parisi G. Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation // *Phys. Lett.* 1975. Vol. B59. P. 67–69.
35. Baym G. Confinement and deconfinement of quarks in nuclear matter // *Prog. in Part. and Nucl. Phys.* 1982. Vol. 8. P. 73–101.
36. Baym G. Ultrarelativistic heavy ion collisions: the first billion seconds // *Nucl. Phys.* 2016. Vol. A956. P. 1–10. [arXiv:nucl-ex/1701.03972](#).
37. Andronic A. et al. Hadron Production in Ultra-relativistic Nuclear Collisions: Quarkyonic Matter and a Triple Point in the Phase Diagram of QCD // *Nucl. Phys.* 2010. Vol. A837. P. 65–86. [arXiv:hep-ph/0911.4806](#).
38. Schäfer T., Wilczek F. High density quark matter and the renormalization group in QCD with two and three flavors // *Phys. Lett.* 1999. Vol. B450. P. 325–331. [arXiv:hep-ph/hep-ph/9810509](#).
39. Son D. T. Superconductivity by long range color magnetic interaction in high density quark matter // *Phys. Rev.* 1999. Vol. D59. P. 094019. [arXiv:hep-ph/hep-ph/9812287](#).
40. Buballa M. NJL model analysis of quark matter at large density // *Phys. Rept.* 2005. Vol. 407. P. 205–376. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0402234](#).
41. Hong D. K., Miransky V. A., Shovkovy I. A., Wijewardhana L. C. R. Schwinger-Dyson approach to color superconductivity in dense QCD // *Phys. Rev.* 2000. Vol. D61. P. 056001. [Erratum: *Phys. Rev.*D62,059903(2000)]. [arXiv:hep-ph/hep-ph/9906478](#).
42. McLerran L., Pisarski R. D. Phases of cold, dense quarks at large $N(c)$ // *Nucl. Phys.* 2007. Vol. A796. P. 83–100. [arXiv:hep-ph/0706.2191](#).
43. Gorda T., Romatschke P. Equation of state in two-, three-, and four-color QCD at nonzero temperature and density // *Phys. Rev.* 2015. Vol. D92, no. 1. P. 014019. [arXiv:hep-ph/1412.6712](#).
44. Son D. T., Stephanov M. A. QCD at finite isospin density // *Phys. Rev. Lett.*

2001. Vol. 86. P. 592–595. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0005225](#).
45. de Forcrand P., Stephanov M. A., Wenger U. On the phase diagram of QCD at finite isospin density // PoS. 2007. Vol. LAT2007. P. 237. [arXiv:hep-lat/0711.0023](#).
46. Lucini B., Panero M. SU(N) gauge theories at large N // *Phys. Rept.* 2013. Vol. 526. P. 93–163. [arXiv:hep-th/1210.4997](#).
47. Lucini B., Teper M., Wenger U. Topology of SU(N) gauge theories at $T = 0$ and $T = T(c)$ // *Nucl. Phys.* 2005. Vol. B715. P. 461–482. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0401028](#).
48. Lucini B., Rago A., Rinaldi E. SU(N_c) gauge theories at deconfinement // *Phys. Lett.* 2012. Vol. B712. P. 279–283. [arXiv:hep-lat/1202.6684](#).
49. Astrakhantsev N. Yu., Braguta V. V., Kotov A. Yu. Study of shear viscosity of SU(2)-gluodynamics within lattice simulation // *JHEP*. 2015. Vol. 09. P. 082. [arXiv:hep-lat/1507.06225](#).
50. Meyer H. B. A Calculation of the shear viscosity in SU(3) gluodynamics // *Phys. Rev.* 2007. Vol. D76. P. 101701. [arXiv:hep-lat/0704.1801](#).
51. DeGrand T., Liu Y. Lattice study of large N_c QCD // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D94, no. 3. P. 034506. [Erratum: *Phys. Rev.*D95,no.1,019902(2017)]. [arXiv:hep-lat/1606.01277](#).
52. Caselle M., Castagnini L., Feo A. et al. Thermodynamics of SU(N) Yang-Mills theories in 2+1 dimensions II. The Deconfined phase // *JHEP*. 2012. Vol. 05. P. 135. [arXiv:hep-th/1111.0580](#).
53. Kogut J. B., Stephanov M. A., Toublan D. On two color QCD with baryon chemical potential // *Phys. Lett.* 1999. Vol. B464. P. 183–191. [arXiv:hep-ph/hep-ph/9906346](#).
54. Splittorff K., Son D. T., Stephanov M. A. QCD - like theories at finite baryon and isospin density // *Phys. Rev.* 2001. Vol. D64. P. 016003. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0012274](#).
55. Kanazawa T., Wettig T., Yamamoto N. Chiral Lagrangian and spectral sum

- rules for dense two-color QCD // [JHEP](#). 2009. Vol. 08. P. 003. [arXiv:hep-ph/0906.3579](#).
56. Gilmore R. Lie groups, Lie algebras, and some of the applications. USA: John Wiley & Sons, 1974.
57. Weinberg S. Phenomenological Lagrangians // [Physica](#). 1979. Vol. A96. P. 327–340.
58. Gasser J., Leutwyler H. Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark // [Nucl. Phys.](#) 1985. Vol. B250. P. 465–516.
59. Leutwyler H. On the foundations of chiral perturbation theory // [Annals Phys.](#) 1994. Vol. 235. P. 165–203. [arXiv:hep-ph/hep-ph/9311274](#).
60. Splittorff K., Toublan D., Verbaarschot J. J. M. Thermodynamics of chiral symmetry at low densities // [Nucl. Phys.](#) 2002. Vol. B639. P. 524–548. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0204076](#).
61. Hands S., Montvay I., Morrison S. et al. Numerical study of dense adjoint matter in two color QCD // [Eur. Phys. J.](#) 2000. Vol. C17. P. 285–302. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0006018](#).
62. Clark M. A. The Rational Hybrid Monte Carlo Algorithm // [PoS](#). 2006. Vol. LAT2006. P. 004. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0610048](#).
63. Clark M. A., Kennedy A. D. Accelerating dynamical fermion computations using the rational hybrid Monte Carlo (RHMC) algorithm with multiple pseudofermion fields // [Phys. Rev. Lett.](#) 2007. Vol. 98. P. 051601. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0608015](#).
64. Ratti C., Weise W. Thermodynamics of two-colour QCD and the Nambu Jona-Lasinio model // [Phys. Rev.](#) 2004. Vol. D70. P. 054013. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0406159](#).
65. Brauner T., Fukushima K., Hidaka Y. Two-color quark matter: $U(1)(A)$ restoration, superfluidity, and quarkyonic phase // [Phys. Rev.](#) 2009. Vol. D80. P. 074035. [Erratum: [Phys. Rev.D81,119904\(2010\)](#)]. [arXiv:hep-ph/0907.4905](#).
66. Sun G.-f., He L., Zhuang P. BEC-BCS crossover in the Nambu-Jona-Lasinio

- model of QCD // *Phys. Rev.* 2007. Vol. D75. P. 096004. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0703159](#).
67. He L. Nambu-Jona-Lasinio model description of weakly interacting Bose condensate and BEC-BCS crossover in dense QCD-like theories // *Phys. Rev.* 2010. Vol. D82. P. 096003. [arXiv:hep-ph/1007.1920](#).
68. Strodthoff N., Schaefer B.-J., von Smekal L. Quark-meson-diquark model for two-color QCD // *Phys. Rev.* 2012. Vol. D85. P. 074007. [arXiv:hep-ph/1112.5401](#).
69. Strodthoff N., von Smekal L. Polyakov-Quark-Meson-Diquark Model for two-color QCD // *Phys. Lett.* 2014. Vol. B731. P. 350–357. [arXiv:hep-ph/1306.2897](#).
70. von Smekal L. Universal Aspects of QCD-like Theories // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 2012. Vol. 228. P. 179–220. [arXiv:hep-ph/1205.4205](#).
71. Kamikado K., Strodthoff N., von Smekal L., Wambach J. Fluctuations in the quark-meson model for QCD with isospin chemical potential // *Phys. Lett.* 2013. Vol. B718. P. 1044–1053. [arXiv:hep-ph/1207.0400](#).
72. Vanderheyden B., Jackson A. D. Random matrix study of the phase structure of QCD with two colors // *Phys. Rev.* 2001. Vol. D64. P. 074016. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0102064](#).
73. Kanazawa T., Wettig T., Yamamoto N. Chiral random matrix theory for two-color QCD at high density // *Phys. Rev.* 2010. Vol. D81. P. 081701. [arXiv:hep-ph/0912.4999](#).
74. Kanazawa T., Wettig T., Yamamoto N. Singular values of the Dirac operator in dense QCD-like theories // *JHEP.* 2011. Vol. 12. P. 007. [arXiv:hep-ph/1110.5858](#).
75. Kanazawa T., Wettig T., Yamamoto N. Banks-Casher-type relation for the BCS gap at high density // *Eur. Phys. J.* 2013. Vol. A49. P. 88. [arXiv:hep-lat/1211.5332](#).
76. Bazavov A. et al. The chiral and deconfinement aspects of the QCD transition // *Phys. Rev.* 2012. Vol. D85. P. 054503. [arXiv:hep-lat/1111.1710](#).

77. Hasenfratz A., Knechtli F. Flavor symmetry and the static potential with hypercubic blocking // *Phys. Rev.* 2001. Vol. D64. P. 034504. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0103029](#).
78. Albanese M. et al. Glueball Masses and String Tension in Lattice QCD // *Phys. Lett.* 1987. Vol. B192. P. 163–169.
79. Bornyakov V. G., Ilgenfritz E. M., Müller-Preussker M. Universality check of Abelian monopoles // *Phys. Rev.* 2005. Vol. D72. P. 054511. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0507021](#).
80. Nakamura A. Quarks and Gluons at Finite Temperature and Density // *Phys. Lett.* 1984. Vol. B149. P. 391.
81. Ilgenfritz E. M., Kalinowski M., Müller-Preussker M. et al. Two-color QCD with staggered fermions at finite temperature under the influence of a magnetic field // *Phys. Rev.* 2012. Vol. D85. P. 114504. [arXiv:hep-lat/1203.3360](#).
82. Bali G. S., Schilling K. Static quark - anti-quark potential: Scaling behavior and finite size effects in SU(3) lattice gauge theory // *Phys. Rev.* 1992. Vol. D46. P. 2636–2646.
83. Petreczky P., Schadler H. P. Renormalization of the Polyakov loop with gradient flow // *Phys. Rev.* 2015. Vol. D92, no. 9. P. 094517. [arXiv:hep-lat/1509.07874](#).
84. Lüscher M. Properties and uses of the Wilson flow in lattice QCD // *JHEP.* 2010. Vol. 08. P. 071. [Erratum: JHEP03,092(2014)]. [arXiv:hep-lat/1006.4518](#).
85. Luscher M. Trivializing maps, the Wilson flow and the HMC algorithm // *Commun. Math. Phys.* 2010. Vol. 293. P. 899–919. [arXiv:hep-lat/0907.5491](#).
86. de Forcrand P., Philipsen O. The Chiral critical line of $N(f) = 2+1$ QCD at zero and non-zero baryon density // *JHEP.* 2007. Vol. 01. P. 077. [arXiv:hep-lat/hep-lat/0607017](#).
87. Bonati C., D’Elia M., Mariti M. et al. Curvature of the chiral pseudocritical line in QCD: Continuum extrapolated results // *Phys. Rev.* 2015. Vol. D92, no. 5. P. 054503. [arXiv:hep-lat/1507.03571](#).
88. Bellwied R., Borsanyi S., Fodor Z. et al. The QCD phase diagram from an-

- alytic continuation // [Phys. Lett.](#) 2015. Vol. B751. P. 559–564. [arXiv:hep-lat/1507.07510](#).
89. Rischke D. H. Debye screening and Meissner effect in a two flavor color superconductor // [Phys. Rev.](#) 2000. Vol. D62. P. 034007. [arXiv:nucl-th/nucl-th/0001040](#).
90. Luscher M., Weisz P. Computation of the Action for On-Shell Improved Lattice Gauge Theories at Weak Coupling // [Phys. Lett.](#) 1985. Vol. B158. P. 250–254.
91. Symanzik K. Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 1. Principles and ϕ^4 Theory // [Nucl. Phys.](#) 1983. Vol. B226. P. 187–204.
92. Symanzik K. Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 2. $O(N)$ Nonlinear Sigma Model in Perturbation Theory // [Nucl. Phys.](#) 1983. Vol. B226. P. 205–227.
93. Weisz P. Continuum Limit Improved Lattice Action for Pure Yang-Mills Theory. 1. // [Nucl. Phys.](#) 1983. Vol. B212. P. 1–17.
94. Weisz P., Wohlert R. Continuum Limit Improved Lattice Action for Pure Yang-Mills Theory. 2. // [Nucl. Phys.](#) 1984. Vol. B236. P. 397. [Erratum: [Nucl. Phys.](#)B247,544(1984)].
95. Curci G., Menotti P., Paffuti G. Symanzik’s Improved Lagrangian for Lattice Gauge Theory // [Phys. Lett.](#) 1983. Vol. B130. P. 205. [Erratum: [Phys. Lett.](#)B135,516(1984)].
96. Berg E. J. Heaviside’s Operational Calculus. New York, USA: McGraw-Hill, 1936.
97. Kapusta J. I., Gale C. Finite-Temperature Field Theory. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2006.

Приложение А

Свободная барионная плотность для решеточной формулировки

Рассмотрим кварковую плотность для свободных фермионов Когута-Сасскинда с ненулевым барионным химическим потенциалом. Пусть для определенности $N_f = 1$, а дикварковый член отсутствует. По определению плотность равна

$$a^3 n_q^0 = \frac{1}{N_s^3 N_\tau} \frac{1}{4} \frac{\partial(\log Z^{(0)})}{\partial(\mu_q a)} = \frac{1}{N_s^3 N_\tau} \frac{1}{4} \text{Tr} \left(\frac{\partial M_{(0)}}{\partial(\mu_q a)} M_{(0)}^{-1} \right), \quad (\text{A.1})$$

где множитель $1/4$ введен из-за того, что 1 аромат фермионов Когута-Сасскинда соответствует четырем физическим ароматам фермионов (см. раздел 1.2).

При конечно μ_q оператор Дирака (1.43) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(M_{(0)} \right)_{xy} &= m_q b (I \times I) \delta_{xy} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \left[(\gamma_\mu \times I) (\delta_{x+\hat{\mu},y} - \delta_{x-\hat{\mu},y}) \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_5 \times \tau_\mu \tau_5) (\delta_{x+\hat{\mu},y} + \delta_{x-\hat{\mu},y} - 2\delta_{xy}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(\gamma_4 \times I) (e^{\mu_q a} \delta_{x+\hat{4},y} - e^{-\mu_q a} \delta_{x-\hat{4},y} + 2 \sinh(\mu_q a) \delta_{xy}) \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_5 \times \tau_4 \tau_5) (e^{\mu_q a} \delta_{x+\hat{4},y} + e^{-\mu_q a} \delta_{x-\hat{4},y} - 2 \cosh(\mu_q a) \delta_{xy}) \right], \end{aligned}$$

а его производная

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M_{(0)}}{\partial(\mu_q a)} \right)_{xy} &= \frac{1}{2} \left[(\gamma_4 \times I) \left(e^{\mu_q a} \delta_{x+\hat{4},y} + e^{-\mu_q a} \delta_{x-\hat{4},y} + 2 \cosh(\mu_q a) \delta_{xy} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_5 \times \tau_4 \tau_5) \left(e^{\mu_q a} \delta_{x+\hat{4},y} - e^{-\mu_q a} \delta_{x-\hat{4},y} - 2 \sinh(\mu_q a) \delta_{xy} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где индексы x и y обозначают гиперкубы со сторонами $b = 2a$ (также можно рассматривать их как индексы узлов решетки с шагом $2a$), а в конструкциях вида $(A \times B)$ первая матрица действует в пространстве Дирака, вторая — в пространстве ароматов. Соответственно, кварковый пропагатор в координат-

ном пространстве будет иметь вид

$$\left(M_{(0)}^{-1}\right)_{yx} = \frac{2^4}{N_s^3 N_\tau} \sum_k e^{ik(y-x)} \Delta_k, \quad (\text{A.3})$$

где $k_\mu = p_\mu b$ — импульсы на решетке из гиперкубов, а кварковый пропагатор в импульсном пространстве

$$\begin{aligned} \Delta_k = & \left[m_q b (I \times I) + \sum_{\mu=1}^3 \left(-i (\gamma_\mu \times I) \sin(k_\mu) + (\gamma_5 \times \tau_\mu \tau_5) 2 \sin^2(k_\mu/2) \right) \right. \\ & - (\gamma_4 \times I) (i \sin(k_4 - i\mu_q a) + \sinh(\mu_q a)) + \\ & \left. + (\gamma_5 \times \tau_4 \tau_5) (\cosh(\mu_q a) - \cos(k_4 - i\mu_q a)) \right] / \\ & \left[(m_q b)^2 + 4 \sin^2(k_4/2 - i\mu_q a) + 4 \sum_{\mu=1}^3 \sin^2(k_\mu/2) \right]. \end{aligned}$$

После подстановки (A.2) и (A.3) в (A.1), вычисления следов и сумм получается следующее выражение (N_c обозначает число цветов), которое представляет собой свободную барионную плотность в решеточной формулировке:

$$a^3 n_q^0 = \frac{N_c}{4} \frac{2^4}{N_s^3 N_\tau} \sum_k \frac{1}{2i} \frac{\sin(k_4 - 2i\mu_q a)}{(m_q a)^2 + \sin^2(k_4/2 - i\mu_q a) + \sum_{j=1}^3 \sin^2(k_j/2)}. \quad (\text{A.4})$$

Для проверки полезно рассмотреть непрерывный предел (A.4). При $N_s \rightarrow \infty$, $N_t \rightarrow \infty$ (a фиксирован) суммирование в (A.4) может быть заменено интегрированием:

$$a^3 n_q^0 = \frac{N_c}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_4}{2\pi} \frac{1}{2i} \frac{\sin(k_4 - i2\mu_q a)}{(m_q a)^2 + \sin^2(k_4/2 - i\mu_q a) + \sum_{j=1}^3 \sin^2(k_j/2)}, \quad (\text{A.5})$$

где $d^3 \mathbf{k}/(2\pi)^3$ следует переписать как $(2a)^3 d^3 \mathbf{p}/(2\pi)^3$, чтобы избавиться от множителя a^3 перед n_q^0 . Для интегрирования по k_4 в (A.5) может выбрать прямоугольный контур с одной стороной вида $Re[k_4] \in [-\pi; \pi]$, $Im[k_4] = 0$ и противоположной стороной вида $Re[k_4] \in [-\pi; \pi]$, $Im[k_4] \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_4}{2\pi} \frac{\sin(k_4 - i2\mu_q a)}{(m_q a)^2 + \sin^2(k_4/2 - i\mu_q a) + \sum_{j=1}^3 \sin^2(k_j/2)} = \\ & \Theta \left[e^{\mu_q a} - B - \sqrt{B^2 + 1} \right] + \Theta \left[e^{\mu_q a} + B - \sqrt{B^2 + 1} \right] - 1, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

где $B = \sqrt{(m_q a)^2 + \sum_{j=1}^3 \sin^2(k_j/2)}$, а Θ представляет собой степ-функцию Хэвисайда [96]. Если шаг решетки достаточно мал, то

$$\begin{aligned} & \Theta \left[e^{\mu_q a} - B - \sqrt{B^2 + 1} \right] + \Theta \left[e^{\mu_q a} + B - \sqrt{B^2 + 1} \right] - 1 \rightarrow \\ & \Theta \left[\mu_q a - a \sqrt{m_q^2 + \mathbf{p}^2} \right] + \Theta \left[\mu_q a + a \sqrt{m_q^2 + \mathbf{p}^2} \right] - -1 = \frac{1}{1 + e^{-l[\mu_q - E(\mathbf{p})]a}} \Big|_{l \rightarrow \infty} \\ & + \frac{1}{1 + e^{-l[\mu_q + E(\mathbf{p})]a}} \Big|_{l \rightarrow \infty} - 1 = \left(\frac{1}{e^{l(E(\mathbf{p}) - \mu_q)a} + 1} - \frac{1}{e^{l(E(\mathbf{p}) + \mu_q)a} + 1} \right) \Big|_{l \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

В приведенном выше выражении l представляет собой действительный параметр, который стремится к бесконечности. В нашем случае логично принять $l = N_t$, числу узлов решетки по времени, тогда для (A.5) в пределе $a \rightarrow 0$ получается следующее выражение:

$$n_q^0 = 2N_c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{(E(\mathbf{p}) - \mu_q)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(E(\mathbf{p}) + \mu_q)/T} + 1} \right), \quad (\text{A.7})$$

которое совпадает со стандартной формулой для одного аромата свободных кварков [97]. Таким образом, решеточная формулировка в терминах фермионов Когута-Сасскинда дает правильный непрерывный предел для барионной плотности. Случае нулевой температуры и релятивистских кварков ($E(\mathbf{p}) = \sqrt{p^2 + m^2}$) интегрирование в (A.7) может быть проведено аналитически, что дает

$$n_q^0 = N_f N_c \frac{p_F^3}{3\pi^2}, \quad p_F = \sqrt{\mu_q^2 - m^2}. \quad (\text{A.8})$$

Если масса кварков мала по сравнению с химическим потенциалом, то можно считать $p_F = \mu_q$.