

На правах рукописи



Бойда Денис Леонидович

**Исследование сильновзаимодействующих систем методами
квантовой теории поля на решетке**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток — 2018

Работа выполнена в Дальневосточном федеральном университете и в Институте теоретической и экспериментальной физики имени А.И.Алиханова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт».

Научные руководители: **Александр Валентинович Молочков**
д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической и ядерной физики ШЕН ДВФУ
Виктор Валериевич Брагута
д.ф.-м.н., доцент, заведующий лабораторией решеточных калибровочных теорий НИЦ "Курчатовский институт" - ИТЭФ"

Официальные оппоненты: **Александр Викторович Бережной,**
д.ф.-м.н., профессор РАН, заведующий Лабораторией тяжёлых кварков и редких распадов Отдела экспериментальной физики высоких энергий НИИЯФ МГУ

Александр Сергеевич Горский,
д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник лаборатории №5 «Квантовая физика и информация» ИПФИ РАН

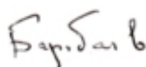
Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 17 октября 2018 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 520.009.03 на базе НИЦ «Курчатовский институт» по адресу: 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЦ «Курчатовский институт» и на сайте www.nrcki.ru.

Автореферат разослан «__» августа 2018г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 520.009.03,
д.ф.-м. н.



А.Л. Барабанов

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Квантовая теория поля является одним из основных инструментов современной теоретической физики. Ее активно используют такие разделы как физика высоких энергий, физика элементарных частиц и физика конденсированного состояния. Применение квантовой теории поля к описанию явлений электромагнетизма привело к созданию очень успешной теории - квантовой электродинамики. Однако, существует целый пласт физических задач, исследование которых затруднено. Не смотря на то, что эти задачи относятся к разным разделам физики, они все принадлежат к классу сильновзаимодействующих системам. В таких системах константа связи является большой величиной и возникают сильные корреляции между составными частями, что приводит к множеству интересных явлений. Физика этих явлений изучена достаточно плохо по причине неприменимости пертурбативных методов. С другой стороны, последнее время был хорошо развит подход КТП на решетке, который позволяет получить результаты с помощью численных методов. К сожалению, использование данного подхода в некоторых случаях является единственной альтернативой применению моделей и допущений.

Классической сильновзаимодействующей системой является кварк-глюонная/адронная материя, одно из наиболее интересных свойств которой состоит в явлении конфайнмента при низких температурах и фазовом переходе в фазу деконфайнмента происходящим при высокой температуре [17–19]. Для низких плотностей или нулевого химического потенциала данное явление изучено достаточно хорошо теоретически, в частности, с помощью подхода КТП на решетке, кроме того ведутся активные экспериментальные исследования, например, на Большом адронном коллайдере (LHC) и Релятивистском коллайдере тяжелых ионов (RHIC). С другой стороны, интересная фазовая структура проявляется при более высоких плотностях, что соответствует введению ненулевого химического потенциала в теории. В частности, высказываются соображения о существовании трикритической точки [20; 21]. Исследование фазовой диаграммы кварк-глюонной/адронной материи при более высоких плотностях в плоскости температура-химический потенциал важно не только для физики частиц, но и для астрофизики и космологии. В этом направлении также ведутся экспериментальные исследования и продолжают строиться ускорители элементарных частиц. В Дубне в Объединенном институте ядерных исследований планируется эксперимент NICA, в Германии - FAIR (GSI) и в Японии - J-PARC(КЕК/JAEA). Данные полученные с новых установок потребуют теоретического описания, поэтому развитие теоретического аппарата для описания сильновзаимодействующих систем является крайне важным.

Другая интересная сильно взаимодействующая система, позволяющая изучать эффекты физики высоких энергий, пришла из физики твердого тела. Этой системой является одно из аллотропных форм углерода - графен [22]. Графен

привлек большое внимание, т.к., с одной стороны является двумерным материалом с необычными свойствами, а с другой, из-за линейного спектра представляет собой уникальную лабораторию, позволяющую изучать явления физики высоких энергий, которые в обычных условиях исследуются на ускорителях элементарных частиц [23; 24]. Поведение квазичастиц в графене описывается с помощью двумерного уравнения Дирака для безмассовых частиц, взаимодействующих посредством калибровочного поля $U(1)$, при этом константа связи в этой теории близка к двойке, что делает графен сильно взаимодействующей системой. Такое формальное сходство между ультра релятивистской частицей и электронами в графене делает его настольной лабораторией в которой можно исследовать различные эффекты релятивистской квантовой физики как теоретически, так и экспериментально.

Теоретическое исследование систем в сильной связи является достаточно трудоемкой задачей. Пертурбативные методы не могут быть применены, поэтому как правило в теоретических исследованиях делаются различные приближения. С другой стороны, можно проводить численное Монте-Карло моделирование, основанное на методе квантовой теории поля на решетке, которое хоть и не объясняет физический механизм, позволяет делать расчеты с контролируемыми погрешностями, т.к. основано на первых принципах квантовой теории поля. С помощью данного подхода удалось получить множество важных теоретических результатов, например, температуру фазового перехода кварк-глюонной/адронной материи при нулевой плотности, натяжение струны и спектр адронов, совсем недавно с помощью данного метода была определена масса протона с точностью 1% [25]. Однако, проведение теоретических расчетов для конечных плотностей, вызывает дополнительные трудности. Хорошо работающий метод квантовой теории поля на решетке, не может предоставить удовлетворительные результаты вычисления с ненулевым химическим потенциалом из-за так называемой ”проблемы знака”[17].

С целью разрешения этой проблемы было проделано множество исследований [19], однако, до сих пор остается очень сложно получить достоверные результаты при $\mu_q/T > 1$. Наиболее распространенным является подход основанный на разложении в ряд Тейлора [26—28]: логарифм функции большого канонического распределения раскладывают в ряд по степеням химического потенциала (μ_q/T), проводится Монте-Карло вычисления коэффициентов ряда при нулевом химическом потенциале, ряд собирается и делается экстраполяция в область ненулевых значений. Ведутся дискуссии относительно радиуса сходимости ряда, однако, общепринятым считается, что метод дает достоверные результаты для $\mu_q/T \leq 1$. Кроме того, существует проблема перекрытия: функция распределения с которой генерируются конфигурации может плохо перекрываться с реальной физической функцией распределения, определяющейся значением фермионного детерминанта при ненулевом μ_q , из-за этого коэффициенты разложения, рассчитанные при нулевом химическом потенциале, могут иметь большую систематическую ошибку. Однако, перекрытие может быть

улучшено, если проводить моделирование при различных значениях химического потенциала, что возможно только в мнимой области из-за выше упомянутой проблемы знака. Поэтому существует другой подход - используя Монте-Карло моделирование, проводят вычисления термодинамической наблюдаемой в мнимой области μ_q , после чего фитируют решеточные данные какой-либо функцией и делают аналитическое продолжение этой функции в область действительного химического потенциала. Как и подход разложения в ряд Тейлора данный метод позволяет получить данные для низких μ_q/T [28—32], но имеет ряд недостатков. Во-первых, данный метод не позволяет найти линию фазового перехода, т.к. последняя предполагает нарушение аналитичности. Во-вторых, возникают трудности при определении доверительной области полученных данных в области действительного химического потенциала. Дело в том, что нет однозначного мнения какую функцию фитирования выбирать для барионной/кварковой плотности при температуре близкой к T_c , а выбор разных функций фитирования приводит к совершенно разным предсказаниям. Таким образом, на текущий момент является крайне актуальной разработка новых подходов для исследования сильновзаимодействующих систем при конечных плотностях.

Стоит обратить внимание, что в отличие от классической системы в сильной связи, кварк-глюонной/адронной материи, свойства графена не так хорошо изучены теоретически даже для нулевых плотностей. В противоположность этому, открытие такого "удобного" материала, являющегося сильновзаимодействующей системой, способствовало проведению активных экспериментальных исследований, что привело к образованию пропасти между наличием большого количества экспериментальных данных и их теоретическим описанием. В частности, одной из острых проблем является вопрос вклада многочастичных эффектов в оптическую проводимость. Различные теоретические модели [33—41] дают противоречивые сценарии не смотря на то, что эксперимент [42; 43] явно утверждает низкое значение радиационных поправок, в пределах нескольких процентов.

С другой стороны, существующие данные показывают, что описание графена эффективной теорией поля не достаточно точно и позволяет получать только качественные выводы [44; 45]. Дело в том, что эффективная теория описывает взаимодействие электронов π -связей атомов углерода, находящихся в узлах кристаллической решетки. Однако, на текущий момент практически не остается сомнений, что чистое Кулоновское взаимодействие π -электронов экранируется электронами, образующими σ связи между атомами кристаллической решетки, а результирующий потенциал значительно отличается от потенциала Кулона на маленьких расстояниях [46]. Учет данного экранирования в подходе КТП на решетке показал [47], что фазовый переход полуметалл-диэлектрик смещается в не физическую область диэлектрических проницаемостей подложки, что соответствует экспериментальным данным. Таким образом, вычисление вклада радиационных поправок в оптическую проводимость графена, как и

вычисления спектра проводимости с полным учетом межэлектронного взаимодействия является чрезвычайно актуальным вопросом.

Целью исследования проведенного в данной диссертации является изучение термодинамических свойств сильновзаимодействующих систем методами квантовой теории поля на решетке.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. исследовать зависимость функций канонического распределения от кваркового/барионного числа при различных температурах в фазах конфайнмента и деконфайнмента;
2. определить зависимость барионной плотности и более высоких моментов кварк-глюонной/адронной материи от химического потенциала при различных температурах;
3. исследовать влияние многочастичных эффектов в оптическую проводимость графена;
4. вычислить спектр проводимости $\sigma(\omega)$ графена с полным учетом межэлектронного взаимодействия.

Научная новизна: В рамках канонического подхода разработан новый способ проведения аналитического продолжения в область действительного химического потенциала. Следует отметить, что канонический подход сам по себе позволяет проводить вычисления при любом значении химического потенциала, однако, он требует использования функций канонического распределения Z_n , вычисление которых достаточно проблематично и не может быть выполнено для физических параметров. В частности, их можно получить с помощью вычисления собственных значений фермионного детерминанта [48], что возможно только для маленьких решеток из-за ограничения по памяти или с помощью разложения по хоппинг параметру, работающего только при больших массах кварков. Кроме того, обычно вычисления проводятся при нулевом химическом потенциале, что из-за проблемы перекрытия функций распределения может иметь высокую систематическую ошибку. В диссертации предложен способ вычисления Z_n с помощью интегрирования кварковой плотности, вычисленной в мнимой области. Данный способ не имеет принципиальных ограничений, а его ошибка определяется только количеством использованных компьютерных ресурсов.

Показано, что в мнимой области химического потенциала в фазе конфайнмента барионная/кварковая плотность хорошо описывается рядом Фурье, а в фазе деконфайнмента - рядом Тейлора. Данный результат уже был установлен в работе [32], но в диссертации были получены более низкие ошибки, и сделаны другие выводы относительно количества коэффициентов ряда.

Используя полученные данные, в диссертации были восстановлены коэффициенты разложения в ряд Тейлора с более высокой точностью, чем в предыдущей работе [26]. Также полученные результаты подтверждают выводы о том, что вычисление коэффициентов ряда Тейлора с помощью Монте-Карло

моделирования в мнимой области дает более низкую ошибку чем стандартные методы [28—32].

В диссертации получены новые данные барионной/кварковой плотности для химического потенциала $\mu_B/T > 3$ в фазе конфайнмента и $\mu_B/T \approx 3$ в фазе деконфайнмента, и предложен способ определения области достоверных значений, что проблематично сделать при использовании прямого аналитического продолжении результатов, полученных в мнимой области.

Впервые получены непертурбативные результаты полного учета радиационных поправок в оптическую проводимость графена. Полученные результаты подтверждают сценарий слабого изменения проводимости вследствие многочастичных эффектов. Сделанные выводы согласуются с экспериментом [43] и аналитическими вычислениями [33; 34; 38; 39; 41].

Предложен новый способ регуляризации метода Бакуса-Гилберта используемого для решения интегрального уравнения Грина-Кубо, который позволил впервые вычислить полный спектр проводимости графена с полным учетом межэлектронного взаимодействия.

Теоретическая и практическая значимость Предложенный в диссертации способ проведения аналитического продолжения позволяет вычислять функцию большого канонического распределения и другие термодинамические величины для любых значений химического потенциала. В работе использовались анзацы для барионной/кварковой плотности в мнимой области, что значительно уменьшило необходимые компьютерные ресурсы. Однако, предложенный способ позволяет проводить вычисления без использования неконтролируемых приближений при достаточном количестве компьютерных ресурсов. Данный метод имеет высокую теоретическую значимость, т.к. является не многочленной альтернативой метода разложения в ряд Тейлора. Таким образом, предложенный подход позволяет проводить исследования термодинамических свойств сильновзаимодействующих систем при ненулевой плотности. Кроме того, как показано в диссертации, можно использовать само Монте-Карло моделирование в мнимой области химического потенциала для вычисления коэффициентов ряда Тейлора.

Разработанный в работе подход позволяет проводить вычисления термодинамических величин в области действительного химического потенциала. А используя анализ функций канонического распределения, можно определять область доверительных значений. Показано, что сравнение полученных данных с результатами экспериментов по столкновению частиц, позволяет проводить интерпретацию экспериментальных данных. В частности, на основе данных RHIC в работе оценена температура образовавшейся кварк-глюонной/адронной материи в результате столкновении тяжелых ионов при различных энергиях.

Вычисленная в работе оптическая проводимость графена позволила сделать вывод о полном сокращении радиационных поправок, что из-за большой константы связи является важным результатом для теоретической физики и

может послужить толчком для дальнейших теоретических исследований. Кроме того построенный формализм позволяет изучать более тонкие эффекты, в частности, с небольшими изменениями в программном комплексе можно исследовать квантовый эффект Холла.

Вычисленный в работе полный спектр проводимости графена может быть полезен при проектировании устройств на основе графена в нанoeлектронике, а предложенный способ регуляризации метода Бакуса-Гилберта позволяет применять его для извлечения транспортных коэффициентов.

Методология и методы исследования. В диссертации используется подход квантовой теории поля на решетке, который позволяет получить физические результаты из первых принципов квантовой теории поля. При исследовании кварк-глюонной/адронной материи в качестве решеточных дискретизаций выбраны калибровочное действие Ивасаки и улучшенное действие Вильсона. В случае графена для вывода функции канонического распределения использовались Грассмановы переменные и преобразование Хаббарда-Стратоновича. В качестве потенциала взаимодействия выбирался реалистичный потенциал взаимодействия, который на маленьких расстояниях учитывает экранирование Кулоновского потенциала σ электронами, а на больших соответствует потенциалу Кулона. Численные вычисления проводились с помощью алгоритма Гибридного Монте-Карло.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. предложен новый способ вычисления термодинамических величин сильновзаимодействующих систем при конечных плотностях;
2. получены новые данные численного измерения барионной/кварковой плотности в области мнимого химического потенциала для разных температур и найдены функции параметризации;
3. вычислены функции канонического распределения Z_n , которые сильно спадают с ростом числа кварков n в фазе конфайнмента и гораздо слабее в фазе деконфайнмента; не найдено никакого изменения зависимости функций от n ;
4. вычислена барионная/кварковая плотность и более высокие моменты для действительного химического потенциала в фазе конфайнмента при $\mu_B/T > 3$ и в фазе деконфайнмента для $\mu_B/T \approx 3$;
5. показано, что сопоставление решеточных данных полученных в работе позволяет определить температуру кварк-глюонной/адронной материи образовавшейся в экспериментах по столкновению тяжелых ионов; данные RHIC [49] для энергий 19.6, 27, 39, 64.2 ГэВ соответствуют фазе конфайнмента с температурой порядка $T/T_c \approx 0.93$ в то время, как температура для энергии 11.5 ГэВ значительно меньше;
6. развит метод вычисления транспортных коэффициентов и на его основе вычислен полный спектр проводимости $\sigma(\omega)$ графена во всей области частот и установлено, что эффекты взаимодействия не приводят к значительному изменению спектра;

7. показано, что полный вклад многочастичных эффектов в оптическую проводимость графена составляет несколько процентов.

Достоверность и **Апробация работы**. Достоверность выводов обеспечена надежностью применявшихся методов и подтверждается результатами апробации работы. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях:

1. The 32 International Symposium on Lattice Field Theory "Lattice 2014"(Нью-Йорк, США, 2014)
2. The Helmholtz International Summer School "Lattice QCD, Hadron Structure and Hadronic Matter" 2014 (Дубна, Россия, 2014)
3. The international workshop «Monte Carlo methods in computer simulations of complex systems» 2014 (Владивосток, Россия, 2014) - личное участие
4. 18th Moscow International School of Physics (Москва, Россия, 2015) - личное участие
5. The XXV International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions: Quark Matter 2015 (Кобе, Япония, 2015)
6. The 33 International Symposium on Lattice Field Theory "Lattice 2016"(Кобе, Япония, 2016) - личное участие
7. XXIII International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems "Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics"(Дубна, Россия, 2016)
8. XII the Quark Confinement and the Hadron Spectrum (Салоники, Греция, 2016)
9. "Phase structure of lattice field theories Japanese-German Seminar 2016 - (Ниигата, Япония, 2016) - личное участие
10. The international workshop "Monte Carlo methods in complex system modeling"(Владивосток, Россия, 2016) - личное участие
11. The 35th International Symposium on Lattice Field Theory "Lattice 2017"(Гранада, Испания, 2017) - личное участие
12. The international workshop «Monte Carlo methods in computer simulations of complex systems» (Владивосток, Россия, 2017) - личное участие

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы, который состоит в непосредственном участии в разработке программного комплекса для проведения Монте Карло моделирования кварк-глюонной материи; выполнении расчетов и анализе результатов; непосредственном участии в разработке нового метода вычисления термодинамических величин при действительном химическом потенциале; написании программного комплекса анализа решеточных данных и проведения аналитического продолжения в действительную область; вычислении термодинамических величин в действительной области и сравнение с экспериментальными данными; получении аналитических выражений для вычисления корреляторов токов в графене; разработке программного кода для проведения Монте Карло моделирования проводимости графена на

суперкомпьютере; непосредственном участии в разработке нового способа регуляризации метода Бакуса-Гилберта, основанным на Тихоновской регуляризации; выполнении Монте Карло моделирования графена на суперкомпьютере и обработке результатов; подготовке публикаций по результатам выполненных работ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1—7] из рецензируемых научных журналов и в материалах конференций [8—16], входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, благодарностей, списка литературы и списка рисунков. Общий объём диссертации составляет 91 страницу, включая 25 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 82 наименований.

Содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость.

В **первой главе** проведено численное моделирование КХД на решетке, которое основано на производящем функционале, соответствующему большому каноническому ансамблю:

$$Z_{GC}(\mu_q, T, V) = \int \mathcal{D}U (\det \Delta(\mu_q))^{N_f} e^{-S_G}, \quad (1)$$

где S_G - действие калибровочных полей, N_f - число ароматов кварков, $T = 1/(aN_t)$ - температура, $V = (aN_s)^3$ - объем, $\mu_q = \mu_B/3$ - кварковый химический потенциал, a - шаг решетки, N_t, N_s - число узлов решетки по временному и пространственным направлениям. В данном выражении $\det \Delta(\mu_q)$ - фермионный детерминант, определяющийся выбранным видом дискретизации фермионного действия. Для ненулевого действительного химического потенциала он является комплексной величиной, что делает проведение моделирования невозможным и называется "проблемой знака". Однако, для мнимого химического потенциала детерминант является действительным, поэтому в этой области Монте-Карло моделирование свободно от "проблемы знака".

В диссертации приводятся результаты проведения Монте-Карло моделирование барионной/кварковой плотности в мнимой области химического потенциала, полученные в [2; 4; 10—12]. В качестве решеточной дискретизации выбрано калибровочное действие Ивасаки и улучшенное фермионное действие Вильсона. Моделирование происходит для двух вырожденных фермионов $N_f = 2$, параметры действий соответствуют отношению масс π и ρ мезонов $m_\pi/m_\rho =$

0.8. Формула для вычисления барионной/кварковой плотности на решетке имеет вид:

$$n_q^L = a^3 n_q = \frac{N_f}{N_t N_s^3 Z_{GC}} \int \mathcal{D}U \text{Tr} \left(\Delta^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial (a\mu_q)} \right) \det \Delta(\mu_q)^{N_f} e^{-S_G}, \quad (2)$$

причем значение плотности для мнимого химического потенциал является минимальным, поэтому вводится обозначение $n_q = i n_{qI}$. Результаты проведения Монте-Карло вычислений при температурах $T/T_c = 1.35, 1.20, 1.08$ для различных значений $\theta_I = \frac{\mu_{qI}}{T}$ в интервале между $[0.0; \pi/3]$ представлены на Рисунке 1. Также на Рисунке представлены функции фитирования. В фазе деконфайнмента барионная/кварковая плотность хорошо описывается полиномиальной функцией с нечетными степенями, а в фазе конфайнмента - рядом Фурье:

$$\frac{n_{qI}^{deconf}(\theta_I)}{T^3} = \sum_{k=1}^{k_{max}} a_{2k-1} \theta_I^{2k-1}, \quad \frac{n_{qI}^{conf}(\theta_I)}{T^3} = \sum_{k=1}^{k_{max}} f_{3k} \sin(k\theta_I). \quad (3)$$

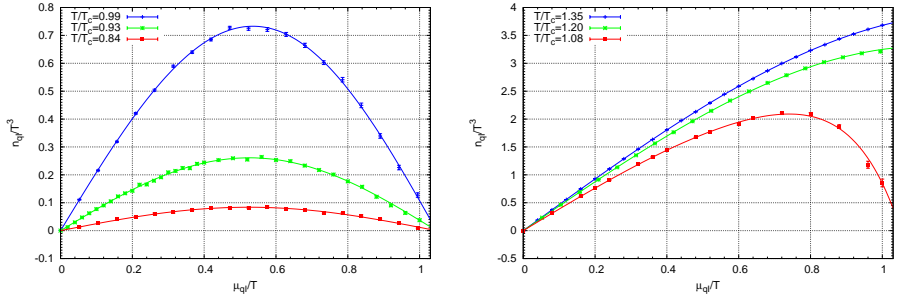


Рис. 1 — Мнимая плотность n_{qI}/T^3 как функция $\frac{\mu_{qI}}{T}$ для разных температур. Сплошные линии показывают результат фита плотности функциями (3).

В диссертации кратко описывается канонический подход и предлагается метод вычисления функций канонического распределения с помощью интегрирования кварковой плотности в мнимой области, который впервые был предложен и опробован в работах [2; 4]. Метод канонического ансамбля основан на связи функций канонического распределения для фиксированного числа частиц - $Z_C(n, T, V)$ с функцией большого канонического распределения $Z_{GC}(\mu_q, T, V)$, зависящей от химического потенциала:

$$\begin{aligned} Z_{GC}(\mu_q, T, V) &= \text{Tr} \left(e^{-\frac{\hat{H} - \mu_q \hat{N}}{T}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n | e^{-\frac{\hat{H}}{T}} | n \rangle e^{\frac{\mu_q n}{T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n, T, V) e^{\frac{\mu_q n}{T}} = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} Z_n \xi^n, \end{aligned} \quad (4)$$

где \hat{N} является разностью числа кварков и антикварков, что соответствует утронному барионному числу. В данной работе для удобства используется обозначение $Z_n = Z_C(n, T, V) = \langle n | e^{-\frac{\hat{H}}{T}} | n \rangle$. Пределы суммирования должно подразумевать всем возможные n , т.е. быть бесконечными. Однако, численно невозможно учесть все слагаемые, поэтому ряд обрывается на некотором числе n_{max} .

В случае мнимого химического потенциала формула (4) является разложением в ряд Фурье, поэтому с помощью обратного преобразования можно получить:

$$Z_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_I}{2\pi} e^{-in\theta_I} Z_{GC}(\mu_q = i\theta_I T, T, V). \quad (5)$$

В правой части данного выражения стоит функция большого канонического распределения $Z_{GC}(\mu_q = i\theta_I T, T, V)$ с чисто мнимым кварковым химическим потенциалом: $\mu_q = i\mu_I \equiv iT\theta_I$, где $\theta_I = \mu_I/T$, следовательно можно использовать метод Монте-Карло для ее вычисления. Для этого в диссертации предлагается проинтегрировать определение кварковой плотности, т.е.

$$n_q = \frac{T}{V} \frac{\partial}{\partial \mu_q} \ln Z_{GC}(\mu_q, T, V)$$

по мнимому химическому потенциалу:

$$\begin{aligned} \frac{Z_{GC}(\theta_I)}{Z_{GC}(0)} &= \exp \left(V \int_0^{\theta_I} d(i\tilde{\theta}_I) i \operatorname{Im}[n_q(\tilde{\theta}_I)] \right) \\ &= \exp \left(-V \int_0^{\theta_I} dx n_{qI}(x) \right) = e^{L_z(\theta_I)}, \end{aligned} \quad (6)$$

После чего, используя (5), легко получить нормированные функции канонического распределения Z_n/Z_0

$$\frac{Z_n}{Z_0} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-in\theta} e^{L_z(\theta)}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{L_z(\theta)}}. \quad (7)$$

Результаты вычисления Z_n/Z_0 для различных температур были получены в [2; 4; 10; 11], где также было проведено сравнение с методом разложения по хоппинг параметру. Стоит также упомянуть, что последний позволяет вычислить лишь небольшое число Z_n/Z_0 в фазе конфайнмента из-за больших флуктуаций [3].

Функции Z_n не зависят от μ , поэтому с помощью формулы (4) можно вычислить любые термодинамические величины в области действительного химического потенциала. В диссертации исследуется барионная/кварковая плотность и более высокие моменты:

$$\frac{n_q(\theta)}{T^3} = \left(\frac{N_t}{N_s} \right)^3 \frac{2 \sum_{n=1}^{n_{max}} Z_n n \sinh(n\theta)}{Z_0 + 2 \sum_{n=1}^{n_{max}} Z_n \cosh(n\theta)}, \quad \lambda_m(\theta) = \partial_\theta^m \log Z_{GC}(\theta), \quad (8)$$

где $\theta = \mu/T$.

Предложенный способ позволяет исследовать термодинамические свойства при конечном значении химического потенциала без неконтролируемых приближений. Однако, необходимое численное вычисление интеграла (7) требует проведения Монте-Карло моделирования барионной/кварковой плотности для большого количества точек μ_I в мнимой области, для чего необходимо огромное количество компьютерных ресурсов. Поэтому в диссертации используется несколько модифицированный вариант описанного выше подхода. Вместо численного вычисления L_z в формуле (7), используется параметризация барионной/кварковой плотности определенными функциями и их аналитическое интегрирование. В диссертацией было показано, что барионная/кварковая плотность хорошо описывается полиномом в фазе деконфайнмента и рядом Фурье в фазе конфайнмента (3), поэтому для $L_z(\theta)$ выбираются соответствующие функции фитирования:

$$L_z^{\text{deconf}}(\theta_I) = -\frac{N_s^3}{N_t^3} \sum_{k=1}^{k_{max}} a_{2k-1} \frac{\theta_I^{2k}}{2k}, \quad L_z^{\text{conf}}(\theta_I) = \frac{N_s^3}{N_t^3} \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{f_{3k}}{3k} \cos(3k\theta_I). \quad (9)$$

В диссертации были вычислены Z_n для различных температур. Вычисление интеграла Фурье (7) было выполнено численно с использованием библиотеки арифметики произвольной точности MPFR C++, что является необходимым для подобного рода вычислений [2; 50].

Используя формулу (8), в диссертации была вычислена барионная/кварковая плотность при действительном химическом потенциале, что представлено на Рисунке 2. Для больших μ_B/T плотность частиц становится константой из-за конечного числа слагаемых [9], т.е. конечного n_{max} в формуле (8). Этот эффект позволяет определить достоверную область полученных данных. Положение μ_{max}/T , где плотность частиц начинает вести себя как константа определяется n_{max} : чем больше n_{max} , тем больше μ_{max}/T . На вставках Рисунка 2 показаны результаты вычисления плотности для различных n_{max} . Результаты совпадают вплоть до μ_{max}/T , где плотность становится константой. Следовательно, можно сделать вывод о том, что систематическая ошибка, связанная с обрезанием числа слагаемых в функции большого канонического распределения, влияет только на определение доверительной области μ_{max}/T и при этом не изменяет данные при $\mu < \mu_{max}$.

В диссертации проводится сравнение полученных результатов с экспериментальными данными RHIC [49]. Для этого используются функции канонического распределения Z_n , которые извлечены напрямую из экспериментов по столкновению тяжелых ионов RHIC. Измеряемые в эксперименте распределения протонной множественности P_n имеют смысл вероятности, следовательно, они связаны с функциями канонического распределения Z_n : $P_n \approx Z_n \xi^n$. Используя подобные соображения авторы [51] смогли извлечь Z_n и активности ξ из данных эксперимента на RHIC, при этом активности полученные авторами в этой работе имеют согласие с другими оценками, что говорит о неплохой точности.

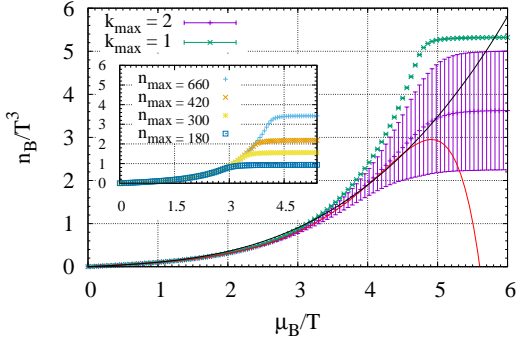


Рис. 2 — Барийонная плотность как функция химического потенциала при температуре $T/T_c = 0.93$, данные представлены для различного числа слагаемых k_{max} в используемом анзаце (3) и различного количества функций канонического распределения n_{max} . Красная линия на графике соответствует аналитическому продолжению ряда Фурье в область действительного химического потенциала, черная линия соответствует данным из работы [26] полученным с помощью метода разложения в ряд Тейлора.

Используя экспериментальные Z_n можно вычислить любые термодинамические величины, но наиболее разумным является вычисление λ_2/λ_1 и λ_4/λ_2 , формула (8), которые, как ожидается, являются хорошими параметрами порядка позволяющими определить фазовый переход кварк-глюонной/адронной материи [13]. Результаты вычисления этих величин, полученные в [8], представлены на Рисунке 3, из которого следует, что решеточные данные в фазе деконфайнмента значительно отличаются от данных эксперимента в то время, как вычисления при $T/T_c = 0.93$ согласуются со всеми значениями энергии (кроме $\sqrt{s_{NN}}=11.5$, для которой температура значительно ниже остальных значений энергий [52]).

Не смотря на то, что Z_n извлеченные из эксперимента RHIC были построены из данных распределения протонной множественности, а не барионной (что соответствовало бы нашим данным), полученные результаты хорошо согласуются с экспериментом. Заметим, что в рамках канонического подхода можно вычислить Z_n для фиксированного числа протонов, а не барионов [14] и провести непосредственное сравнение с экспериментом.

Также стоит обратить внимание на то, что при высоких μ_B/T происходит быстрая смена значения λ_2/λ_1 с единицы на ноль, что обычно свидетельствует о фазовом переходе. В данном случае этот знак не является показателем фазового перехода, а вызван систематической ошибкой из-за конечного числа функций канонического распределения n_{max} , и при изменении последнего также меняет свое положение. Следовательно, этот переход является началом области, где наши данные больше не являются достоверными.

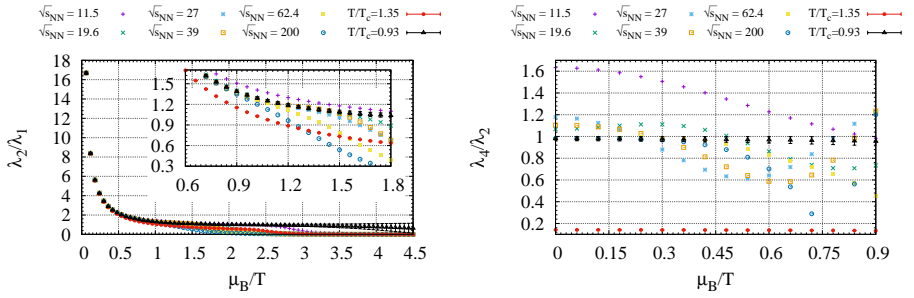


Рис. 3 — Отношение моментов λ_2/λ_1 и λ_4/λ_2 как функции химического потенциала для различных значений энергии $\sqrt{s_{NN}}$ (ГэВ) эксперимента по столкновению тяжелых ионов RHIC [49]. Также представлены результаты вычисления в данной работе при температурах $T/T_c = 0.93$ и $T/T_c = 1.35$.

Вторая глава посвящена исследованию сильновзаимодействующих систем в физике твердого тела. Дается литературный обзор работ посвященных теоретическому исследованию графена методом КТП на решетке и обсуждается одна из открытых проблем - вопрос вклада радиационных поправок в проводимость свободных частиц. Далее показывается, как в низкоэнергетическом приближении графен может быть описан эффективной теорией поля с двумерными Дираковскими фермионами движущимися со скоростью Ферми $v_f = c/300$ и взаимодействующими посредством электромагнитного поля. Из-за малости скорости Ферми магнитная составляющая силы Лоренца оказывается сильно подавленной, и поэтому взаимодействие фермионов хорошо описывается потенциалом Кулона. Однако, работы, использующие такое взаимодействие, давали не верные результаты. Позже потенциал взаимодействия электронов в графене был уточнен, в частности, в работе [46] был проведен квантово-механический расчет реалистического потенциала взаимодействия, который учитывает экранирование кулоновского потенциала на маленьких расстояниях электронами с σ орбиталей атомов кристаллической решетки.

С целью вычисления проводимости в диссертации выводится функция канонического распределения из полного гамильтониана системы:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_{tb} + \hat{H}_m + \hat{H}_c = \\ &= -\kappa \sum_{\langle x,y \rangle, s} (a_{x,s}^\dagger a_{y,s} + a_{y,s}^\dagger a_{x,s}) + \sum_{x,s} m a_{x,s}^\dagger a_{x,s} + \frac{1}{2} \sum_{x,y} q_x V_{xy} q_y, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a_{x,s}^\dagger$ ($a_{x,s}$) - операторы рождения (уничтожения) электронов со спином s в узле гексагональной решетки графена с координатой x , которые подчиняются обычным фермионным анти коммутационным соотношениям. Первое слагаемое формулы (10), где суммирование идет по всем ближайшим соседям, определяет гамильтониан в отсутствии взаимодействия - \hat{H}_{tb} . Второе и

третье слагаемые определяют массовый член \hat{H}_m и гамильтониан взаимодействия \hat{H}_c . В гамильтониане взаимодействия \hat{H}_c стоят элементы V_{xy} , которые на маленьких расстояниях описывают реалистичный потенциал взаимодействия квазичастиц графене [46], а на больших соответствуют потенциалу Кулона. Результаты поиска точки фазового перехода для этого потенциала, полученные в [6; 15], согласуются с экспериментальными данными. Учет изменения силы взаимодействия, возникающей в следствии экранирования окружающей среды, может быть сделан если принять во внимание диэлектрическую проницаемость: $V_{xy} \rightarrow V_{xy}/\epsilon$. После работы с Грассмановой алгеброй и применения преобразования Хаббарда-Стратоновича в диссертации получается переписать функцию канонического распределения в виде функционального интеграла:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi_{x,t}] |\det M[\phi_{x,t}]|^2}, \quad (11)$$

в который входят поля Хаббарда-Стратоновича $\phi_{x,t}$, представляющие ”решеточную” конфигурацию системы, действие отвечающее потенциалу взаимодействия $S[\phi_{x,t}] = \frac{\delta}{2} \sum_{x,y,t} \phi_{x,t} V_{xy} \phi_{y,t}$ и фермионная матрица M .

В диссертации находятся операторы тока, после чего проводятся необходимые преобразования для нахождения корреляционной функции электромагнитных токов

$$G(\tau) \approx \text{Tr} \left(e^{\tau \hat{H}} \hat{J}(x) e^{-\tau \hat{H}} \hat{J}(y) e^{-\beta \hat{H}} \right), \quad (12)$$

в стандартном для метода КТП на решетке виде среднего по ”решеточным” конфигурация. В результате чего выводится явный вид коррелятора:

$$G(\tau) = -\frac{2}{3\sqrt{3}L_x L_y} \sum_{b,c} T_{bc} \langle \text{ReTr} (j_{\uparrow,b} M^{-1}(0,\tau) j_{\uparrow,c} M^{-1}(\tau,0)) \rangle + \frac{4}{3\sqrt{3}L_x L_y} \sum_{b,c} T_{bc} \langle \text{ReTr} (j_{\uparrow,b} M^{-1}(0,0) \text{Tr} (j_{\uparrow,c} M^{-1}(\tau,\tau))) \rangle, \quad (13)$$

где под $\langle \dots \rangle$ подразумевается усреднение по конфигурациям $\{\phi_{x,t}\}$ с соответствующим весом ($\langle O \rangle = \int \mathcal{D}\phi O e^{-S[\phi_{x,t}] |\det M[\phi_{x,t}]|^2}$), используется обозначение $T_{bc} = \frac{3}{2} \delta_{bc} - \frac{1}{2}$. Явный вид матрица $j_{\uparrow,b}$, где стрелка означает спин квазичастицы и b -направление ребра решетки (для гексагональной решетки возможны 3 направления), задается операторами токов.

В этой части следуют результаты, полученные в [5]. В диссертации проводится Монте-Карло моделирование корреляционной функции электромагнитных токов для решетки размером $N_s = 24^2$ ячеек в пространственных направлениях и $N_t = 20$ Евклидовыми слоями ($\delta\tau = 0.1\text{эВ}^{-1}$), что соответствует температуре $T = 0.5$ эВ. Для того, чтобы извлечь проводимость

электромагнитного тока $\sigma(\omega)$ из значений коррелятора токов во мнимом (Евклидовом) времени необходимо решить связывающее их интегральное уравнение Грина-Кубо:

$$G(\tau) = \int_0^\infty \sigma(\omega) K(\tau, \omega) d\omega, \quad K(\tau, \omega) = \frac{\omega \cosh(\omega(\frac{\beta}{2} - \tau))}{\pi \sinh(\frac{\omega\beta}{2})}. \quad (14)$$

В диссертации это делается с помощью одного из, наиболее современных и эффективных способов, метода Бакуса-Гилберта [53]. Для оценки оптической проводимости выбирается частота $\omega = 1.06\kappa \approx 2,99$ эВ, которая соответствует длине волны фотона 415 нм, результаты вычисления которой для различной силы взаимодействия представлены на Рисунке 4. С целью сравнения полученных данных с аналитическими предсказаниями вспомним, что большинство теоретических работ, вычисляющих ведущий вклад радиационных поправок в проводимость, получили одинаковый закон:

$$\frac{\sigma(\omega)}{\sigma_0} = 1 + C\alpha_{eff} + O(\alpha_{eff}^2), \quad (15)$$

где $\alpha_{eff} = \alpha_0/\epsilon$, но при этом разное значение константы C . Одна часть работ [35; 37; 40] утверждает большое значение $C = 0.2 - 0.5$ в то время, как другая [33; 34; 41] - малое $C \approx 0.01$. Для сравнения с этими результатами на Рисунке 4 также представлены два сценария: эффекты взаимодействия частиц приводят к сильному изменению проводимости при $C = 0.26$ и имеют небольшой вклад при $C = 0.01$. Наши данные согласуются только со сценарием, когда эффекты взаимодействия не приводят к существенному изменению проводимости графена. Следует подчеркнуть, что экспериментальные данные [43] $\sigma/\sigma_0 = 1.01 \pm 0.04$ также подтверждают наши выводы.

Кроме исследования зависимости проводимости графена от силы взаимодействия ϵ , интересно также изучить влияние внешних параметров, например, внешнего магнитного поля. Это исследование, проведенное в [7; 16], хоть позволило получить только качественные выводы, показало, что магнитное поле приводит к значительному уменьшению проводимости графена.

Далее следуют результаты извлечения полного спектра проводимости, полученные в [1]. Для этого необходимо улучшить разрешающую способность метода Бакуса-Гилберта, которая определяется количеством слоев в Евклидовом времени N_t или температурой $T = 1/(a_t N_t)$: чем ниже температура, тем уже функции разрешения и, следовательно, выше разрешающая способность. Поэтому для детального определения спектра проводимости требуется выполнить Монте-Карло моделирование при более низкой температуре.

Результаты вычисления профиля проводимости электромагнитного тока в графене, вычисленные при температуре $T = 0.125$ эВ и размере решетки $L = 48$, представлены на Рисунке 5. Основные свойства проводимости свободных частиц в графене сохраняются: пик в нуле, плато в оптическом диапазоне, сингулярность Ван-Хофа и спад на больших частотах. Результаты показывают, что вклад

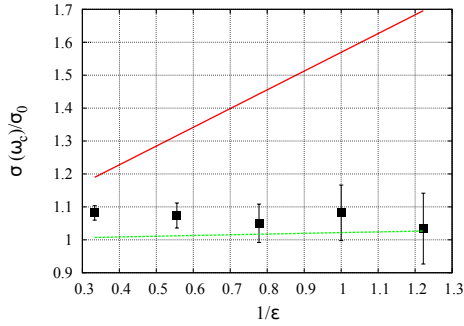


Рис. 4 — Зависимость оптической проводимости $\sigma(\omega_c)|_{\omega_c=1.06\kappa}$ от силы взаимодействия. На графике также представлены два варианта аналитических предсказаний проводимости графена с учетом ведущей поправки: красная линия соответствует $C = 0.26$, зеленая - $C = 0.01$.

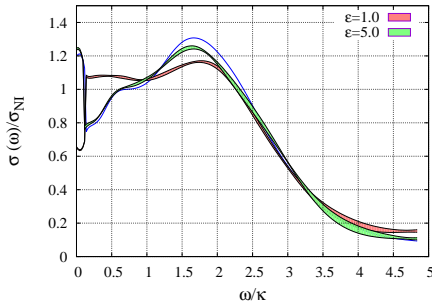


Рис. 5 — Проводимости графена $\sigma(\omega)$ нормированная на оптическую проводимость невзаимодействующих частиц $\sigma_{NI} = \sigma_{free}(\omega = 0.7t)$. Синяя линия соответствует вычислению проводимости в свободном случае.

радиационных поправок в оптическую проводимость не превышает 7%. Также из Рисунка видно, что этот вклад мал во всей области частот.

С другой стороны, следует отметить, что при увеличении количества временных слоев метод Бакуса-Гилберта становится нестабильным из-за накапливающейся ошибки. В частности, метод не позволяет получить стабильных результатов даже для свободного случая при $N_t \approx 100$. В этой связи, для вычисления результатов Рисунка 5 требовалось найти аккуратный способ регуляризации. Нестабильность метода Бакуса-Гилберта связана с обращением плохо определенной матрицы $W(\omega_0)_{ij}$ с числом обусловленности $\mu(W) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \approx O(10^{20})$. Поэтому, в диссертации было предложено использовать метод, основанный на регуляризации Тихонова, который используется для решения задач $Ax = b$, с плохо определенной матрицей.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Список литературы

1. *Stauber T.* Interacting Electrons in Graphene: Fermi Velocity Renormalization and Optical Response / T. Stauber, P. Parida, M. Trushin, M. V. Ulybyshev, D. L. Boyda, J. Schliemann // *Physical Review Letters*. — 2017. — Июнь. — Т. 118, № 26. — С. 266801.
2. *Borniyakov V. G.* New approach to canonical partition functions computation in $N_f=2$ lattice QCD at finite baryon density / V. G. Borniyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov // *Physical Review D*. — 2017. — Май. — Т. 95, № 9. — С. 094506.
3. *Goy V. A.* Sign problem in finite density lattice QCD / V. A. Goy, V. Borniyakov, D. Boyda, A. Molochkov, A. Nakamura, A. Nikolaev, V. Zakharov // *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. — 2017. — Март. — Т. 2017, № 3. — С. 031D01.
4. *Boyda D. L.* Novel approach to deriving the canonical generating functional in lattice QCD at a finite chemical potential / D. L. Boyda, V. G. Borniyakov, V. A. Goy, V. I. Zakharov, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev // *JETP Letters*. — 2016. — Ноябрь. — Т. 104, № 10. — С. 657.
5. *Boyda D. L.* Many-body effects on graphene conductivity: Quantum Monte Carlo calculations / D. L. Boyda, V. V. Braguta, M. I. Katsnelson, M. V. Ulybyshev // *Physical Review B*. — 2016. — Август. — Т. 94, № 8. — С. 085421.
6. *Boyda D. L.* Numerical simulations of graphene conductivity with realistic inter-electron potential / D. L. Boyda, V. V. Braguta, M. V. Ulybyshev // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2016. — Декабрь. — Т. 79, № 11. — С. 1505.
7. *Boyda D.* Numerical simulation of graphene in an external magnetic field / D. Boyda, V. Braguta, S. Valgushev, M. Polikarpov, M. Ulybyshev // *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*. — 2014. — Т. 89, № 24.
8. *Borniyakov V. G.* Lattice Study of QCD Phase Structure by Canonical Approach / V. G. Borniyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov // *European Physical Journal Web of Conferences*. Т. 175. — 2018. — С. 07033.
9. *Borniyakov V. G.* Restoring canonical partition functions from imaginary chemical potential / V. G. Borniyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov // *European Physical Journal Web of Conferences*. Т. 175. — 2018. — С. 07027.

10. *Borniyakov V. G.* Study of lattice QCD at finite chemical potential using the canonical ensemble approach / V. G. Borniyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov // European Physical Journal Web of Conferences. T. 138. — 2017. — C. 02002.
11. *Borniyakov V. G.* Study of lattice QCD at finite baryon density using the canonical approach / V. G. Borniyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov // European Physical Journal Web of Conferences. T. 137. — 2017. — C. 07017.
12. *Borniyakov V. G.* Dyons and Roberge - Weiss transition in lattice QCD / V. G. Borniyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, E.-M. Ilgenfritz, B. V. Martemyanov, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov // European Physical Journal Web of Conferences. T. 137. — 2017. — C. 03002.
13. *Borniyakov V. G.* How to use Lattice and experimental data for QCD critical point search / V. G. Borniyakov, D. L. Boyda, V. A. Goy, A. V. Molochkov, A. Nakamura, A. A. Nikolaev, V. I. Zakharov // Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement. — 2017. — T. 10, № 3. — C. 0495.
14. *Borniyakov V.* Lattice QCD for Baryon Rich Matter – Beyond Taylor Expansions / V. Borniyakov, D. Boyda, V. Goy, A. Molochkov, A. Nakamura, A. Nikolaev, V. Zakharov // Nuclear Physics A. — 2016. — T. 956. — C. 809–812.
15. *Boyda D.* Numerical simulations of graphene conductivity with realistic inter-electron interaction potential / D. Boyda, V. Braguta, M. Ulybyshev // Proceedings of Science. T. 251. — 2015. — C. 045.
16. *Boyda D.* Numerical simulation of graphene in an external magnetic field / D. Boyda, V. Braguta, S. Valgushev, M. Polikarpov, M. Ulybyshev // Proceedings of Science. T. 214. — 2015. — C. 057.
17. *Muroya S.* Lattice QCD at Finite Density — An Introductory Review / S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka, T. Takaishi // Progress of Theoretical Physics. — 2003. — T. 110. — C. 615.
18. *Fukushima K.* The phase diagram of dense QCD / K. Fukushima, T. Hatsuda // Reports on Progress in Physics. — 2011. — T. 74, № 1. — C. 014001.
19. *Ding H.-T.* Thermodynamics of strong-interaction matter from lattice QCD / H.-T. Ding, F. Karsch, S. Mukherjee // International Journal of Modern Physics E. — 2015. — T. 24. — C. 1530007.
20. *Stephanov M.* Signatures of the Tricritical Point in QCD / M. Stephanov, K. Rajagopal, E. Shuryak // Physical Review Letters. — 1998. — T. 81. — C. 4816–4819.
21. *Luo X.-Q.* Tricritical point of lattice QCD with Wilson quarks at finite temperature and density / X.-Q. Luo // Physical Review D. — 2004. — T. 70, № 9. — C. 091504.

22. *Geim A. K.* The rise of graphene / A. K. Geim, K. S. Novoselov // *Nature Materials*. — 2007. — T. 6, № 3. — C. 183.
23. *Novoselov K. S.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov // *Nature*. — 2005. — T. 438. — C. 197–200.
24. *Semenoff G. W.* Chiral symmetry breaking in graphene / G. W. Semenoff // *Physica Scripta Volume T*. — 2012. — T. 146, № 1. — C. 014016.
25. *Durr S.* Ab Initio Determination of Light Hadron Masses / S. Durr [и др.] // *Science*. — 2008. — T. 322. — C. 1224.
26. *Ejiri S.* Equation of State and Heavy-Quark Free Energy at Finite Temperature and Density in Two Flavor Lattice QCD with Wilson Quark Action / S. Ejiri, Y. Maezawa, N. Ukita, S. Aoki, T. Hatsuda, N. Ishii, K. Kanaya, T. Umeda // *Physical Review D*. — 2010. — T. 82. — C. 014508.
27. *Allton C. R.* Thermodynamics of two flavor QCD to sixth order in quark chemical potential / C. R. Allton, M. Döring, S. Ejiri, S. J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, K. Redlich // *Physical Review D*. — 2005. — T. 71. — C. 054508.
28. *Gunther J.* The QCD equation of state at finite density from analytical continuation / J. Gunther, R. Bellwied, S. Borsanyi, Z. Fodor, S. Katz, A. Pasztor, C. Ratti // *European Physical Journal Web of Conferences*. T. 137. — 2017. — C. 07008.
29. *D'Elia M.* Thermodynamics of two flavor QCD from imaginary chemical potentials / M. D'Elia, F. Sanfilippo // *Physical Review D*. — 2009. — T. 80, № 1. — C. 014502.
30. *Takaishi T.* Equation of State at Finite Density from Imaginary Chemical Potential / T. Takaishi, P. de Forcrand, A. Nakamura // *ArXiv e-prints*. — 2010.
31. *Laermann E.* Making the most of Taylor expansion and imaginary μ / E. Laermann, F. Meyer, M. P. Lombardo // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2013. — T. 432, № 1. — C. 012016.
32. *Takahashi J.* Quark number densities at imaginary chemical potential in $N_f = 2$ lattice QCD with Wilson fermions and its model analyses / J. Takahashi, H. Kouno, M. Yahiro // *Physical Review D*. — 2015. — T. 91, № 1. — C. 014501.
33. *Mishchenko E. G.* Minimal conductivity in graphene: Interaction corrections and ultraviolet anomaly / E. G. Mishchenko // *Europhysics Letters*. — 2008. — T. 83. — C. 17005.
34. *Teber S.* Interaction corrections to the minimal conductivity of graphene via dimensional regularization / S. Teber, A. V. Kotikov // *Europhysics Letters*. — 2014. — T. 107. — C. 57001.

35. *Herbut I. F.* Coulomb Interaction, Ripples, and the Minimal Conductivity of Graphene / I. F. Herbut, V. Juricic, O. Vafek // *Physical Review Letters*. — 2008. — Т. 100, вып. 4. — С. 046403.
36. *Sheehy D. E.* Optical transparency of graphene as determined by the fine-structure constant / D. E. Sheehy, J. Schmalian // *Physical Review B*. — 2009. — Т. 80, вып. 19. — С. 193411.
37. *Juricic V.* Conductivity of interacting massless Dirac particles in graphene: Collisionless regime / V. Juricic, O. Vafek, I. F. Herbut // *Physical Review B*. — 2010. — Т. 82, вып. 23. — С. 235402.
38. *Giuliani A.* Absence of interaction corrections in the optical conductivity of graphene / A. Giuliani, V. Mastropietro, M. Porta // *Physical Review B*. — 2011. — Т. 83, вып. 19. — С. 195401.
39. *Katsnelson M. I.* Optical properties of graphene: The Fermi-liquid approach / M. I. Katsnelson // *Europhysics Letters*. — 2008. — Т. 84, № 3. — С. 37001.
40. *Rosenstein B.* Chiral Anomaly and Strength of the Electron-Electron Interaction in Graphene / B. Rosenstein, M. Lewkowicz, T. Maniv // *Physical Review Letters*. — 2013. — Т. 110. — С. 066602.
41. *Link J. M.* Universal collisionless transport of graphene / J. M. Link, P. P. Orth, D. E. Sheehy, J. Schmalian // *Physical Review B*. — 2016. — Т. 93, № 23. — С. 235447.
42. *Mak K. F.* Measurement of the Optical Conductivity of Graphene / K. F. Mak, M. Y. Sfeir, Y. Wu, C. H. Lui, J. A. Misewich, T. F. Heinz // *Physical Review Letters*. — 2008. — Т. 101. — С. 196405.
43. *Nair R. R.* Fine Structure Constant Defines Visual Transparency of Graphene / R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, T. J. Booth, T. Stauber, N. M. R. Peres, A. K. Geim // *Science*. — 2008. — Т. 320, № 5881. — С. 1308.
44. *Drut J. E.* Is Graphene in Vacuum an Insulator? / J. E. Drut, T. A. Lähde // *Physical Review Letters*. — 2009. — Т. 102, вып. 2. — С. 026802.
45. *Buividovich P. V.* Numerical study of the conductivity of graphene monolayer within the effective field theory approach / P. V. Buividovich, E. V. Luschevskaya, O. V. Pavlovsky, M. I. Polikarpov, M. V. Ulybyshev // *Physical Review B*. — 2012. — Т. 86, № 4. — С. 045107.
46. *Wehling T. O.* Strength of Effective Coulomb Interactions in Graphene and Graphite / T. O. Wehling, E. Sasioglu, C. Friedrich, A. I. Lichtenstein, M. I. Katsnelson, S. Blügel // *Physical Review Letters*. — 2011. — Т. 106, № 23. — С. 236805.
47. *Ulybyshev M. V.* Monte Carlo Study of the Semimetal-Insulator Phase Transition in Monolayer Graphene with a Realistic Interelectron Interaction Potential / M. V. Ulybyshev, P. V. Buividovich, M. I. Katsnelson, M. I. Polikarpov // *Physical Review Letters*. — 2013. — Т. 111, № 5. — С. 056801.

48. *Nagata K.* Wilson fermion determinant in lattice QCD / K. Nagata, A. Nakamura // *Physical Review D.* — 2010. — Т. 82, вып. 9. — С. 094027.
49. *Luo X.* Probing the QCD critical point by higher moments of net-proton multiplicity distributions at STAR / X. Luo // *Central European Journal of Physics.* — 2012. — Т. 10. — С. 1372—1374.
50. *Oka S.* Exploring finite density QCD phase transition with canonical approach - Power of multiple precision computation- / S. Oka, for Zn-Collaboration // *ArXiv e-prints.* — 2015.
51. *Nakamura A.* Probing QCD phase structure using baryon multiplicity distribution / A. Nakamura, K. Nagata // *Progress of Theoretical and Experimental Physics.* — 2016. — Т. 2016, № 3. — С. 033D01.
52. *Alba P.* Freeze-out conditions from net-proton and net-charge fluctuations at RHIC / P. Alba, W. Alberico, R. Bellwied, M. Bluhm, V. Mantovani Sarti, M. Nahrgang, C. Ratti // *Physical Letters B.* — 2014. — Т. 738. — С. 305—310.
53. *Brandt B. B.* Pion quasiparticle in the low-temperature phase of QCD / B. B. Brandt, A. Francis, H. B. Meyer, D. Robaina // *Physical Review D.* — 2015. — Т. 92, вып. 9. — С. 094510.

Бойда Денис Леонидович

Исследование сильновоздействующих систем методами квантовой теории поля на
решетке

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж экз.

Типография _____