

На правах рукописи



**Сдвиженский Петр Александрович**

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛОКАЛЬНОГО  
ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ  
ПЛАЗМЫ**

Специальность 01.04.08 – Физика плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Москва – 2018**

Работа выполнена в Отделе теории плазмы Курчатовского ядерно-технологического комплекса Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» (НИЦ «Курчатовский институт»)

Научный руководитель: Кукушкин Александр Борисович,  
доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник Отдела теории плазмы  
Национального исследовательского центра  
«Курчатовский институт»

Официальные оппоненты: Астапенко Валерий Александрович,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
главный научный сотрудник кафедры  
«Радиоэлектроника и прикладная информатика»  
Федерального государственного автономного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)» (МФТИ), г. Москва

Майоров Сергей Алексеевич,  
доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник Теоретического отдела  
Федерального государственного бюджетного  
учреждения науки Института общей физики  
им. А.М. Прохорова Российской академии наук (ИОФ  
РАН), г. Москва

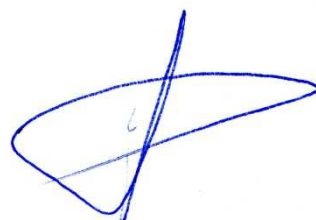
Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение  
науки Объединенный институт высоких температур  
Российской академии наук (ОИВТ РАН), г. Москва

Защита состоится 19 апреля 2018 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д520.009.02 на базе НИЦ «Курчатовский институт» по адресу: 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЦ «Курчатовский институт» и на сайте [www.nrcki.ru](http://www.nrcki.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
к.ф.-м.н.



А.В. Демура

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность работы

Настоящая работа посвящена разработке методов для решения задач нелокального переноса излучения и спектроскопической диагностики плазмы. Актуальность рассмотренных задач обусловлена как их общефизическим интересом, так и практической значимостью в исследованиях лабораторной (прежде всего, термоядерной) и астрофизической плазмы. Основные задачи в общефизическом аспекте работы включают разработку методов для решения задач нелокального переноса излучения, включая обобщение на широкий класс явлений нелокального (супердиффузионного) переноса с доминирующей ролью длиннопробежных переносчиков (т.н. полетов Леви). Прикладной аспект работы связан с возможностью использования полученных результатов для тестирования численных кодов и приближенных аналитических методов для переноса излучения в плазме и разработкой методов оптимизации спектроскопической (в основном, томсоновской) диагностики термоядерной плазмы.

Исследование процессов супердиффузии (или, эквивалентно, нелокального переноса, или процессов с участием «полетов Леви») является активно развивающейся областью науки, так как относится к вычислительно-трудоемким задачам на стыке физики и математики. Актуальность разработки новых подходов к моделированию нелокального переноса в лабораторной и астрофизической плазме обусловлена известной трудностью решения уравнений переноса, интегральных по пространству и волновым числам переносчиков энергии (фотонов, быстрых частиц и др.). Автомодельность случайных блужданий обычно ассоциируется с тем фактом, что пространственно-временная эволюция переноса от мгновенного точечного источника в однородной среде (т.е. функция Грина) сводится к функции одной переменной. В случае нормальной (или обыкновенной) диффузии, определяемой как броуновское движение, описываемое дифференциальным уравнением фоккер-планковского типа, функция Грина является гауссианом, чей аргумент определяет закон подобия для распространяющегося фронта  $r_{fr}(t) \sim (Dt)^{1/2}$ , где  $D$  – коэффициент диффузии. В более общем случае, вне рамок броуновского движения, расходимость среднеквадратичного смещения, вызванная медленно спадающей степенной функцией распределения смещения переносчиков по длине их свободного пробега (ФРСП), приводит к супердиффузионному переносу (см., напр., [1–4]). В этом случае основной вклад в перенос вносят длиннопробежные переносчики (названные Б. Мандельбротом [5] полетами Леви, см. [1]). В ряде физических задач супердиффузию принято называть нелокальным переносом, который описывается интегральным, в пространственных переменных, уравнением, несводимым к дифференциальному. Это имеет место, например, для уравнения

Бибермана-Холстейна [6, 7], которое выводится из пары дифференциальных кинетических уравнений для фотонов и атомов, или ионов, и описывает пространственно-временную эволюцию плотности возбужденных атомов/ионов, вызванную переносом резонансного излучения в спектральных линиях в плазме и газах, при условии полного перераспределения фотона по энергии фотона в пределах спектральной линии (т.е. полной потери памяти) в каждом элементарном акте поглощения-излучения атомом/ионом (см. [8] – в астрофизике, [9–11] – в кинетике низкотемпературной плазмы, [12] – в спектроскопии и радиационных потерях плазмы термоядерных установок), при этом закон распространения фронта должен определяться подходящим для супердиффузии образом [13] (см. также [9, 12]), т.к. определенное обычным образом среднеквадратическое смещение в бесконечной среде расходится. Роль длиннопробежных фотонов была выявлена в [14, 15], что послужило основой для методов «прострельного» выхода излучения [14], [16], в зарубежной литературе – *escape probability methods* (см., напр., [17]). Доминирующая роль фотонов, испускаемых в крыле спектральной линии, позволяет получать асимптотически точные решения при произвольной форме спектральной линии [18]. Модель Бибермана-Холстейна применялась при расчетах переноса излучения в линии лайман-альфа изотопов водорода в диверторах ИТЭР и JET [19] и в оценках эффектов непрозрачности плазмы при инъекции газа для смягчения последствий срыва тока в токамаках [20]. Широкое применение имеет расширение подхода Бибермана-Холстейна с линейчатого на непрерывный спектр в [21] (в развитие [22]) и [23] (в развитие [24]); возможно его применение и для переходов между дискретным и непрерывным спектром энергии излучателей (см. [25] для фоторекомбинации).

Получение универсальных законов подобия для стационарного и нестационарного уравнений Бибермана-Холстейна и более широкого класса уравнений супердиффузии представляет общефизический и практический интерес. Достичь такой цели возможно, опираясь на доминирующую роль полетов Леви в нелокальном переносе. В задачах нестационарного переноса типа модели Бибермана-Холстейна такие возможности, как оказывается, далеко не исчерпаны.

Другим путем анализа нелокальности является выражение кинетического уравнения через автомодельные переменные. Это позволило получить аналитические решения для надтепловых электронов [26] и для быстрых нейтралов, образующихся в результате перезарядки [27]. Распространение этого подхода на перенос резонансного излучения обещает получение результатов, которые могут быть использованы для тестирования как соответствующих блоков сложных транспортных кодов для описания явлений переноса в плазменных установках, так и широко используемых аналитических приближений.

Важным направлением в физике радиационных явлений в плазме являются практические задачи спектроскопической диагностики плазмы. Одной из важнейших в этом ряду является диагностика параметров функции распределения электронов по спектру томсоновского рассеяния лазерного излучения. Особый интерес представляет томсоновская диагностика центральной плазмы в токамаках-реакторах и ее планируемая реализация для диагностики центральной плазмы в ИТЭР.

При диагностике высокой электронной температуры  $T_e$  центральной плазмы в токамаках-реакторах (ДЕМО и ИТЭР) с помощью томсоновского рассеяния приходится работать в ограниченном спектральном диапазоне сильно уширенного спектра томсоновского рассеяния и учитывать возможное отклонение функции распределения электронов по скоростям (ФРЭС) от максвелловской в условиях сильного дополнительного нагрева или других источников термодинамической неравновесности. По результатам предварительного исследования возможностей повышения точности томсоновской диагностики центральной плазмы были предложены [28] (а) использование нескольких зондирующих длин волн с целью увеличения количества сигналов от различных спектральных каналов и (б) интерпретация данных томсоновской диагностики применительно к немаксвелловским ФРЭС в слабо/умеренно надтепловом диапазоне энергий совместно с использованием данных других диагностик для более высоких энергий (напр., диагностики электронных циклотронных спектров на больших гармониках [29] фундаментальной ЭЦ частоты).

Известно, что возможное отклонение ФРЭС от максвелловской может быть одной из причин наблюдаемого в различных экспериментах различия в определении  $T_e$  по измерениям различных диагностик [30, 31]. Расчеты спектров томсоновского рассеяния для различных немаксвелловских ФРЭС были проведены в [32].

Исследование возможностей усовершенствования и повышения точности томсоновской диагностики центральной плазмы стимулирует поиск методов, позволяющих корректно оценивать ошибки определения основных параметров ФРЭС по результатам измерения спектров томсоновского рассеяния с учётом возможных источников ошибок. Алгоритм оценки погрешностей измерений должен быть сформулирован в рамках так называемой синтетической диагностики. Такая диагностика генерирует «фантомные» (или иначе называемые «синтетические») экспериментальные данные и позволяет напрямую сравнивать первоначальные (т.е. принимаемые за известные, «предполагаемые», «истинные») и восстановленные значения диагностируемых параметров. Оценка погрешностей искомым параметрам является важным и достаточно сложным вопросом, поскольку ожидаемый сигнал рассеяния нелинейно зависит от температуры, а в случае, когда ФРЭС от-

личается от максвелловской, ситуация усложняется наличием дополнительных параметров, по которым проводится минимизация отличия измеренного и расчетного спектров. Отметим, что в общем случае выбор критерия минимизации, обеспечивающего наилучшую точность восстановления искомых параметров, сам по себе является сложной обратной задачей. Поэтому для анализа чувствительности окончательных результатов к выбору критерия минимизации, необходимо в рамках синтетической диагностики протестировать различные критерии.

### **Цели диссертационной работы**

1. Разработка метода получения универсальных приближенных решений уравнения Бибермана-Холстейна для нестационарного переноса резонансного излучения в плазме и его обобщения на широкий класс явлений нелокального переноса с доминирующей ролью длиннопробежных переносчиков (полетов Леви).
2. Получение аналитических решений стационарного переноса излучения в резонансных линиях в сильно неоднородном плазменном слое.
3. Разработка метода расчёта точности диагностики параметров горячей немаксвелловской электронной плазмы в термоядерных реакторах по томсоновскому рассеянию электронами лазерного излучения и анализ точности «многоцветной» томсоновской диагностики центральной плазмы в токамаке ИТЭР.

### **Научная новизна**

1. Предложен новый метод определения параметров подобия для нестационарного нелокального переноса резонансного излучения в однородной плазме, позволяющий определить законы подобия за фронтом волны возбуждения среды и найти общее приближенное решение во всем интервале – до фронта, на нем и после него.
2. Впервые найдено приближенное автомодельное решение нестационарного уравнения Бибермана-Холстейна в однородной среде для произвольного контура линии излучения/поглощения и предложено его обобщение на широкий класс переносов возмущения среды длиннопробежными переносчиками (полетами Леви) в однородной среде.
3. Впервые получено аналитическое автомодельное решение задачи стационарного переноса излучения в резонансных линиях в сильно неоднородном плазменном слое для широкого класса профилей параметров плазмы.
4. Предложен новый метод расчёта точности томсоновской диагностики плазмы в токамаках-реакторах, позволяющий одновременно учесть широту и асимметрию спектра рассеянного лазерного излучения и типичную немаксвелловость электронов.
5. Впервые проведен анализ точности «многоцветной» томсоновской диагностики центральной плазмы в ИТЭР с учетом возможной немаксвелловости электронов и источников ошибки в измерительной системе.

## **Практическая значимость**

1. Обобщение нового метода получения приближенных автомодельных решений уравнения Бибермана-Холстейна на широкий класс явлений нелокального (супердиффузионного) переноса с доминирующей ролью полетов Леви открывает возможности приложения метода далеко за пределами физики плазмы.

2. Предложенный метод расчёта точности томсоновской диагностики плазмы в токамаках-реакторах позволил показать преимущества «многоцветной» томсоновской диагностики центральной плазмы в токамаке ИТЭР. Разработанный метод и программы используются при текущей разработке и оптимизации этой диагностики в ИТЭР.

3. Полученные аналитические решения задачи переноса излучения в резонансных линиях в сильно неоднородном плазменном слое можно использовать для тестирования численных транспортных кодов и аналитических приближений для описания переноса линейчатого излучения в периферийной плазме.

## **Личный вклад**

Постановка задач и интерпретация полученных результатов предложены автором совместно с научным руководителем и соавторами опубликованных работ. Автором проделано подавляющее большинство аналитических и численных расчетов в диссертационной работе.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Метод определения параметров подобия для нестационарного нелокального переноса резонансного излучения в однородной плазме.
2. Автомодельное решение нестационарного уравнения Бибермана-Холстейна и его обобщение на широкий класс переносов полетами Леви в однородной среде.
3. Аналитическое автомодельное решение задачи стационарного переноса резонансного излучения в сильно неоднородном плазменном слое.
4. Метод расчёта точности томсоновской диагностики немаксвелловской плазмы в токамаках-реакторах.
5. Обоснование преимуществ «многоцветной» томсоновской диагностики центральной плазмы в ИТЭР.

## **Достоверность результатов**

Достоверность результатов обусловлена детальностью проведенного исследования и сравнением результатов, полученных различными способами. Так, автомодельные решения, полученные в главах 1 и 2, проверены сравнением с прямыми численными расчетами; метод оценки точности томсоновской диагностики немаксвелловской плазмы, развитый в главе 3, проанализирован путем массовых численных расчетов для различных вариаций входных параметров.

## **Апробация работы**

Основные результаты работы доложены на научных семинарах в НИЦ «Курчатовский институт» в Отделе теории плазмы, на Курчатовских молодежных научных школах 2012, 2013, 2014, 2015 гг., на следующих конференциях: Международная конференция МАГАТЭ по термоядерной энергии (IAEA FEC-25, г. Санкт-Петербург, Россия, 2014 г.; IAEA FEC-26, г. Киото, Япония, 2016 г.), Международная конференция по диагностике термоядерных реакторов (International conference on fusion reactor diagnostics, г. Варенна, Италия, 2013 г.), Международные конференции европейского физического общества по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (EPS-41, г. Берлин, Германия, 2014 г.; EPS-42, г. Лиссабон, Португалия, 2015 г.; EPS-43, г. Левен, Бельгия, 2016 г.), Международные (Звенигородские) конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (2014, 2015, 2016 гг.), Международное совещание по теории периферийной плазмы в термоядерных установках (15<sup>th</sup> International Workshop on Plasma Edge Theory in Fusion Devices, г. Нара, Япония, 2015 г.).

## **Публикации**

По результатам диссертационной работы опубликовано 11 печатных работ, включая 7 статей в журналах из списка ВАК, среди которых есть 3 журнальные статьи и 2 конференционных доклада из базы данных Web of Science и 6 журнальных статей и докладов из базы данных SCOPUS.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, 3-х глав, заключения, списка цитируемой литературы и приложения. Работа содержит 119 страниц, включает 38 рисунков и 17 таблиц. Список цитированной литературы содержит 85 наименований.

## **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** приводится краткий обзор литературы по тематике диссертационной работы, обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цели работы. Показаны научная новизна и практическая значимость работы.

**В первой главе** формулируется метод получения автомодельных решений для широкого класса задач нестационарного супердиффузионного переноса в рамках формализма интегральных уравнений. Данный метод позволяет получать решения, явно учитывающие закон подобия для распространения фронта, который определяет среднее время смещения на заданное расстояние в обобщенном виде, применимом и к супердиффузии. Алгоритм построения такого решения учитывает также асимптотическое поведение функции Грина далеко позади и далеко впереди распространяющегося фронта. Показано, что все структурные блоки модели определяются длиннопробежными переносчиками, описываемыми спадающим по степенному закону «хвостом» функции распределения



смещения переносчиков по длине их свободного пробега (ФРСП), т.е. полетами Леви. Справедливость предложенного автомодельного решения проверена посредством сравнения его с существующими и полученными точными решениями уравнений переноса.

В *разделе 1.1* исследуется трехмерный перенос резонансного излучения в модели Бибермана-Холстейна для различных форм спектральной линии. Уравнение Бибермана-Холстейна для переноса излучения в однородной среде двухуровневых атомов/ионов получается из системы уравнений для пространственной плотности возбужденных атомов  $F(\mathbf{r}, t)$  и спектральной интенсивности резонансного излучения. Эта система сводится к одному уравнению для  $F(\mathbf{r}, t)$ , которое является интегральным уравнением, несводимым к дифференциальному уравнению диффузионного типа:

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \int_V G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) F(\mathbf{r}_1, t) dV_1 - \left( \frac{1}{\tau} + \sigma \right) F(\mathbf{r}, t) + q(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где  $\tau$  – время жизни возбужденного атомного состояния относительно спонтанного радиационного распада;  $\sigma$  – скорость столкновительного тушения возбуждения;  $q$  – источник возбуждения атомов, отличный от возбуждения за счет поглощения резонансного фотона (т.е. столкновительного возбуждения). Ядро  $G$  определяется нормированным спектральным распределением испускаемого излучения (т.н. контуром спектральной линии испускания)  $\epsilon_\omega$  и коэффициентом поглощения  $k_\omega$ . В однородной среде  $G$  зависит от расстояния между точками испускания и поглощения фотона (функция  $T(r)$  часто называется функционалом Холстейна):

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dT(r)}{dr}, \quad T(r) = \int_0^\infty \epsilon_\omega \exp(-k_\omega r) d\omega. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) в бесконечной однородной среде с начальными условиями  $F(\mathbf{r}, t = 0) = \delta(\mathbf{r})$  (или, эквивалентно,  $q(r, t) = \delta(r) \delta(t)$ ) было получено в [13].

Наличие у функции Грина ярко выраженного максимума позволяет предположить существование эффективного фронта распространяющейся волны излучения (или, эквивалентно, волны возбуждения среды). Из проведенных нами численных расчетов точной функции Грина [13] видно, что в данной точке пространства эволюция возбуждения соответствует нарастанию возбуждения с достаточно четким фронтом, а затем – после прохождения фронта – имеет место спад. Метод определения параметров подобия для нестационарного нелокального переноса резонансного излучения можно сформулировать следующим образом. Для того, чтобы единым образом описать поведение функции Грина, необходимо найти законы подобия для двух асимптотик, а именно, для асимптотик далеко впереди и далеко позади волны возбуждения среды, и найти связь среднего времени смещения на заданное расстояние с локальным максимумом функции Грина в данной точке пространства.

Из [13] видно, что среднее время смещения для различных контуров спектральной линии сильно отличается от закона диффузии (см. [8, 14–17]),  $r \propto (Dt)^{1/2}$ . Проведенный нами численный анализ функции Грина [13] для различных форм спектральной линии показывает, что предложенное в [15] обобщение, которое расширяет этот закон на случай произвольного контура линии с длинными крыльями, дает хорошее приближение для локального максимума точной функции Грина как функции времени.

На малых временах,  $\tau \ll t \ll t_{fr}(r)$  (или, эквивалентно, далеко перед приходом распространяющегося фронта на расстояние  $r$ ,  $r \gg r_{fr}(t) \gg k_0^{-1}$ ), асимптотики функции Грина для доплеровского и лоренцевского контуров спектральной линии были получены в [13]. Эти асимптотики можно записать в обобщенном виде:

$$F(r, t) \approx (t / \tau) G(r), \quad (3)$$

что соответствует прямому возбуждению удаленных атомов фотонами, испущенными с частотой в крыле спектральной линии.

Функция Грина далеко позади распространяющегося фронта,  $r \ll r_{fr}(t)$ , или, эквивалентно,  $t \gg t_{fr}(r) \gg \tau$ , может быть оценена в предположении о локальной однородности возбуждения, связанной с частыми обходами между атомами фотонами, излучаемыми с частотой, близкой к центральной частоте спектральной линии. Соответствующее решение в трехмерном случае имеет вид «плато»:

$$F(t \gg t_{fr}(r)) = (3 / 4\pi)(r^*(t))^{-3} \eta(r^*(t) - r), \quad (4)$$

где  $\eta$  – единичная функция Хевисайда.

Естественно ожидать, что  $r^*(t) \propto r_{fr}(t)$ , в то время как точное соотношение между ними может быть получено из сравнения (4) с численным расчетом точной функции Грина [13]. Нами показано, что (4) дает хорошее приближение для временной зависимости далеко за фронтом для различных контуров спектральной линии. Однако абсолютные значения (4) и асимптотика точной функции Грина могут отличаться на постоянный множитель порядка единицы для доплеровского контура и на множитель  $\sim 200$  для лоренцевского контура спектральной линии.

В *разделе 1.2* производится проверка общего автомоделного решения посредством сравнения с аналитическими решениями [13] для функции Грина для доплеровского и лоренцевского контуров спектральной линии, а также с общим решением [13] в случае контуров Фойгта и Хольцмарка.

Справедливость скейлинга (4) дает возможность анализировать функцию Грина с помощью следующего автомоделного представления (для мгновенного точечного источника в точке  $\mathbf{r}_0$  в момент  $t_0$ ):

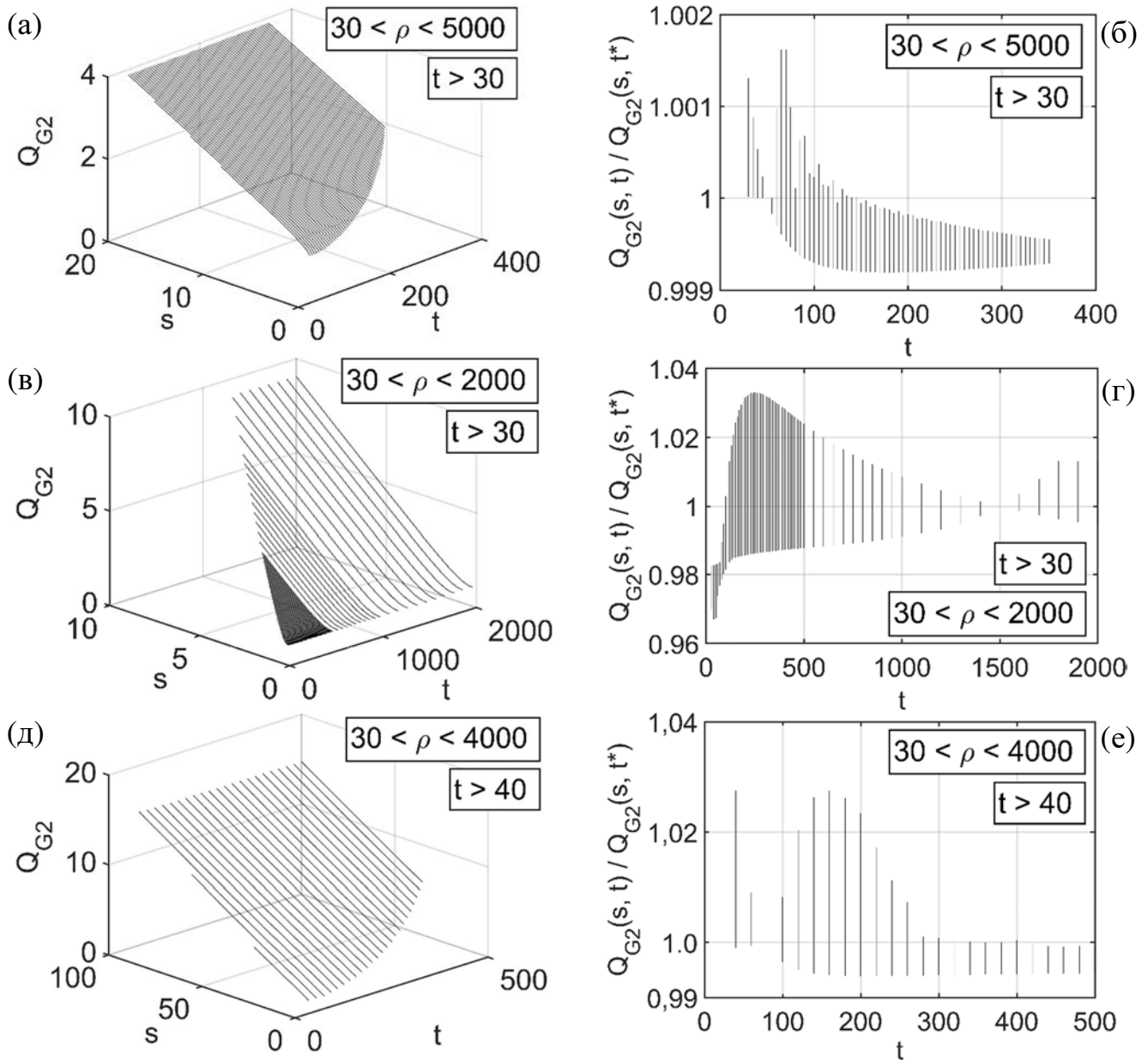
$$F_{\text{auto}}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = (t - t_0) \cdot G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cdot g(r_{fr}(t - t_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)). \quad (5)$$

Результаты восстановления функции  $g$  из сравнения функции (5) с расчетами точной функции Грина [13] для лоренцевского, доплеровского, фойгтовского и хольцмарковского контуров спектральной линии и проверки точности автомодельного решения (5) представлены на рисунке 1. Связь между функцией  $g$  и точным решением [13] уравнения (1),  $f_{\text{exact}}$ , описывается следующими уравнениями:

$$Q_G(\rho, t) \equiv (1/\rho) \hat{G}^{-1}(f_{\text{exact}}(\rho, t)/t), \quad (6)$$

где  $\rho \equiv rk_0$ ,  $\hat{G}^{-1}$  – функция, обратная к функции  $G$ ,  $Q_G(\rho, t(\rho, s)) \equiv Q_{G1}(s, \rho) = g(s)$ ,  $Q_G(\rho(t, s), t) \equiv Q_{G2}(s, t) = g(s)$ , где функции  $t(\rho, s)$  и  $\rho(t, s)$  заданы соотношением  $s = \rho_{\text{fr}}(t)/\rho$ .

Проведенный анализ показал, что функция (5) в самом деле является автомодельной функцией Грина с точностью, определяемой совпадением кривых  $Q_G$  для различных значений второго аргумента. Иллюстрация для  $Q_{G2}$  показана на рисунке 1, а максимальные отклонения функций  $Q_G$  от функции только одной переменной  $s$  указаны ниже.



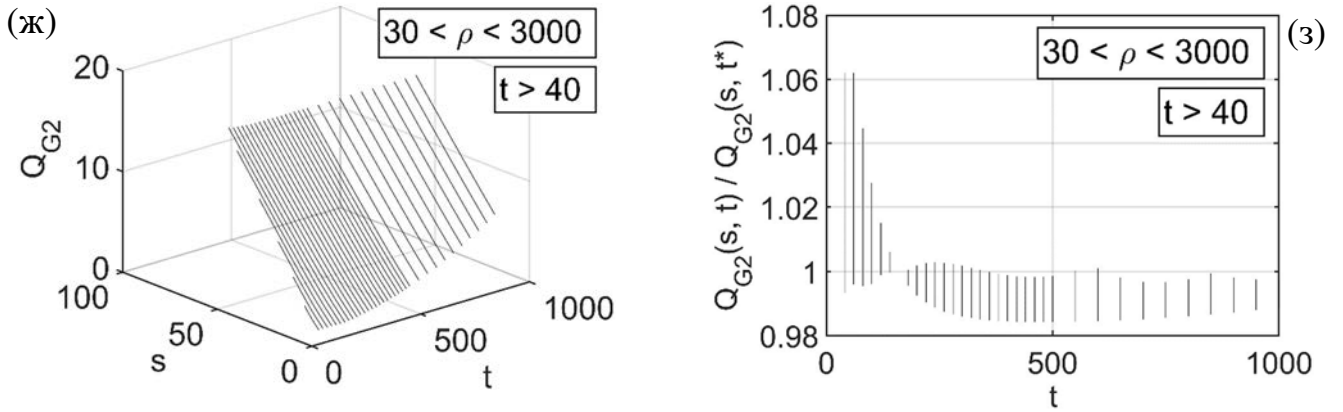


Рисунок 1. Функция  $Q_{G2}(s(\rho, t), t)$  при  $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$ ,  $t > t_{\min}$  для различных контуров спектральной линии: (а) дисперсионный (лоренцевский); (в) доплеровский; (д) фойгтовский при  $a = \sqrt{\ln 2} \Delta\omega_{\text{Lorentz}}/\Delta\omega_{\text{Doppler}} = 1$ ; (ж) хольцмарковский. Проекция этой двумерной функции на плоскость  $\{Q_{G2}, s\}$  дает единую автомодельную функцию  $g(s)$ . Точность автомодельности характеризуется отклонением от единицы проекции отношения  $Q_{G2}(s, t)/Q_{G2}(s, t^*)$  на плоскость  $\{Q_{G2}, t\}$ , показанной на рисунках справа (диапазон изменения переменной  $s$  задан условием  $\rho < \rho_{\max}$ ,  $t > t_{\min}$ ) для различных контуров спектральной линии: (б) дисперсионный (лоренцевский),  $t^* = 50$ ; (г) доплеровский,  $t^* = 1500$ ; (е) фойгтовский,  $a = 1$ ,  $t^* = 80$ ; (з) хольцмарковский,  $t^* = 160$ .

При  $\{\rho > 30, t > 40\}$  отклонение равно 0,2% для лоренцевской формы спектральной линии и 4%, 3% и 8% для, соответственно, доплеровской, фойгтовской ( $a = 1$ ) и хольцмарковской форм спектральной линии. Максимальное отклонение для последних трех форм спектральной линии составляет 1%, если мы ограничим, при  $\rho > 30$ , интервал времени как  $t > 950, 280$  и  $700$ , соответственно. Наибольшие отклонения имеют место при  $s \sim 1$ .

В **разделе 1.3** описаны основные принципы метода получения автомодельных решений в случае одномерного (1D) переноса для функции распределения смещения переносчиков по длине их свободного пробега (ФРСП) (т.е. пробега до первого поглощения), медленно, степенным образом спадающей с расстоянием. Здесь найдена точность предложенного автомодельного решения посредством сравнения его с точным решением для различных показателей степени.

Рассматривается одномерный перенос в однородной среде, описываемый уравнением для пространственной плотности  $f(x, t)$  возбуждения среды, которое может возникать из-за обмена возбуждением между различными точками среды посредством испускания и поглощения переносчиков (запаздыванием, связанным с конечностью скорости переносчиков, пренебрегаем):

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} W(|x - x_1|) f(x_1, t) dx_1 - \left( \frac{1}{\tau} + \sigma \right) f(x, t) + q(x, t), \quad (7)$$

где  $W(x)$  – это ФРСП, т.е. вероятность того, что переносчик, испущенный в какой-либо точке, будет на первом пролете поглощен на расстоянии  $x$  от этой точки, остальные обо-

значения сохраняют смысл обозначений в (1). Здесь и далее будем использовать безразмерные временные и пространственные переменные, предполагая нормирование времени на  $\tau$  и используя безразмерную ФРСП. Будем искать функцию Грина, т.е. решение для точечного мгновенного источника  $q(x, t) = \delta(x)\delta(t)$ . Возьмем ФРСП в простом виде, при котором она обладает длинным «хвостом» и бесконечной величиной среднеквадратичного смещения:

$$W(\rho) = \frac{\gamma}{2(1+\rho)^{\gamma+1}}, \quad 0 < \gamma < 2, \quad \rho = |x - x'|, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(|x - x'|) dx' = 1. \quad (8)$$

Полученные в предыдущих разделах результаты подсказывают вид асимптотик и выбор вида автомодельного решения. Повторяя рассуждения из раздела 1.1, имеем далеко впереди распространяющегося фронта

$$f(x, t) \approx t W(\rho), \quad \rho = |x|, \quad \rho \gg \rho_{fr}(t) \gg 1, \quad (9)$$

и далеко позади распространяющегося фронта

$$f(x, t) \sim (1/2\rho_{fr}(t))\eta(\rho_{fr}(t) - |x|), \quad \rho \ll \rho_{fr}(t). \quad (10)$$

Асимптотики (9) и (10) могут быть объединены общей интерполяционной формулой

$$f(x, t) = t W(\rho g(\rho_{fr}(t)/\rho)), \quad \rho = |x|, \quad (11)$$

где  $g$  является функцией одной переменной, и ее асимптотическое поведение известно:  $g(s) = 1$  при  $s \ll 1$  и  $g(s) \propto s$  при  $s \gg 1$ .

Проверка точности решения (11) посредством сравнения с точным решением уравнения (7), которое при ФРСП (8) может быть найдено с помощью преобразования Фурье, является обратной задачей восстановления функции  $g$  или, эквивалентно, проверкой закона подобия (самоподобия решений), сформулированного в (11). Связь между  $g$  и точным решением уравнения,  $f_{\text{exact}}$ , описывается следующими уравнениями:

$$Q_W(x, t) \equiv \frac{1}{\rho} \hat{W}^{-1} \left( \frac{f_{\text{exact}}(x, t)}{t} \right) = \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{\gamma t}{2 f_{\text{exact}}(x, t)} \right)^{1/(\gamma+1)} - 1 \right], \quad \rho \equiv |x|, \quad (12)$$

где  $\hat{W}^{-1}$  – функция, обратная к  $W$ ,  $Q_W(\rho, t(\rho, s)) \equiv Q_{W1}(s, \rho) = g(s)$ ,  $Q_W(\rho(t, s), t) \equiv Q_{W2}(s, t) = g(s)$ , где функции  $t(\rho, s)$  и  $\rho(t, s)$  задаются соотношением  $s = ((t + 1)^{1/\gamma} - 1)/\rho$ , а закону распространения фронта соответствует соотношение  $\rho_{fr}(t) = \rho(t, s = 1)$ . Чтобы подтвердить автомодельность в (11), нужно показать, что функции  $Q_{W1}$  и  $Q_{W2}$  слабо зависят (или вовсе не зависят) от, соответственно, пространственной координаты и времени.

Значения максимальных отклонений функций  $Q_{W1}$  и  $Q_{W2}$  от функции только одной переменной,  $s$ , оказываются следующими. Для  $\gamma = 1$  это отклонение составляет около 3% при  $\{\rho > 30, t > 30\}$  и 1% при  $\{\rho > 30, t > 270\}$  и  $\{\rho > 100, t > 30\}$ . Точность в случае более «слабого» хвоста оказывается хуже: для  $\gamma = 1,5$  и  $\rho > 30$  отклонение составляет 12%, 7%

и 1% при, соответственно,  $t > 30$ ,  $t > 100$  и  $t > 2400$ . В случае ФРСП с более «сильным» хвостом,  $\gamma = 0,5$ , фронт распространяется существенно быстрее, и высокая точность достигается на больших расстояниях: 5% при  $\{\rho > 100, t > 30\}$  и 1% при  $\{\rho > 100, t > 100\}$ . Наиболее сильные отклонения имеют место при  $s \sim 1$ .

Таким образом, восстановление функции  $g(s)$  по численным расчетам точного решения в небольшой, фактически одномерной области в двумерном пространстве независимых переменных позволяет, благодаря автомодельности, найти с большой точностью решение задачи в подавляющей части всего двумерного пространства переменных.

В главе 2 получено аналитическое решение для стационарного нелокального переноса излучения в спектральных линиях в неоднородном плоском плазменном слое в модели Бибермана-Холстейна для широкого класса профилей параметров плазмы.

В разделе 2.1 приводятся результаты обобщения подхода [26, 27] на случай стационарного уравнения Бибермана-Холстейна в неоднородном плоском плазменном слое. Исследован случай одномерного переноса для определенного типа подобия пространственных профилей трех характеристик, а именно, плотности невозбужденных атомов, ширины спектральной линии и плотности мощности нерадиационного источника возбуждения атомов. Изучена возможность аналитического описания профиля плотности возбужденных атомов в терминах параметров подобия упомянутых выше профилей.

Рассматривается одномерный стационарный перенос в неоднородном плоском слое толщины  $L$ . Уравнение Бибермана-Холстейна в случае изотропных излучателей, когда вероятности испускания фотона атомом и соответствующее сечение поглощения в системе покоя атома не зависят от направления фотона, имеет вид (ср. [9, 12]):

$$\int_0^L dx_1 \int_0^\infty \frac{d\omega P(\omega, x_1) n(x_1)}{2\tau} k(\omega, x) \exp\left(-\left|\int_x^{x_1} k(\omega, x_2) dx_2\right|\right) + q(x) = \left(\frac{1}{\tau} + w(x)\right) n(x), \quad (13)$$

где  $n(x)$  – плотность возбужденных атомов,  $P(\omega, x)$  – (нормированный по частоте  $\omega$ ) контур линии испускания фотона возбужденным атомом в точке  $x$ ,  $k(\omega, x)$  – коэффициент поглощения фотона возбужденным атомом в точке  $x$  (обратная длина пробега фотона);  $w(x)$  – функция стока (т.е. обратное время уменьшения населенности возбужденного состояния за счет всех процессов, кроме спонтанного радиационного распада); остальные обозначения сохраняют смысл обозначений в (1).

В некоторых случаях уравнения переноса могут допускать заметное упрощение. В [26, 27] было показано, что при условии  $\lambda/S = \text{const}$ , где  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега,  $S$  – характерный масштаб изменения функции распределения (подробнее об определении  $\lambda$  и  $S$  см. [26, 27]) можно ввести автомодельные переменные, позволяющие найти точные аналитические решения кинетических уравнений. В нашем случае условие  $\lambda/S = \text{const}$  может быть переписано в форме

$$\left(\omega_T(x)/n_0(x)\right) \left(d \ln \omega_T(x)/dx\right) \equiv \gamma = \text{const}, \quad (14)$$

где  $n_0(x)$  – плотность невозбужденных атомов,  $\omega_T(x)$  – ширина спектральной линии. Если считать условие (14) выполненным и искать решение уравнения Бибермана-Холстейна (13) в форме  $n(x) = s \cdot (\tilde{\omega}/\omega_T(x))^\alpha n_0(x)$ , где  $\tilde{\omega}$  – ширина спектральной линии в центре слоя, коэффициент  $s \ll 1$  обеспечивает малость плотности возбужденных атомов  $n$  по сравнению с плотностью невозбужденных атомов  $n_0$ ,  $\alpha$  – варьируемый параметр, то уравнение (13) может быть преобразовано к виду

$$1 + \tau w(x) = J_{\text{slab}}^{(\text{ID})}(x, \alpha, \beta) + q(x) \cdot (\tau / (s n_0(x))) \cdot (\omega_T(x) / \tilde{\omega}_T)^\alpha, \quad (15)$$

$$J_{\text{slab}}^{(\text{ID})}(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\frac{\omega_T(x)\xi}{\omega_T(L)}}^{\frac{\omega_T(x)\xi}{\omega_T(0)}} d\eta \frac{1}{\eta} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^\alpha a(\eta) a(\xi) \exp\left(-\beta \left| \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\sigma} a(\sigma) d\sigma \right|\right). \quad (16)$$

Здесь введен характеризующий оптическую толщину параметр  $\beta \equiv C_{01}/\gamma$ ,  $C_{01} = B_{01} \hbar \omega_0 / 4\pi$ ,  $B_{01}$  – коэффициент Эйнштейна (для поглощения). Функция  $a(x)$  характеризует контур линии испускания  $P(\omega, x)$  и коэффициент поглощения  $k(\omega, x)$ . Выход функции  $J(x, \alpha, \beta)$  на константу, равную 1, при очень большой оптической толщине можно доказать в общем виде. Это отвечает случаю полной компенсации поглощения и испускания фотонов в данной точке (последнее справедливо, например, в бесконечной среде).

Из (15) получаем искомое выражение для профиля плотности возбужденных атомов:

$$n(x) = \frac{\tau q(x)}{(1 + \tau w(x)) - J(x, \alpha, \beta)}. \quad (17)$$

Здесь для каждого конкретного вида функции источника  $q(x)$  необходимо учитывать ограничения допустимых классов профилей температур и плотностей, накладываемые предположением  $n(x) = s \cdot (\tilde{\omega}/\omega_T(x))^\alpha n_0(x)$ .

В более реалистичном случае учета трехмерного переноса в неоднородном плоском слое уравнение переноса отличается от одномерного переноса в виде (13) только тем, что в нем вместо обычной экспоненты будет стоять интегральная (exponential integral)  $E_1\left(\left|\int_z^{z_1} k(\omega, z_2) dz_2\right|\right)$ . Поэтому выкладки для одномерного переноса остаются в силе, только  $J(x, \alpha, \beta)$  (16) изменится соответственно вышеуказанной замене.

В **разделе 2.2** исследована возможность практического применения полученных в разделе 2.1 аналитических решений уравнения переноса излучения в модели Бибермана-Холстейна. Оценивается реалистичность накладываемых моделью требований к профилям параметров плазмы, рассматривается модельная задача трехмерного переноса в линии лайман-альфа в неоднородном плоском слое водородной плазмы.

Применение аналитических решений, получаемых с помощью разрабатываемого подхода, наиболее интересно для такой плазмы, которая, в пространстве основных парамет-

ров плазмы и кинетических условий, лежит достаточно далеко от основных кинетических пределов – от локального термодинамического равновесия (ЛТР) (т.е. предела, в котором распределение по возбужденным состояниям очень близко к распределению Больцмана, и для расчета радиационных потерь нет необходимости решать уравнение Бибермана-Холстейна) и от корональной модели (т.е. предела, при котором кинетика заселения возбужденного состояния очень проста, и численное моделирование общей кинетической задачи значительно менее затруднительно по сравнению с состоянием плазмы, промежуточным между ЛТР и корональным пределом).

В качестве примера, иллюстрирующего общий метод, рассмотрена следующая модельная задача: трехмерный перенос в слое водорода толщиной  $L = 50$  см. Пространственные профили основных параметров плазмы представлены на рисунке 2(а)-(в). Выбор параметров плазмы подсказан результатами моделирования численными кодами для пристеночной плазмы в действующих токамаках и токамаках-реакторах в условиях интенсивного поступления нейтрального водорода со стенки в плазму (ср., напр., [19]). Здесь мы анализируем случай, когда нейтральная компонента обладает достаточно большой оптической толщиной в линии лайман-альфа.

Чтобы продемонстрировать возможности точного аналитического решения, проводится сравнение полученного аналитического решения с соответствующим приближенным решением, полученным в рамках метода «прострельного» выхода (метода  $\tau_{эфф}$ ) [14, 16, 17], см. рисунок 2(г). Сравнение населенностей вблизи границ не приведено, поскольку, во-первых, там полученное нами решение не является точным решением уравнения переноса излучения с реалистичными профилями параметров пристеночной плазмы и, во-вторых, метод «прострельного» выхода, как известно, существенно теряет точность вблизи границ плазмы.

Результаты сравнения, приведенные на рисунке 2(г), показывают, что в области применимости обеих моделей приближение  $\tau_{эфф}$  достаточно хорошо работает в области более горячей плазмы. Однако в области более низких температур метод  $\tau_{эфф}$  оказывается менее точным. Это можно объяснить следующим образом: в неоднородной плазме, у которой к тому же оптическая толщина не слишком велика, применимость метода  $\tau_{эфф}$  (а именно, необходимость того, что радиационный обмен возбуждением атома в данной точке с атомами во всем объеме плазмы должен быть с высокой точностью скомпенсирован) не может быть гарантирована.

В **третьей главе** представлен метод расчётов точности томсоновской диагностики немаксвелловской плазмы в токамаках-реакторах и результаты его применения к томсоновской диагностике центральной плазмы в ИТЭР.

В **разделе 3.1** описывается метод расчётов точности томсоновской диагностики немаксвелловской плазмы в токамаках-реакторах. Метод основан на корректном расчёте ошибок определения основных параметров функции распределения электронов по



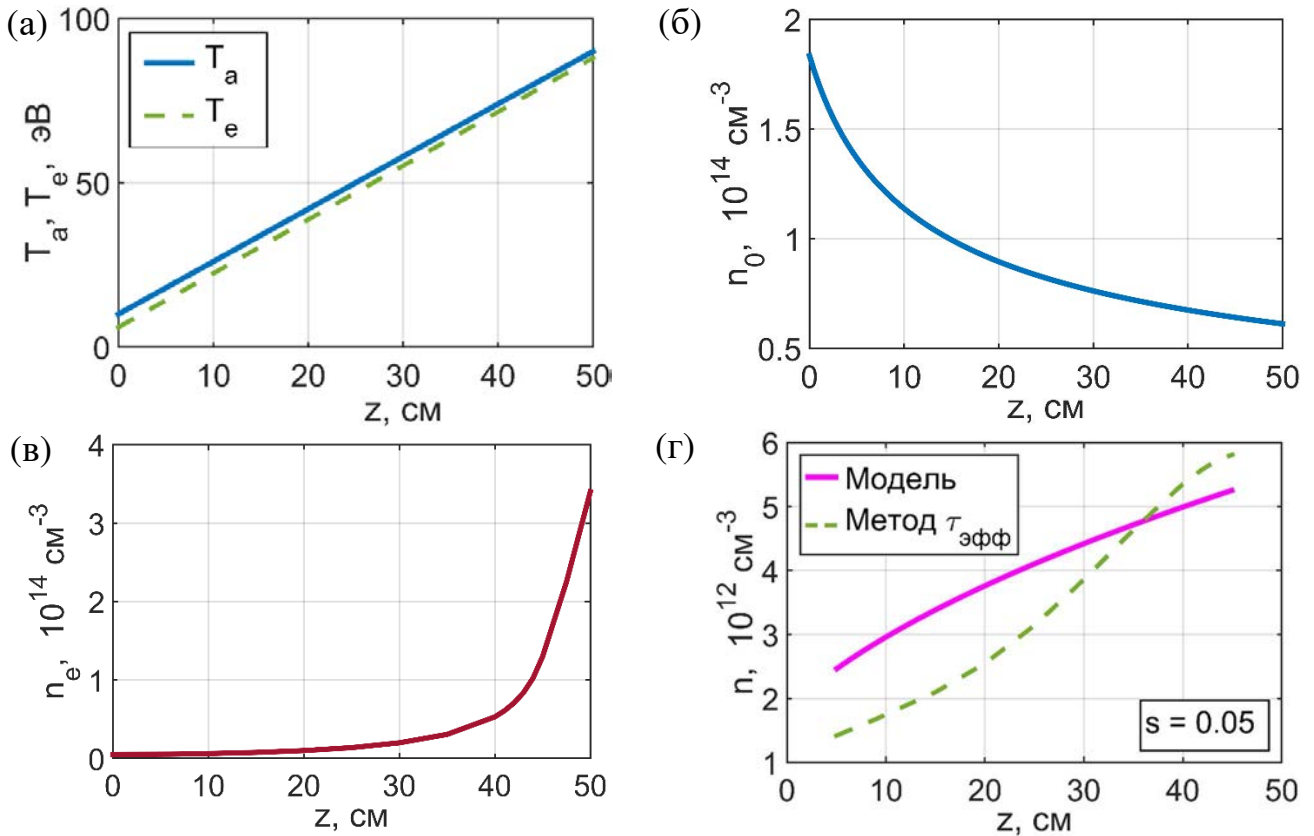


Рисунок 2. Пространственные профили основных параметров плазмы: (а) температура атомов  $T_a(z)$  и электронная температура  $T_e(z)$ ; (б) плотность невозбужденных атомов  $n_0(z)$ ; (в) плотность электронов  $n_e(z)$ ; (г) сравнение результатов расчета профиля плотности возбужденных атомов  $n(z)$  в рамках разрабатываемой модели (фиолетовая кривая) и по методу  $\tau_{\text{эфф}}$  (зеленая пунктирная кривая).

скоростям (ФРЭС) по результатам измерения спектров томсоновского рассеяния с учётом возможных источников ошибок. Метод использован для анализа преимуществ использования нескольких зондирующих длин волн в томсоновской диагностике максвелловской и немаксвелловской плазмы посредством решения обратной задачи для оценки погрешностей, включающей возможность восстанавливать температуру электронов  $T_e$  основного теплового (т.е. максвелловского) компонента вплоть до  $T_e \sim 40$  кэВ по измерениям спектра в диапазоне видимого и инфракрасного света,  $\sim 400\text{—}1000$  нм, и умеренную анизотропию ФРЭС электронов по питч-углам в слабо/умеренно надтепловом диапазоне энергий. Точность этой диагностики можно найти только в рамках т.н. синтетической диагностики, путем сравнения «истинных» (т.е. используемых при генерации «синтетических» экспериментальных данных) и восстановленных значений диагностируемых параметров.

Количество фотоэлектронов, попадающих в детектор вследствие томсоновского рассеяния, описывается формулой

$$\left[ N_{\text{ph-el}}^{(j)} \right]_{\text{Las}} = (E_{\text{Las}} / \hbar\omega_0) \Delta x_{\text{Las}} \Delta\Omega_{\text{pup}} n_e r_0^2 \int_{\Delta X_j} \eta_q \eta_{\text{tr}} \eta_{\text{fib}} \eta_{\text{ch}} \sigma_{\text{TS}} dX, \quad (18)$$

где  $X = \lambda/\lambda_0 - 1$ ,  $\Delta X_j$  — спектральная ширина  $j$ -го канала;  $\lambda$  и  $\lambda_0$  — длины волн рассеянного и зондирующего излучения, соответственно;  $E_{\text{Las}}$  — энергия лазерного импульса;  $\Delta x_{\text{Las}}$  —

длина излучающего цилиндра в поле наблюдения детектора («длина рассеяния»);  $n_e$  – плотность электронов;  $\Delta\Omega_{\text{pup}} = \Delta S_{\text{pup}}/(\mathbf{r}_{\text{em}} - \mathbf{r}_{\text{pup}})^2$ ; где  $\Delta S_{\text{pup}}$  – площадь зрачка, а векторы задают координаты излучающего цилиндра и зрачка;  $r_0$  – классический радиус электрона;  $\sigma_{\text{TS}}$  — нормированное сечение томсоновского рассеяния; множители  $\eta$  описывают свойства оптической системы: квантовый выход детектора  $\eta_q$ , пропускание оптической системы  $\eta_{\text{tr}}$ , пропускание оптического волокна  $\eta_{\text{fib}}$ , пропускание каналов спектрометра  $\eta_{\text{ch}}$ .

Для предварительной оценки точности томсоновской диагностики в токамаках-реакторах уместно использовать модельную ФРЭС, качественно воспроизводящую основные особенности электронной плазмы в условиях сильного дополнительного нагрева. В данной работе мы рассматриваем следующую модельную ФРЭС, качественно согласующуюся с результатами работ по численному моделированию ФРЭС (ср., напр., рис. 1 в [31]):

$$f(\mathbf{p}) = (1 - \delta_{\text{Hot}}) f_{\text{Maxw}}(\mathbf{p}) + \delta_{\text{Hot}} f_{\text{Hot}}(p_{\parallel}, p_{\perp}), \quad (19)$$

$$f_{\text{Hot}}(p_{\parallel}, p_{\perp}) = C_{\text{Hot}} \exp \left[ -mc^2 \left( \frac{\sqrt{1 + (p/mc)^2} - 1}{p^2} \right) \left( \frac{p_{\parallel}^2}{T_{e\parallel}} + \frac{p_{\perp}^2}{T_{e\perp}} \right) \right]. \quad (20)$$

Здесь  $f_{\text{Maxw}}(\mathbf{p})$  — релятивистское максвелловское распределение;  $C_{\text{Hot}}$  — нормировочная константа (в импульсном пространстве);  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — проекции импульса  $\mathbf{p}$  на направления, параллельное и перпендикулярное магнитному полю, соответственно;  $\delta_{\text{Hot}}$  — доля надтепловых электронов в полной плотности электронов.

Предлагается следующий алгоритм оценки погрешностей:

— на основе набора предполагаемых значений неизвестных параметров, а именно  $\xi_{\text{assum}} = \{T_e^{\text{assum}}, T_{e\parallel}^{\text{assum}}, T_{e\perp}^{\text{assum}}, n_e^{\text{assum}}, \delta_{\text{Hot}}^{\text{assum}}\}$  для ФРЭС (19)–(20) и  $\xi_{\text{assum}} = \{T_e^{\text{assum}}, n_e^{\text{assum}}\}$  для максвелловской ФРЭС, для каждого спектрального канала каждого лазера рассчитывается предполагаемое количество фотоэлектронов, попадающих в этот канал из-за томсоновского рассеяния лазерного излучения;

— многократно генерируется «синтетический» экспериментальный спектр, чтобы смоделировать квантовый шум детектора и усилителя для измерений как с рассеянием лазерного излучения, так и без него. Подсчитывается разница между полным  $[N_{\text{ph-el}}^{(j)}]_{\text{Total}}$  и фоновым  $[N_{\text{ph-el}}^{(j)}]_{\text{Backgr}}$  сигналами в каждом спектральном канале. При  $[N_{\text{ph-el}}^{(j)}]_{\text{Laser}} \gg 1$  можно использовать распределение Гаусса со средним значением  $[N_{\text{ph-el}}^{(j)}]_{\text{Laser}}$  и среднеквадратическим отклонением, равным  $\sigma_j = \left\{ k \left( [N_{\text{ph-el}}^{(j)}]_{\text{Laser}} + 2[N_{\text{ph-el}}^{(j)}]_{\text{Backgr}} \right) + 2[\sigma_j]_{\text{Ampl}}^2 \right\}^{1/2}$  где  $[\sigma_j]_{\text{Ampl}}$  — шум усилителя,  $k$  — коэффициент повышения шума вторичными электронами в детекторе;

— для определения значений искомых параметров  $\xi = \{T_e, T_{e\parallel}, T_{e\perp}, n_e, \delta_{\text{Hot}}\}$  и вычисления ошибки этой процедуры необходимо многократное (для различных случайных, «рандомизированных» значений регистрируемого детектором сигнала) решение следующей обратной задачи — минимизации суммы отличий между «синтетическим» экспериментальным сигналом от рассеянного лазерного излучения и соответствующим варьируемым рассчитываемым сигналом:

$$\Delta^{(j)}(\xi, \xi_{\text{assum}}) = \left| \left\{ \left[ N_{\text{ph-el}}^{(j)}(\xi_{\text{assum}}) \right]_{\text{Total}} - \left[ N_{\text{ph-el}}^{(j)} \right]_{\text{Backgr}} \right\}_{\text{Random}} - \left[ N_{\text{ph-el}}^{(j)}(\xi) \right]_{\text{Las}} \right|. \quad (21)$$

В общем случае можно сказать, что для обработки эксперимента уместно использовать критерий оптимизации, который, при одинаковых «истинных» (т.е. используемых при генерации «синтетических» экспериментальных данных) значениях искомых величин дает наименьшую ошибку восстановления этих значений путем «обработки» экспериментальных данных (т.е. путем решения соответствующих обратных задач). Поскольку в разных областях параметров задачи наиболее эффективны могут быть разные критерии оптимизации, уместно использовать не один критерий. В рассматриваемом случае томсоновской диагностики в присутствии фона с сильной спектральной неоднородностью в пределах спектрального диапазона измерений таковыми являются критерий

$$\sum_{\lambda_0} \sum_j \Delta^{(j)}(\xi, \xi_{\text{assum}}) \xrightarrow{\xi} \min \quad (22)$$

и традиционно используемый в томсоновской диагностике критерий с введением весовых коэффициентов

$$\sum_{\lambda_0} \sum_j (\Delta^{(j)}(\xi, \xi_{\text{assum}}) / \sigma_j)^2 \xrightarrow{\xi} \min, \quad (23)$$

где суммирование идёт по всем лазерам и всем спектральным каналам.

Погрешность восстановления заданной величины параметра  $B$ , обозначаемая как Err (от английского error), определяется как усреднённое (по статистическому ансамблю найденных значений величины  $B$ ) нормированное среднеквадратичное отклонение от исходно заданного значения величины  $B$ :

$$\text{Err}(B^{\text{assumed}}) \equiv d_{\text{err}} [ \langle (B/B^{\text{assumed}} - 1)^2 \rangle ]^{1/2}. \quad (24)$$

Множитель  $d_{\text{err}}$  в (24) задает интервал возможных отклонений восстановленных значений параметра от его «истинного» значения (т.е. использованного при создании «синтетических» экспериментальных данных), который, по определению, считается допустимым (напр., при  $d_{\text{err}} = 2,5$  это отвечает равной 98% вероятности обнаружить значение величины  $B$  в интервале  $\{B^{\text{assumed}} - 2,5\delta B, B^{\text{assumed}} + 2,5\delta B\}$ , где  $\delta B = [ \langle (B - B^{\text{assumed}})^2 \rangle ]^{1/2}$ ).

В **разделе 3.2** рассматриваются конкретные примеры системы томсоновской диагностики центральной плазмы в ИТЭР, приводится сравнительный анализ стандартной и «многоцветной» схем томсоновской диагностики. Результаты подтверждают заметное

преимущество использования лазеров с различными длинами волн по сравнению с традиционным использованием лазера с одной длиной волны. Один из примеров сравнения оценок погрешностей указанных схем приведен на рисунке 3.

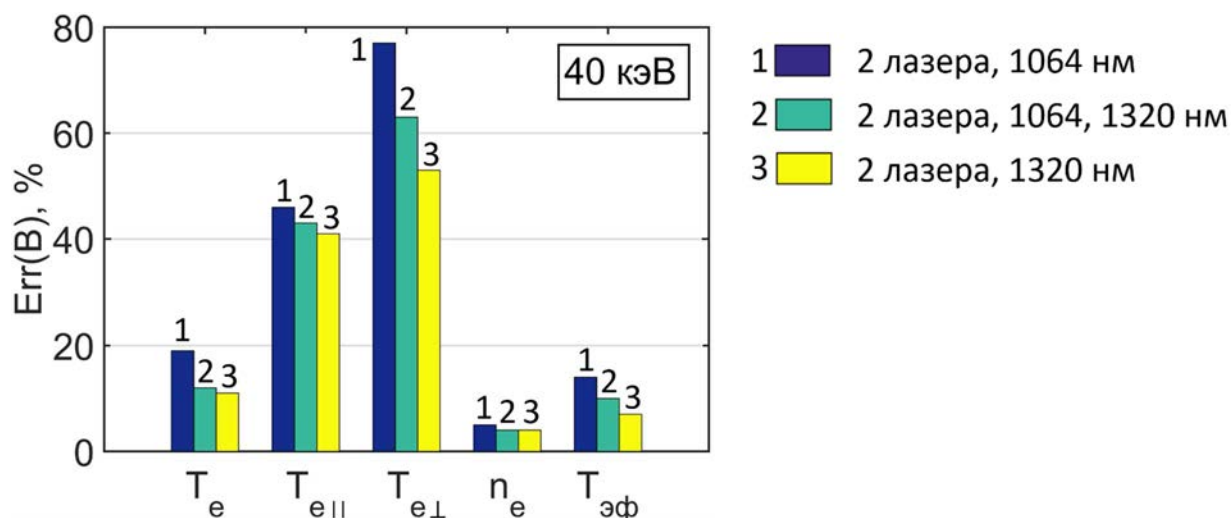


Рисунок 3. Погрешности измерения параметров  $B$ , вычисленные для предполагаемой ФРЭС вида (19), (20) при предполагаемой температуре электронов основной компоненты плазмы  $T_e = 40$  кэВ. Точность восстановления немаксвелловских ФРЭС следует оценивать по средней энергии кинетического движения электрона  $E_{kin}$ . Для сравнения со случаем максвелловских ФРЭС нужно использовать эффективную температуру  $T_{эф}$ , которая, по определению, связана с  $E_{kin}$  таким же соотношением, что и в случае максвелловской ФРЭС:  $\langle E_{kin} \rangle = T_{эф} - 1 - K'_2(1/T_{эф}) / K_2(1/T_{эф})$ ,  $E_{kin} = [(p/mc) + 1]^{1/2} - 1$ , где энергия и температура выражены в единицах энергии покоя электрона;  $K_2$  — модифицированная функция Бесселя второго порядка, штрих означает производную, в нерелятивистском пределе это переходит в известное соотношение  $\langle E_{kin} \rangle = (3/2)T$ .

В *разделе 3.3* описывается новый алгоритм диагностики основных параметров ФРЭС в условиях ее существенного отклонения от максвелловской. Алгоритм объединяет два ранее разработанных алгоритма определения ФРЭС: (i) по томсоновскому рассеянию [A4] и по (ii) электронному циклотронному (ЭЦ) излучению [29] в спектральном диапазоне, для которого плазма является оптически прозрачной (т.е. для немалых гармоник основной ЭЦ частоты). Здесь дается предварительный анализ возможностей предлагаемой комплексной диагностики достаточно сильного отклонения ФРЭС от максвелловской в случае гипотетического эксперимента, в котором используются технические параметры томсоновской диагностики центральной плазмы в ИТЭР, и развивается описанная в разделе 3.1 методика [A3] анализа ее точности. Для описания плазмы использованы данные предсказательного моделирования т.н. стационарного сценария разряда в ИТЭР [33].

Первым этапом комплексной диагностики является предварительная оценка искомых параметров. Их значения восстанавливаются для тех точек пространства, из которых ожидается вклад ЭЦ излучения в измеряемый сигнал. Для этого на основе томсоновских

данных решается обратная задача (21) с ФРЭС (19), (20). Затем осуществляется совместная оптимизация, формируется единый вектор всех неизвестных, причем решение ищется вблизи значений, найденных на этапе предварительной оценки. Таким образом осуществляется корректировка первичных результатов анализа только томсоновских данных, возможная благодаря добавлению информации о горячих электронах по данным ЭЦ излучения на достаточно больших частотах.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработан метод определения параметров подобия для нестационарного нелокального переноса резонансного излучения в однородной плазме; метод использован для анализа функции Грина нестационарного уравнения Бибермана-Холстейна для произвольного механизма уширения линии, при котором перенос является нелокальным (супердиффузионным).
2. Получено приближенное автомодельное решение уравнения Бибермана-Холстейна и найдена точность этого решения путем сравнения с существующими в литературе аналитическими решениями для доплеровского, лоренцевского контуров спектральной линии, а также существующим общим решением в случае контуров спектральной линии Фойгта и Хольцмарка.
3. Метод пп. 1 и 2 обобщен на широкий класс переносов полетами Леви в однородной среде, для которого функция распределения смещения переносчиков по длине их свободного пробега имеет медленный, степенной спад с ростом расстояния. Найдена точность полученного автомодельного решения посредством сравнения его с точным решением для различных показателей степени спада.
4. Получены аналитические автомодельные решения задач одномерного и трехмерного переноса резонансного излучения в сильно неоднородном плазменном слое для определенного типа подобия пространственных профилей трех характеристик, а именно, плотности невозбужденных атомов, ширины спектральной линии и плотности мощности нерадиационного источника возбуждения атомов.
5. Для профилей основных параметров плазменного слоя, характерных для пристеночной плазмы, проведено сравнение полученного точного аналитического решения для профиля плотности возбужденных атомов с известным приближением «протестированного» выхода и протестирована точность последнего.
6. Разработан метод расчётов точности томсоновской диагностики немаксвелловской плазмы в токамаках-реакторах, основанный на одновременном учете широты и асимметрии спектра рассеянного излучения при определении основных параметров функции распределения электронов по скоростям (ФРЭС) по результатам измерения спектров с учётом возможных источников ошибок в измерительной системе.

7. Метод использован для анализа преимуществ использования нескольких зондирующих длин волн в томсоновской диагностике максвелловской и немаксвелловской плазмы посредством решения обратной задачи для оценки погрешностей. Показано, что для плазмы с электронной температурой 40 кэВ и  $\delta_{\text{Hot}} = 10\%$  и умеренной энергии надтепловых электронов ( $T_{\text{e||}} = 60$  кэВ,  $T_{\text{e}\perp} = 50$  кэВ) использование 1320 нм лазера позволяет добиться повышения точности оценки эффективной энергии в 1,5 раза.
8. Предложен новый алгоритм комплексной диагностики основных параметров немаксвелловской ФРЭС, объединяющий два ранее разработанных — для томсоновского рассеяния и для электронного циклотронного (ЭЦ) излучения в спектральном диапазоне, для которого плазма является оптически прозрачной (т.е. для немалых гармоник основной ЭЦ частоты). Показана возможность повышения точности оценок энергии, связанной с перпендикулярной и параллельной магнитному полю компонентами импульса, в  $\sim 1,5$  раза в центральной части плазмы в токамаке-реакторе.

### Литература

1. Shlesinger M., Zaslavsky G. M., Frisch U. (Eds.) // *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, New York: Springer-Verlag, 1995.
2. Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. Lévy flight superdiffusion: an introduction // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, v. 18, p. 2649, DOI: 10.1142/S0218127408021877.
3. Klafter J., Sokolov I. M. Anomalous diffusion spreads its wings // *Physics World*, 2005, v. 18, p. 29.
4. Eliazar I. I., Shlesinger M. F. Fractional motions // *Physics Reports*, 2013, v. 527, p. 101–129.
5. Mandelbrot B.B. // *The Fractal Geometry of Nature*, New York: W. H. Freeman, 1982.
6. Биберман Л.М. К теории диффузии резонансного излучения // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 1947, т. 17, с. 416.
7. Holstein T. Imprisonment of Resonance Radiation in Gases // *Physical Review*, 1947, v. 72, № 12, p. 1212.
8. Иванов В.В. // *Перенос излучения и спектры небесных тел*, М.: Наука, 1969.
9. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. // *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*. М.: Наука, 1982.
10. Коган В.И. Запирание излучения в плазме // *Энциклопедия низкотемпературной плазмы*, под ред. В.Е. Фортова. М., «Наука», 2000, Вводный том 1, с.481.
11. Старостин А.Н. Перенос резонансного излучения. Там же, с.471.
12. Абрамов В.А., Коган В.И., Лисица В.С. Перенос излучения в плазме // *Вопросы теории плазмы*, под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева, М.: Энергоатомиздат, Вып.12, 1982, с. 114.
13. Векленко Б.А. О функции Грина уравнения диффузии резонансного излучения // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 1959, т. 36, с. 204.
14. Биберман Л.М. // *Доклады Академии наук СССР*, 1948, 49, с. 659.
15. Коган В.И. Радиационные процессы в неполностью ионизованной плазме // In: *A Survey of Phenomena in Ionized Gases (Invited Papers)*, (Proc. ICPIG'67), IAEA, Vienna, 1968, p.583.

16. Напартович А.П. О методе  $\tau_{эф}$  в теории переноса излучения // Теплофизика высоких температур, 1971, 9, с. 26.
17. Kalkofen W. // In: Methods in Radiative Transfer (Kalkofen W., Ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1984, chapter 1.
18. Абрамов Ю.Ю., Дыхне А.М., Напартович А.П. Перенос резонансного излучения в конечных объемах // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1969, т. 56, с. 654-661.
19. Kotov V., Reiter D., Kukushkin A.S. Preprint No. 4257 (Forschungszentrum Julich, Julich, 2007).
20. Lukash V.E., Mineev A.B., Morozov D.Kh. Influence of plasma opacity on current decay after disruptions in tokamaks // Nuclear Fusion, 2007, v. 47, pp. 1476–1484.
21. Kukushkin A.B., Lisitsa V.S., Saveliev Yu.A. Nonlocal transport of thermal perturbations in a plasma // JETP Letters, 1987, v. 46, p. 448.
22. Rosenbluth M.N., Liu C.S. Cross-field energy transport by plasma waves // Physics of Fluids, 1976, v. 19, p. 815.
23. Kukushkin A.B. Analytic description of energy loss by a bounded inhomogeneous hot plasma due to the emission of electromagnetic waves // JETP Letters, 1992, v. 56, p. 487; Heat transport by cyclotron waves in plasmas with strong magnetic field and highly reflecting walls // Proc. of 14th IAEA Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Wuerzburg, 1992), Vienna: IAEA, 1993, v. 2, p. 35.
24. Tamor S. Calculation of Energy Transport by Cyclotron Radiation in Fusion Plasmas // Fusion Science and Technology, 1983, v. 3, p. 293; A Simple Fast Routine for Computation of Energy Transport by Synchrotron Radiation in Tokamaks and Similar Geometries SAI-023-81-189 LJ0LAPS-72, Science Applications (1981).
25. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Лагарьков А.Н. Перенос излучения в ионизационном континууме // Оптика и спектроскопия, 1965, т. 19, с. 326.
26. Krasheninnikov S.I. Superthermal particles and electron thermal conductivity // Soviet Physics – Journal of Experimental and Theoretical Physics, 1988, 67, p. 2483.
27. Helander P., Krasheninnikov S.I. Kinetic theory in self-similar variables for neutral atoms in plasma // Physics of Plasmas, 1996, 3, p. 226.
28. Mukhin E.E., *et al.* Thomson scattering for core plasma on DEMO // Proc. Int. Conf. “Fusion Reactor Diagnostics”, Varenna, Italy, 2013, AIP Conf. Proceedings, 2014, 1612, 69-72.
29. Minashin P.V., Kukushkin A.B. Spectroscopic Diagnostics of Non-Thermal Electrons with High-Number-Harmonic EC Radiation in Fusion-Reactor Plasmas // International Review of Atomic and Molecular Physics (IRAMP), 2013, v. 4, issue 2, pp. 93-104.
30. Beausang K. V., Prunty S. L., *et al.* Detecting non-Maxwellian electron velocity distributions at JET by high resolution Thomson scattering // Review of Scientific Instruments, 2011, v. 82, 033514.
31. Zhuang G. Behn R., Klimanov I., Nikkola P., Sauter O. Influence of non-Maxwellian velocity distributions during ECRH and ECCD on electron temperature measurements by Thomson scattering // Plasma Physics and Controlled Fusion, 2005, v. 47, pp. 1539–1558.
32. Pastor I., Guasp J., Alvarez-Estrada R.F., Castejon F. Numerical computation of Thomson scattering spectra for non-Maxwellian or anisotropic electron distribution functions // Nuclear Fusion, 2012, v. 52, 123013 (15pp), doi:10.1088/0029-5515/52/12/123013
33. Polevoi A.R., *et al.* Assessment of Operational Space for Long-pulse Scenarios in ITER // Proc. 37<sup>th</sup> EPS Conference on Plasma Physics, Dublin, Ireland, 21 – 25 June 2010, ECA, v. 34A, P2.187.

**Основное содержание диссертации изложено в следующих публикациях:**

- A1. Kukushkin A.B., **Sdvizhenskii P.A.** Automodel solutions for Lévy flight-based transport on a uniform background // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2016, v. 49, 255002 (13 pp) <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/49/25/255002>
- A2. **Sdvizhenskii P.A.**, Krasheninnikov S.I., Kukushkin A.B. A model of self-similar radiative transfer in resonance lines for testing the edge plasma codes // Contributions to Plasma Physics, 2016, v. 56, issue 6-8, pp. 669–674, DOI 10.1002/ctpp.201610058
- A3. Kurskiev G.S., **Sdvizhenskii P.A.**, Bassan M., Andrew P., Bazhenov A.N., Bukreev I.M., Chernakov P.V., Kochergin M.M., Kukushkin A.B., Kukushkin A.S., Masyukevich S.V., Mukhin E.E., Razdobarin A.G., Samsonov D.S., Semenov V.V., Tolstyakov S.Yu., Kajita S. A study of core Thomson scattering measurements in ITER using a multi-laser approach // Nuclear Fusion, 2015, v. 55 (5), 053024 (11 pages).
- A4. **СДВИЖЕНСКИЙ П.А.**, Кукушкин А.Б., Курскиев Г.С., Мухин Е.Е., Бассан М. Методика расчёта точности томсоновской диагностики немаксвелловской плазмы в токамаках-реакторах // Вопросы атомной науки и техники. Серия Термоядерный синтез, 2014, т. 37, вып. 4, с. 38-47, [http://vant.iterru.ru/vant\\_2014\\_3/4.pdf](http://vant.iterru.ru/vant_2014_3/4.pdf).
- A5. Kukushkin A.B., **Sdvizhenskii P.A.**, Voloshinov V.V., Tarasov A.S. Scaling laws of Biberman-Holstein equation Green function and implications for superdiffusion transport algorithms // International Review of Atomic and Molecular Physics (IRAMP), vol. 6, issue 1, 2015, pp. 31-41, [http://www.auburn.edu/cosam/departments/physics/iramp/6\\_1/kukushkin\\_et\\_al.pdf](http://www.auburn.edu/cosam/departments/physics/iramp/6_1/kukushkin_et_al.pdf).
- A6. Mukhin E.E., Kurskiev G.S., Tolstyakov S.Yu., Kukushkin A.B., Andrew P., Bukreev I.M., Chernakov P.V., Kochergin M.M., Koval A.N., Litvinov A.E., Masyukevich S.V., Razdobarin A.G., Semenov V.V., **Sdvizhenskii P.A.** Thomson scattering for core plasma on DEMO // Proc. Int. Conf. “Fusion Reactor Diagnostics”, Varenna, Italy, 2013, AIP Conf. Proceedings, 2014, 1612, 69-72, doi: 10.1063/1.4894026 <http://dx.doi.org/10.1063/1.4894026>
- A7. **Sdvizhenskii P.A.**, Kukushkin A.B., Kurskiev G.S., Mukhin E.E. and Bassan M. Analysis of measurement errors for Thomson diagnostics of non-Maxwellian plasmas in tokamak reactors // Journal of Physics: Conference Series, 2016, v. 666, paper 012006 (4 pp), <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/666/1/012006>
- A8. Kurskiev G.S., **Sdvizhenskii P.A.**, Kukushkin A.B., Mukhin E.E., Bassan M. Opportunities for Accuracy Enhancement of Core Plasma Thomson Scattering Diagnostics in Tokamak Reactors // Proc. 41<sup>st</sup> EPS Conference on Plasma Physics, Berlin, Germany, 23 – 27 June 2014, ECA, v. 38F P5.009, <http://ocs.ciemat.es/EPS2014PAP/pdf/P5.009.pdf>
- A9. Kukushkin A.B., **Sdvizhenskii P.A.** Scaling Laws for Non-Stationary Biberman-Holstein Radiative Transfer // Proc. 41<sup>st</sup> EPS Conference on Plasma Physics, Berlin, Germany, 23 – 27 June 2014, ECA, v. 38F P4.133, <http://ocs.ciemat.es/EPS2014PAP/pdf/P4.133.pdf>
- A10. **Sdvizhenskii P.A.**, Minashin P.V., Kukushkin A.B., Kurskiev G.S., Mukhin E.E. Complex Diagnostics of Electron Velocity Distribution with Thomson Scattering and Electron Cyclotron Emission in Tokamaks // Proc. 42<sup>nd</sup> EPS Conference on Plasma Physics, Lisbon, Portugal, 22 – 26 June 2015, ECA, v. 39E, P5.181, <http://ocs.ciemat.es/EPS2015PAP/pdf/P5.181.pdf>.
- A11. **Sdvizhenskii P.A.**, Krasheninnikov S.I., Kukushkin A.B. Resonance Line Radiation Flux in a Plasma Slab: Self-Similar Radiative Transfer Model // Proc. 43<sup>rd</sup> EPS Conference on Plasma Phys., Leuven, Belgium, 4-8 July 2016, Europhysics Conference Abstracts, ECA vol. 40, P2.026, <http://ocs.ciemat.es/EPS2016PAP/pdf/P2.026.pdf>