

На правах рукописи



Аникеев Фёдор Александрович

**Математическое моделирование кинетики тороидальной
плазмы полулагранжевыми и лагранжевыми методами**

Специальность 01.04.08 – физика плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена в Федеральном научном центре «Научно-исследовательский институт системных исследований» Российской академии наук.

Научный **Зайцев Федор Сергеевич**

руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального научного центра «Научно-исследовательский институт системных исследований» РАН, г. Москва.

Официальные **Андреев Валерий Филиппович**

оппоненты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, г. Москва;

Коновалов Сергей Владимирович

кандидат физико-математических наук, начальник отдела теории плазмы Курчатовского комплекса термоядерной энергетики и плазменных технологий НИЦ «Курчатовский институт».

Ведущая **Федеральный исследовательский центр «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша» РАН, г. Москва.**

Защита диссертации состоится 20 ноября 2019 г., начало в 15.00, на заседании диссертационного совета Д 520.009.02 на базе Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» по адресу: 123182, г. Москва, площадь академика Курчатова, д. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЦ «Курчатовский институт» и на сайте www.nrcki.ru.

Автореферат разослан « » _____ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 520.009.02
кандидат физико-математических наук

Ю.В. Капустин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Одним из приоритетов научно-технологического развития РФ ставится переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике. Перспективным направлением является производство энергии на основе управляемого термоядерного синтеза (УТС) в тороидальных системах с магнитным удержанием плазмы (токамаках). С участием России строится международный экспериментальный термоядерный реактор ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), который призван показать целесообразность использования термоядерного синтеза в качестве источника энергии.

В основе функционирования токамака лежит идея удержания плазмы магнитным полем тороидальной конфигурации и нагрев её до температуры, необходимой для эффективного протекания реакций термоядерного синтеза.

Термоядерный режим работы ITER не достижим на действующих токамаках. В таких условиях теоретическое описание является важным источником информации о закономерностях и характеристиках явлений и процессов в тороидальной плазме. Поэтому разработка и изучение методов теоретического исследования плазмы является важной и актуальной задачей УТС.

В плазме возникает множество разнообразных физических процессов. Особый интерес представляет изучение поведения частиц тепловых и высоких энергий. Такие частицы играют важную роль в энергобалансе плазмы. С быстрыми частицами связан дополнительный нагрев плазмы, процесс термоядерного синтеза и тепловые нагрузки на элементы конструкции установки.

В тороидальной плазме, вследствие движения заряженных частиц в условиях квазинейтральности, возникает радиальное электрическое поле. Это поле может достигать большой величины – десятков кВ/м и поэтому оказывать существенное влияние на различные процессы, в частности, на радиальный перенос энергии, который является одной из ключевых проблем в УТС, а также на бутстреп-ток, который в ITER составляет более 30% тока плазмы и играет важную роль в осуществлении квазистационарных режимов. Кроме того, радиальное электрическое поле участвует в формировании транспортного барьера при возникновении режима улучшенного удержания плазмы. Однако в настоящее время для радиального электрического поля известны лишь приближённые оценки

в некоторых предельных случаях, рассмотренных в неоклассической теории. Задача его определения в общем случае фактически не решена, поскольку требует самосогласованного рассмотрения движения ионов и электронов, а также вычисления их функций распределения с высокой точностью (четыре-пять значащих цифр).

Наиболее детальную информацию о физических закономерностях и характеристиках явлений и процессов в плазме даёт математическое моделирование её поведения с применением вычислительной техники. Такой подход является сейчас основным во многих фундаментальных науках. Современные супер-ЭВМ и параллельные технологии позволяют перейти к построению методов исследования плазмы и изучению её свойств практически с непосредственным использованием исходных физических законов без вовлечения существенных упрощений и потери тонких, но значимых физических эффектов. В частности, открывается возможность изучения в близких к реальным условиям обобщённых неоклассических эффектов: радиального электрического поля, бутстреп-тока и радиального потока энергии. Поэтому разработка новых вычислительных методов физики плазмы и их применение к изучению процессов в плазме является актуальной задачей.

Степень разработанности проблемы

В настоящее время решение задач теоретического изучения плазмы в основном проводится аналитическими и численными подходами, разработанными в 1960-1990-х годах. В этих подходах обычно используются значительные упрощения, сужающие область применимости результатов. Поэтому расчёты, при всех достоинствах упрощённых моделей, не всегда соответствуют реальному эксперименту. Необходимо развивать теоретические методы исследования проблемы УТС и на их основе более детально изучать закономерности физических явлений и процессов.

Вычислению неоклассических радиального электрического поля, радиального потока энергии и бутстреп-тока посвящено множество публикаций, начиная с работ А.А. Галеева, Р.З. Сагдеева конца 1960-х – начала 1970-х годов. В настоящее время наиболее общим результатом для бутстреп-тока считается полуаналитическая формула O. Sauter, опубликованная в 1999 г. с исправлениями ошибок от 2002 г. Эта формула применяется в большинстве современных кодов, описывающих эволюцию и энергобаланс плазмы, в том числе, для прогноза поведения плазмы в ITER. Однако при её получении использовались существенные упрощения, сужающие область применимости формулы: близость

функций распределения к максвелловским, малость отклонений ионов от магнитных поверхностей, двухкомпонентность плазмы, линейаризация кинетического уравнения.

До сих пор отсутствуют надёжные результаты для вычисления плотности тока плазмы со значительной популяцией высокоэнергичных ионов, включающей заряженные продукты термоядерных реакций, ионы высокоэнергичных пучков, а также ионы, полученные при помощи нагрева плазмы на ионно-циклотронном резонансе (ИЦР). Значительный радиальный размах траекторий таких ионов и существенная анизотропия функции распределения в случае ионов пучка и ИЦР «хвостов» принципиальным образом сказывается на величине и распределении плотности тока, вычисление которого приближенными методами становится невозможным.

Предложенный в диссертации новый подход к теоретическому изучению физических процессов и явлений в плазме позволяет избежать перечисленных выше упрощений, а также рассчитывать модификацию тока плазмы в присутствии значительной фракции надтепловых ионов.

Остановимся кратко на характеристике некоторых применявшихся ранее методик в области УТС, недостатки которых могут быть теперь преодолены с помощью предложенного в диссертации нового подхода к изучению плазмы.

Большой объём исследований проводится на основе трёхмерных усреднённых по дрейфовым траекториям кинетических уравнений (см., например, обзорную монографию Ф.С. Зайцева, изданную в 2014 году). Моделирование плазмы с помощью усреднённых уравнений можно отнести к полулагранжевому подходу, в котором описание движения частиц в электромагнитном поле проводится аналитически или численно по упрощённым моделям, а решение кинетических уравнений, учитывающих кулоновские столкновения, – сеточными методами. Такая методика обычно применяется для частиц с энергиями выше тепловых и отличается достаточно высокой сложностью математических моделей, описывающих динамику усреднённых объектов, а также потерей эффектов, в которых существенна зависимость от полоидального угла или гироугла.

В проблеме УТС широко применяются методы Монте-Карло, относящиеся к лагранжевым методам, не использующим сетку. Такие методы достаточно просты в реализации и, при наличии мощной вычислительной техники, позволяют моделировать ряд физических процессов в плазме. Однако специфика методов Монте-Карло такова, что они дают сильно зашумлённые результаты. Это значительно затрудняет моделирование

нелинейных процессов и изучение некоторых тонких, но важных эффектов, требующих высокой точности расчёта функции распределения. К таким эффектам относятся, например, бутстреп-ток и радиальное электрическое поле, требующие решения нелинейных задач с высокой точностью.

Обоснованное прогнозирование поведения плазмы в экстремальных условиях термоядерных экспериментов, разработки систем диагностики и управления плазмой требует перехода к описанию плазмы с помощью системы пятимерных и шестимерных кинетических уравнений, в которых функции распределения частиц согласованы через нелинейные коэффициенты и электрическое поле. Аккуратный расчёт распределения частиц по полоидальному углу, а в некоторых случаях и по гироуглу, важен для изучения возникновения режимов удержания плазмы с транспортным барьером, расчёта эффективности термоядерного реактора, точного определения тепловых нагрузок на элементы конструкции вакуумной камеры реактора. Моделирование кинетики ионов с повышенной точностью необходимо также для обоснования перспективы диагностики процентного состава термоядерного D–T-топлива с помощью анализатора нейтральных частиц NPA (Neutral Particle Analyzer), поставляемого на ITER Россией.

Цели и задачи исследования

В диссертационной работе поставлены и решены следующие задачи:

- Разработка нового, более общего, чем имеющиеся, полулагранжева метода кинетического описания тороидальной плазмы, основанного на самосогласованном расчёте шестимерных (6D) функций распределения заряженных частиц, входящих в плазму, в котором применяется только одно упрощение – усреднение кулоновских коэффициентов по гироуглу.
- Изучение с помощью нового подхода в близких к экспериментальным условиям неоклассических явлений и процессов: радиального электрического поля, возникающего вследствие движения заряженных частиц в условиях квазинейтральности, бутстреп-тока, радиальных потоков энергии. Определение радиальных профилей перечисленных величин. Сравнение полученных результатов с известными для предельных случаев оценками.
- Разработка новых дискретных методов описания тороидальной плазмы с использованием полулагранжева и лагранжева подходов. Создание параллель-

ных алгоритмов, пригодных для эффективного изучения плазмы на гибридных супер-ЭВМ, в которых имеются обычные и графические процессоры. Интеграция разработанного программного обеспечения (ПО) с создаваемым в НИИСИ РАН комплексом имитационного моделирования токамака HASP CS (Hardware-Software Plasma Control System).

- Применение полученных теоретических результатов, разработанных методов и созданного ПО для изучения закономерностей и характеристик обобщённых неклассических явлений и процессов в установках ASDEX Upgrade (Германия), JET (Великобритания), MAST (Великобритания) и прогнозирование поведения плазмы в термоядерном реакторе ITER.

Научная новизна

Современные подходы к изучению закономерностей и характеристик явлений и процессов в плазме токамака в значительной степени опираются на дискретные методы исследования. Поэтому важной задачей является построение и программная реализация адекватных дискретных методов, максимально приближенных к реальным физическим условиям. Методы высокой точности позволят существенно дополнить экспериментальные исследования, снизить их стоимость, спрогнозировать поведение плазмы в экстремальных и трудно достигаемых на практике условиях.

В диссертационной работе предложена новая эффективная методика изучения кинетики заряженных частиц в тороидальной плазме с использованием полулагранжева подхода. Методика позволяет описывать процессы с более высокой степенью детализации, чем традиционные методы усреднения и методы Монте-Карло.

Представлена новая постановка задачи для самосогласованного расчёта 6D функций распределения частиц. Задача сводится к совместному решению системы нелинейных кинетических уравнений, в которой каждое уравнение соответствует одному сорту заряженных частиц плазмы, и уравнений движения заряженных частиц. Впервые используется трёхмерный оператор кулоновских столкновений лишь с одним упрощением – усреднением коэффициентов по гироуглу. Задача полноценно учитывает 6D траектории движения заряженных частиц в электромагнитном поле тороидальной конфигурации без каких-либо упрощений.

В такой постановке открывается возможность для изучения тонких, но важных физических эффектов, в которых существенна зависимость функций от полоидального

угла и/или giroугла. В отличие от традиционных постановок здесь аккуратно описывается весь диапазон энергий частиц, а не только надтепловая область. Кроме того, адекватно описывается движение частиц вблизи магнитной оси, где дрейфовое приближение траекторий, используемое в большинстве современных кодов, становится неприменимым. Также новый подход позволяет избежать использования возникающих при усреднении кинетического уравнения условий сшивки функции распределения на границе между пролётными и запертыми частицами. В обычно применяемых фазовых переменных область запертых частиц сужается около магнитной оси, что приводит к серьёзной проблеме с физической интерпретацией и аппроксимацией условий сшивки.

Разработаны и изучены новые численные методы решения кинетических задач. Предложен новый численный метод расчёта неоклассического радиального электрического поля. Бессеточный метод сглаженных частиц (SPH) обобщён для решения многомерных кинетических уравнений и использования произвольной криволинейной системы координат. Этот метод впервые последовательно применён к решению кинетических задач УТС. 6D версия метода Монте-Карло изучена с точки зрения эффективности распараллеливания на гибридных супер-ЭВМ.

Практическое использование предложенной методики повышенной точности для изучения физических явлений в тороидальной плазме стало возможным благодаря созданным в процессе работы над диссертацией новым эффективным параллельным алгоритмам, максимально задействующим возможности современной гибридной вычислительной техники и технологий MPI, OpenMP и OpenCL. Методика реализована в программном комплексе DiFF (Distribution Function Finder). Комплекс включает код DiFF-SLPK (Semi-Lagrangian Particle Kinetics), реализующий полулагранжев метод и коды DiFF-MC (Monte Carlo) и DiFF-SPK (Smoothed Particle Kinetics), реализующие соответствующие лагранжевы подходы, а также интерфейс пользователя, построенный по технологии среды имитационного моделирования HASP CS. Возможности комплекса DiFF превосходят в рассматриваемом классе задач известные российские и мировые аналоги.

Важной задачей УТС является расчёт бутстреп-тока, который, например, в условиях ITER даёт существенный вклад в общий ток и позволяет значительно увеличить длительность плазменного разряда. Предложенная методика позволяет рассчитывать бутстреп-ток в гораздо более общих условиях, чем обычно используемые подходы. Сложность численного решения задачи о бутстреп-токе состоит в том, что его величина

определяется очень узкой областью в фазовом пространстве между пролётными и запертыми частицами. Показано соответствие найденного бутстреп-тока ранее изученным предельным аналитическим и численным результатам. Проведены расчёты для реальных условий. Впервые показано, что последовательный учёт отклонений траекторий ионов от магнитных поверхностей приводит к заметному смещению максимума бутстреп-тока к границе плазмы по сравнению с предсказаниями аналитических и полуаналитических формул. Данный эффект должен учитываться при оптимизации характеристик разряда и анализе МГД устойчивости плазмы в реакторе.

Другой важнейшей задачей УТС является вычисление радиальных электрических полей, так как они влияют на радиальные потери частиц и энергии на стенки вакуумной камеры, а также сопутствуют ряду опасных неустойчивостей плазмы токамака, таких как, например, пилообразные. Расчёт радиальных электрических полей осложняется необходимостью отслеживания разделения зарядов на очень малых расстояниях $\sim 10^{-3}$ см. При этом, в зависимости от применяемого подхода, может становиться важным учёт распределения частиц по гироуглу. Имеющиеся аналитические и численные методы используют ряд допущений, которые существенно сужают область применимости результатов. Диссертационная работа, опираясь на возможности современных компьютеров, предлагает новый, более общий и точный, метод решения задачи о расчёте неоклассического радиального электрического поля и соответствующего обобщённого потока энергии. Новый подход воспроизводит известные ранее результаты в области их применимости. Однако, как впервые показано в диссертации, радиальное электрическое поле в близких к реальным условиям может заметно превышать предсказанное упрощёнными моделями.

Разработанный метод применён для анализа экспериментов в установках ASDEX Upgrade (AUG), JET и MAST. Расчёты сопоставлены с экспериментальными данными. Установлен новый физический эффект – аккуратный учёт траекторий ионов показал, что величина бутстреп-тока на границе плазмы в несколько раз превышает прогноз, сделанный с помощью упрощённых подходов.

Впервые представлен уточнённый прогноз величины бутстреп-тока, радиального электрического поля и обобщённых неоклассических потерь энергии в условиях термоядерного реактора ITER. Прогноз существенно уточняет известные ранее результаты.

В диссертации детально изложены все предложенные методы изучения плазмы, постановки математических задач, разработанные численные методы и параллельные алгоритмы, результаты расчётов, их анализ и сравнение с ранее известными результатами и экспериментальными данными, продемонстрирована пригодность методики для решения практических задач, установлены новые физические эффекты.

Теоретическая и практическая значимость

- Предложены новые высокоточные методы изучения поведения заряженных частиц в тороидальной плазме. Разработаны и обоснованы новые параллельные численные алгоритмы решения кинетических задач. Методы применены для расчёта бутстреп-тока, обобщённых неоклассических радиальных электрических полей и радиальных потоков частиц и энергии. Установлены новые физические эффекты.
- Создан программный комплекс DiFF. Комплекс позволяет детально моделировать кинетику тороидальной плазмы в условиях, близких к экспериментальным. В комплексе реализованы эффективные высокоскоростные параллельные алгоритмы, максимально использующие возможности современной вычислительной техники, в том числе гибридной.
- Разработанный полулагранжев подход применим для изучения с высокой степенью точности широкого класса закономерностей и характеристик явлений и процессов в плазме токамаков. Может быть использован для интерпретации и прогнозирования экспериментов.
- Полулагранжев метод позволяет относительно легко включать в описание плазмы различные подлежащие изучению физические эффекты, например, гофрировку магнитного поля или ВЧ-нагрев, которые в других подходах требуют существенной модификации кинетического уравнения. Для этого достаточно лишь задать соответствующие магнитное и/или электрическое поле в уравнениях движения заряженных частиц, а форма кинетического уравнения с кулоновским оператором в данном методе остаётся неизменной.

Методология и методы исследования

Дискретные методы высокой общности, описывающие кинетику тороидальной плазмы, построены на основе полулагранжева и лагранжева подходов. Предложенный

новый полулагранжев подход базируется на совместном решении 6D уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле методом с перешагиванием и решении сеточными методами системы 6D нелинейных кинетических уравнений, содержащих 3D кулоновские операторы. Также рассмотрены лагранжевы дискретные модели, построенные на основе разработанного обобщения метода сглаженных частиц и методов Монте-Карло. Полулагранжев подход оказался наиболее подходящим для эффективного 6D моделирования тонких физических эффектов в плазме на современных гибридных ЭВМ.

Аппроксимации производных и интегралов проводилась с помощью специализированных для кинетических задач дискретных аппроксимаций. Для численного решения дискретных уравнений использовались явные и неявные методы. Применялись различные модификации линейной и кубической интерполяции функций. В методе расчёта электрических полей использовалась теория автоматического управления и линейно-квадратичный регулятор (LQR).

Разработанный параллельный алгоритм реализован программно на языках Fortran 2008 и C++11. Применялись подходы объектно-ориентированного программирования. Распараллеливание проводилось с помощью трёх технологий MPI, OpenMP и OpenCL, что обеспечило эффективное использование гибридных суперкомпьютеров. Пользовательский интерфейс созданного программного комплекса DiFF написан на языке Python.

Алгоритмы и программное обеспечение тестировалось методом сравнения с ранее известными аналитическими и численными результатами.

Вычислительный эксперимент проводился по технологии комплекса имитационного моделирования HASP CS на суперкомпьютерах и мини супер-ЭВМ НИИСИ РАН.

Достоверность

Достоверность исследования обеспечивается следующими факторами.

- В диссертационной работе обосновано использование предложенных методов путём оценок погрешностей аппроксимаций, сравнения с аналитическими формулами и расчётами по другим кодам.
- Программная реализация алгоритмов проводилась по зарекомендовавшей себя на практике технологии программирования вычислительных задач. В частности, все алгоритмы тщательно оттестированы и испытаны. Расчёты по парал-

лельным версиям алгоритмов сопоставлены с расчётами по последовательным версиям.

- Показано хорошее соответствие ранее известным физическим результатам, в частности, результатам неоклассической теории, в том числе обобщённой, и расчётам по кинетическому коду FPP-3D.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Новый полулагранжев метод для высокоточного исследования кинетики тороидальной плазмы. Метод не использует традиционно применяемые предположения о близости функций распределения к максвелловским, малость отклонений ионов от магнитных поверхностей, двухкомпонентность плазмы, линеаризацию кинетических уравнений.
2. Новые методы самосогласованного изучения нелинейных неоклассических явлений в плазме токамака: радиального электрического поля, бутстреп-тока, радиального потока частиц и энергии.
3. Плазмозфизический программный комплекс DiFF, позволяющий на основе максимального использования возможностей современных гибридных супер-ЭВМ и развитого графического интерфейса эффективно изучать закономерности и характеристики физических процессов в плазме токамака.
4. Результаты применения предложенных методов к изучению неоклассического радиального электрического поля, бутстреп-тока и обобщённых неоклассических радиальных потоков энергии в экспериментах на установках AUG, JET, MAST и прогнозированию их величин в термоядерном реакторе ITER. В том числе, значительное смещение бутстреп-тока к границе плазмы в AUG, JET, MAST и ITER при последовательном учёте отклонений траекторий ионов от магнитных, а также существенную роль в AUG бутстреп-тока на границе плазмы, который в режиме улучшенного удержания с ETV (Edge Transport Barrier) оказывается в несколько раз выше бутстреп-тока, предсказанного ранее на основе упрощённых подходов.
5. Метод поиска оптимальных профилей плотности и температуры плазмы, максимизирующих бутстреп-ток.
6. Адаптация метода сглаженных частиц к описанию кинетики тороидальной плазмы.

7. Новые параллельные методы Монте-Карло, позволяющие значительно увеличить число частиц в ланжевеновском описании плазмы.
8. Включение кода DiFF в создаваемый в НИИСИ РАН комплекс имитационного моделирования токамака HASP CS. Решение задачи об управлении полным током плазмы с расчётом бутстреп-тока по коду DiFF.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях.

1. XX Международная конференция «Ломоносов – 2013». Москва, 8-12 апреля 2013.
2. Международная конференция «IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control». Санкт-Петербург, 19-21 июня 2013.
3. Международная конференция «Ломоносовские чтения – 2014». Москва, 11-23 апреля 2014.
4. XV Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 13-17 октября 2014.
5. XXII Международная конференция «Ломоносов – 2015». Москва, 13-17 апреля 2015.
6. XXIII Международная конференция «Ломоносов – 2016». Москва, 11-15 апреля 2016.
7. XVI Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 3-7 октября 2016.
8. Международная конференция «Ломоносовские чтения – 2017». Москва, 17-26 апреля 2017.
9. Международная конференция «Ломоносовские чтения – 2018». Москва, 16-25 апреля 2018.
10. Международная конференция «2018 IEEE International Conference on Computer and Communication Engineering Technology (CCET)». Пекин, 18-20 августа 2018.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, среди которых 8 в журналах из перечня ВАК. Список публикаций по теме диссертации приведён в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Объём работы – 159 страниц.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, раскрыты актуальность, научная новизна и практическая значимость диссертационной работы, обсуждена сложность рассматриваемых задач. Приведена структура диссертации и краткое содержание основных разделов.

В **первой главе** представлены методы описания плазмы, использованные в диссертационной работе, и даны постановки математических задач.

В первом разделе описана общая самосогласованная модель эволюции равновесия тороидальной плазмы. Модель содержит три группы уравнений: уравнения Максвелла, уравнение равновесия и кинетические уравнения. Плазма предполагается полностью ионизированной. Система нелинейных интегро-дифференциальных кинетических уравнений для функций распределения f_α , где индекс α пробегает по всем сортам частиц плазмы, в общем виде может быть записана следующим образом

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \sum_{\beta} \nabla \cdot \mathbf{j}_{\alpha,\beta}(f_\alpha, f_\beta) - \nu_\alpha f_\alpha + S_\alpha. \quad (1)$$

Здесь в левой части стоит полная производная по времени, в правую часть входит дивергенция потоков $\mathbf{j}_{\alpha,\beta}$ в пространстве скоростей (оператор кулоновских столкновений), потери и источник частиц. Суммирование происходит по всем сортам частиц плазмы.

В диссертации рассматриваются, в основном, кинетические задачи с заданной конфигурацией магнитного поля токамака. Хотя созданное программное обеспечение позволяет решать кинетические уравнения совместно с кодами, рассчитывающими эволюцию равновесия плазмы.

Второй раздел посвящён кинетическим моделям. Рассматривается физическая система, в которой влиянием электромагнитного поля на процесс кулоновских столкновений и релятивистскими эффектами можно пренебречь. В этом случае в декартовых координатах в геометрическом пространстве и пространстве скоростей (X, Y, Z, v_1, v_2, v_3) в системе единиц измерения СИ поток $\mathbf{j}_{\alpha,\beta}$ имеет следующие компоненты

$$\mathbf{j}_{\alpha,\beta} = (0, 0, 0, j_{\alpha,\beta}^{v_1}, j_{\alpha,\beta}^{v_2}, j_{\alpha,\beta}^{v_3}), \quad (2)$$

где

$$j_{\alpha,\beta}^{v_i} = \frac{(e_\alpha e_\beta)^2 \ln \Lambda_{\alpha,\beta}}{\varepsilon_0^2 m_\alpha} \left[\frac{1}{m_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial v_i} f_\alpha - \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k} \right]. \quad (3)$$

Здесь $i, k = 1, 2, 3$, $\ln \Lambda_{\alpha,\beta}$ – кулоновский логарифм, e_α, e_β и m_α, m_β – заряды и массы частиц; $\varphi_\beta, \psi_\beta$ – потенциалы Трубникова. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, за исключением индексов α и β .

В третьем разделе сформулирована задача о вычислении бутстреп-тока. Применяется так называемый полулагранжев подход. В уравнениях (1)-(3) используются сферические координаты в пространстве скоростей. Эти уравнения рассматриваются на траекториях частиц $(\mathbf{r}_\alpha(t), \mathbf{v}_\alpha(t))$:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = L_{\text{coll}}[f_\alpha] \Big|_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{r}_\alpha(t) \\ \mathbf{v}=\mathbf{v}_\alpha(t)}}, \quad f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{r}_\alpha(t), \mathbf{v}_\alpha(t)), \quad (4)$$

$$L_{\text{coll}}[f_\alpha] = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial v^n} \left[\sqrt{g} \left(b_\alpha^n f_\alpha + \sum_{m=1}^3 a_\alpha^{mn} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v^m} \right) \right]. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{r}_\alpha(t)$ и $\mathbf{v}_\alpha(t)$ – положение и скорость частицы α в момент времени t , \sqrt{g} – якобиан преобразования от декартовых координат в пространстве скоростей к криволинейным (v^1, v^2, v^3) , a_α^{mn} и b_α^n – кулоновские коэффициенты. Уравнения являются нелинейными, так как a_α^{mn} и b_α^n интегрально зависят от искомой функции распределения.

В электромагнитном поле токамака (\mathbf{E}, \mathbf{B}) характерное время $\tau_{\text{tr},0}$ движения частицы α по траектории (например, ларморовского вращения) много меньше характерного времени кулоновских столкновений $\tau_{\text{cl},0}$. Поэтому на временах, меньших $\tau_{\text{cl},0}$, траекторию частицы α можно описывать без учёта кулоновских столкновений:

$$\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}), \quad \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_\alpha. \quad (6)$$

В отличие от традиционных подходов, использующих усреднение кинетического уравнения, в (6) не требуется множество обращений траекторий по полоидальному или гиро углу, т.е. здесь рассматриваются не только частицы высоких энергий.

Задача состоит в нахождении функций распределения f_α , исходя из которых вычисляется бутстреп-ток. Далее рассматривается бутстреп-ток, рассчитываемый по решению системы двух кинетических уравнений: для ионов и электронов, $\alpha = e, i$. Показывается важность учёта нелинейности в постановке задачи и взаимодействия с ионами.

Четвёртый раздел посвящён формулировке задачи расчёта радиальных электрических полей. Так же, как и в предыдущем разделе, используются уравнения (4)-(6), но радиальная компонента электрического поля E_r вычисляется динамически по функции распределения частиц. Рассматриваются различные подходы к определению E_r : из принципа минимума электрической энергии, по теореме Гаусса и из равенства нулю радиального потока частиц (как в неоклассической теории).

В пятом разделе подробно обсуждены особенности определения радиальных потоков частиц и энергии.

В шестом разделе рассматривается задача об использовании бутстреп-тока, рассчитанного по модели из третьего раздела, в системе имитационного моделирования токамака HASP CS, разрабатываемого в НИИСИ РАН. Сформулирована задача управления плазмой в токамаке.

Во **второй главе** представлены разработанные численные методы решения задач кинетики тороидальной плазмы. Эти методы содержат две основные подзадачи: расчёт траекторий частиц и моделирование кулоновских столкновений.

В первом разделе представлен расчёт реального, не дрейфового, движения частиц в электромагнитном поле в соответствии с уравнениями (6). Дана постановка задачи и описание параллельных алгоритмов её решения.

Расчёт траекторий проводится по схеме с перешагиванием, которая, как показано в монографии Ф.С. Зайцева, является оптимальной для рассматриваемых условий. Специфика задачи такова, что траекторный шаг по времени много меньше столкновительного, поэтому за один столкновительный шаг по времени каждая частица делает порядка миллиона шагов по схеме с перешагиванием. В совокупности с тем, что число отслеживаемых траекторий частиц также измеряется миллионами, получается задача с очень большим числом операций. Необходимо применять распараллеливание и во избежание

накопления арифметической погрешности проводить вычисления как минимум с двойной точностью.

Траектории частиц между двумя столкновительными шагами не зависят друг от друга и могут рассчитываться на разных процессорах. Частицы более высоких энергий имеют большее характерное время движения по траектории $\tau_{tr,0}$. Поэтому для обеспечения приемлемой точности их траектории необходимо вычислять с меньшим шагом. Данное обстоятельство важно учитывать для того, чтобы равномерно распределять вычислительную нагрузку по процессорам и получать высокую эффективность их использования.

MPI и OpenMP распараллеливание расчёта траекторий сводится к оптимальному распределению частиц между вычислительными узлами и нитями, с учётом того, что разные частицы проделывают разное число шагов по времени. Эффективный параллельный алгоритм расчёта траекторий на графических процессорах (GPU) заметно сложнее и требует детального рассмотрения специфики задачи и архитектуры вычислительного устройства. Важно минимизировать число медленных обращений к глобальной памяти SGRAM. В разделе рассматривается как общий случай трёхмерных полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , так и случай аксиальной симметрии. В последнем появляется возможность представить массивы \mathbf{E} и \mathbf{B} как два изображения, в каждом из которых три канала цвета есть три координаты вектора. Это обеспечивает оптимальное выполнение операций на GPU, которые изначально создаются для быстрой обработки изображений.

Во втором разделе второй главы описан и обоснован новый полулагранжев метод решения кинетических уравнений.

Обозначим τ_{cl} шаг по времени решения кинетического уравнения. Аппроксимируем полную производную в момент времени t_{n+1} с первым порядком. Индекс α здесь опущен для краткости

$$\frac{f(t_{n+1}, \mathbf{r}(t_{n+1}), \mathbf{v}(t_{n+1})) - f(t_n, \mathbf{r}(t_n), \mathbf{v}(t_n))}{\tau_{cl}} + O(\tau_{cl}) = L_{\text{coll}}[f] \Big|_{\substack{t=t_{n+1} \\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(t_{n+1}) \\ \mathbf{v}=\mathbf{v}(t_{n+1})}}. \quad (7)$$

Далее строится разностная аппроксимация, в которой уравнение (4) всегда рассматривается на прямоугольной сетке \mathbf{x}_i . На каждом шаге по времени используются такие точки $(\mathbf{r}_i(t_n), \mathbf{v}_i(t_n)) \equiv \mathbf{x}_i^n$, что в момент t_{n+1} выпущенные из них траектории (3) приходят в узлы прямоугольной сетки \mathbf{x}_i , т.е. $(\mathbf{r}_i(t_{n+1}), \mathbf{v}_i(t_{n+1})) = \mathbf{x}_i$:

$$\frac{f(t_{n+1}, \mathbf{x}_i) - f(t_n, \mathbf{x}_i^n)}{\tau_{cl}} + O(\tau_{cl}) = L_{\text{coll}}[f] \Big|_{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}_i}^{t=t_{n+1}}. \quad (8)$$

Точки \mathbf{x}_i^n можно найти благодаря обратимости по времени уравнения движения (6). Несмотря на то, что значения функции распределения известны только на прямоугольной сетке, вычислить $f(t_n, \mathbf{x}_i^n)$ можно с помощью интерполяции.

В предложенном полулагранжевом методе полная производная по времени вычисляется непосредственно, без её раскрытия через частную производную по времени и конвективную производную по шестимерному фазовому пространству, что привело бы к появлению шестимерного дифференциального оператора. Таким образом, в данном подходе задача расчёта шестимерной функции распределения сводится к применению интерполяции и обращению трёхмерного кулоновского оператора, действующего лишь в пространстве скоростей. Интерполяция для различных траекторий независима и проводится параллельно. Кулоновский оператор действует только в пространстве скоростей, поэтому узлы \mathbf{r}_i также обрабатываются параллельно. Важно подчеркнуть, что рассматривается полноценный трёхмерный кулоновский оператор лишь с одним упрощением – усреднением коэффициентов по гиросуглу.

Третий раздел посвящен применению метода сглаженных частиц (SPH), относящийся к лагранжевым методам, для решения многомерных кинетических уравнений. Метод имеет много достоинств, в том числе отсутствие сетки и естественное описание свободных границ и разрывов искомым функций, позволяет решать систему уравнений в частных производных без искусственного расщепления по физическим процессам, приводящего к дополнительным погрешностям, сводит решение системы уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, его скорость работы слабо зависит от размерности уравнений. Дано подробное математическое описание адаптации метода к рассматриваемым задачам. Адаптированный метод назван Smoothed Particle Kinetics (SPK). Так же, как и метод из предыдущего раздела, SPK опирается на эффективный расчёт траекторий, но дополнительно требует поиска ближайших соседей. Это связано с тем, что, в отличие от полулагранжевой схемы, отслеживаемые точки фазового пространства располагаются нерегулярно и для аппроксимации дифференциальных операторов необходимо рассматривать окрестность каждой точки. Поскольку решается шестимерная задача или, при аксиальной симметрии, пятимерная, требуется шестимерный или пятимерный поиск ближайших соседей. Из-за

большого количества операций в этой процедуре и необходимости иметь большое число сглаженных частиц, полулагранжев метод второго раздела оказался более предпочтительным для использования на сегодняшней вычислительной технике. Тем не менее для некоторого класса задач, например, о перемешивании плазмы из-за неустойчивостей, а также для разрабатываемых эксафлопных компьютеров, метод SPK может быть более адекватным.

В четвёртом разделе предложены эффективные параллельные алгоритмы поиска ближайших соседей, позволяющие выполнять многомерный поиск соседей за приемлемое время. Распараллелены два распространенных метода поиска соседей: разбиение пространства на ячейки равного размера и применение KD-деревьев. KD-деревья эффективнее в случае малых (не более трех) размерностей и общего случая расположения точек в пространстве, но намного сложнее в распараллеливании.

В нашей задаче удобнее разбивать пространство на равные ячейки, фиксировать списки частиц, попавших в каждую из ячеек, после чего искать соседей частицы только в близлежащих ячейках. Параллелизм такого подхода состоит в том, что для различных частиц поиск соседей можно осуществлять независимо. Частицы сортируются так, чтобы в пределах одной ячейки лежали частицы с последовательными индексами. Это обеспечивает локальность обращений к памяти, что особенно важно при работе с GPU. Количество соседей у разных частиц различается. В шестимерном случае их количество измеряется тысячами. Приходится оперировать с десятками или даже сотнями гигабайт информации. Постоянный обмен данными существенно замедляет работу, особенно на GPU. Данная проблема решена с помощью архивации списков соседей.

В пятом разделе предложена новая модификация метода Монте-Карло для расчёта функции распределения. Этот метод относится к лагранжевым методам. Рассматривается так называемая ланжевенская модель динамики заряженных частиц в плазме. В этом подходе кулоновские столкновения частиц описываются случайной силой в уравнениях движения частицы, которая рассчитывается с помощью коэффициентов оператора кулоновских столкновений, фигурирующего в кинетическом уравнении. В отличие от многих подходов здесь применяется полный 3D кулоновский оператор (с усреднёнными по гироуглу коэффициентами) и рассчитываются 6D траектории. Таким образом, поведение плазмы описывается системой 6D стохастических дифференциальных уравнений (уравнений Ланжевена), где каждое уравнение представляет закон движения от-

дельной частицы с учётом электромагнитного поля и случайной кулоновской силы. Данный метод хорошо распараллеливается. Однако исследования показали, что он менее точно, чем методы из второго и третьего разделов, описывает тонкие кинетические эффекты вследствие зашумлённости рассчитываемой функции распределения. Кроме того, большое число арифметических операций сильно затрудняет решение нелинейных задач.

Шестой раздел посвящён методам расчёта радиального электрического поля. Применена теория автоматического управления для минимизации рассматриваемых функционалов: величины обобщённого неоклассического потока ионов, плотности зарядов и невязки одномерного уравнения Пуассона в интегральной форме.

В седьмом разделе говорится о численном методе расчёта обобщённых неоклассических потоков. Введена функция, позволяющая повысить точность вычисления интегралов и снизить требования к количеству узлов разностной сетки.

В восьмом разделе описан численный алгоритм управления полным током плазмы для задачи, представленной в последнем пункте предыдущей главы.

Предложенные численные алгоритмы реализованы в программном комплексе DiFF (Distribution Function Finder). Комплекс DiFF состоит из кодов DiFF-SLPK (Semi-Lagrangian Particle Kinetics), DiFF-SPK (Smoothed Particle Kinetics) и DiFF-MC (Monte Carlo), написанных на языках Fortran 2008, C++11, OpenCL C и имеет графические компоненты, написанные на языке Python. Во всех трёх кодах задействованы технологии распараллеливания: MPI, OpenMP и OpenCL. Коды объединяет единый подход к расчёту траекторий частиц в электромагнитном поле методами из первого раздела второй главы, но кулоновские столкновения учитываются различными методами. Описанию разработанного программного обеспечения и организации параллельных вычислений посвящена **третья** глава диссертации.

В первом разделе представлена общая концепция комплекса DiFF, его структура, функциональные возможности, включая графические, внутренние и внешние интерфейсы обмена данными.

Во втором разделе описана организация параллельных вычислений кодов, входящих в комплекс DiFF. Обосновано использование языка Fortran 2008 для большей части кода, как языка очень хорошо подходящего для реализации высокопроизводительных вычислений задач УТС. Перечислены и проиллюстрированы приёмы распараллели-

вания по технологиям MPI и OpenMP. Продемонстрирован подход к распараллеливанию кода для GPU-архитектур с использованием технологии OpenCL и языков OpenCL C и C++11. Обсуждены число арифметических операций и ускорение как функция числа процессоров.

В третьем разделе описан код DiFF-SLPK. Кинетическое уравнение в нём решается с помощью полулагранжевой схемы (8).

Четвёртый раздел посвящён коду DiFF-SPK, в котором для решения кинетического уравнения применяется метод сглаженных частиц.

Пятый раздел – коду DiFF-MS, реализующему метод Монте-Карло.

Параллельные алгоритмы каждого из перечисленных кодов имеют свою специфику, которая учтена в программной реализации.

Шестой раздел описывает код NNTMM, применяемый для анализа данных с помощью нейросетей.

Седьмой раздел – программную реализацию алгоритма управления полным током плазмы.

В последнем, восьмом разделе третьей главы говорится об интеграции разработанного ПО в комплекс имитационного моделирования HASP CS (Hardware-Software Plasma Control System), разрабатываемый в НИИСИ РАН. Код DiFF-SLPK является перспективной альтернативой используемому сейчас в HASP CS коду SCoPE.

В **четвёртой** главе представлены и проанализированы физические результаты, полученные с помощью созданного ПО. Проведено сравнение с данными известных моделей и с экспериментальными данными.

Первый раздел посвящён расчёту бутстреп-тока. Экспериментальное определение бутстреп-тока затруднено, поэтому проведено сравнение с известными ранее теоретическими результатами. Рассмотрена модельная задача и задачи для реальных параметров плазмы, характерных для установок AUG, JET, MAST и ITER. В качестве входных использованы данные из публикаций и данные, рассчитанные с помощью программного комплекса HASP CS. В случае одинаковых постановок задач продемонстрировано хорошее соответствие с аналитикой и известными ранее численными результатами. Вместе с тем код DiFF-SLPK позволяет рассчитывать бутстреп-ток в более общих, чем традиционные, моделях плазмы, когда отклонения траекторий частиц от магнитных поверхностей не являются малыми и функция распределения не близка к максвелловской.

Последовательный учёт отклонений ионов приводит к значительному смещению максимума бутстреп-тока к границе плазмы в AUG, JET, MAST и ITER. В условиях AUG обнаружен ещё один новый физический эффект – существенный вклад ионов в бутстреп-ток на границе плазмы в режиме улучшенного удержания с ETB (Edge Transport Barrier). Вклад ионов оказывается в несколько раз выше вклада электронов. С помощью вычислительного эксперимента с DiFF-SLPK установлено, что при малом радиальном электрическом поле величина бутстреп-тока слабо зависит от учёта в столкновительном члене оператора по гироуглу. Это подтверждает справедливость полученных ранее в работах разных авторов оценок величины бутстреп-тока в области их применимости. Однако с увеличением радиального электрического поля становится важным учёт зависимости по гироуглу в распределении ионов, особенно около магнитной оси и на границе плазмы.

Во втором разделе описан расчёт радиального электрического поля E_r . Рассмотрены различные методы расчёта. Дано сравнение с неоклассической теорией. Приведены результаты для реальных условий установок AUG, JET и предполагаемых условий в ITER. Показано заметное увеличение E_r около границы плазмы в ITER по сравнению с приближённой оценкой, что при возмущении плазмы может приводить к нежелательному значительному перемещению частиц по радиусу.

Третий раздел посвящён расчёту обобщённых неоклассических радиальных потоков частиц и энергии. Изложен использованный для вычисления потоков подход. Проведено сравнение результатов с известными ранее. Показано хорошее соответствие в области их применимости. Представлены расчёты для установок AUG, JET и ITER. Сделан вывод о принципиальности учёта отклонений траекторий ионов от магнитных поверхностей в транспортных моделях для плазмы ITER. Показано, что неоклассический поток энергии ионов в ITER выше на ~20% предсказанного в упрощённых подходах.

В четвёртом разделе последней главы описано использование кода DiFF-SLPK в комплексе имитационного моделирования токамака HASP CS. Решена задача об автоматическом управлении полным током с аккуратным учётом бутстреп-тока. Обсуждены особенности решения задач управления тороидальной плазмой.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Основные результаты

1. Предложены новые методы изучения кинетики тороидальной плазмы, основанные на полулагранжевом и лагранжевом подходах. Новые методы позволяют в значительно более общих условиях изучать эволюцию бутстреп-тока, неклассических радиального электрического поля и радиального потока энергии. В частности, методы не используют традиционно применяемые предположения о близости функций распределения к максвелловским, малость отклонений ионов от магнитных поверхностей, двухкомпонентность плазмы, линейризацию кинетических уравнений.
2. Разработаны и обоснованы новые параллельные численные методы для исследования закономерностей и характеристик физических явлений и процессов в плазме токамака. Предложена новая методика расчёта радиальных электрических полей. Новые подходы реализованы программно в плазмофизическом комплексе DiFF на языках Fortran 2008, C++11, OpenCL C и Python. Комплекс эффективно использует возможности современных гибридных супер-ЭВМ.
3. Исследованы бутстреп-ток, неклассические радиальное электрическое поле и радиальный поток энергии ионов. Проведено сравнение с экспериментальными данными для установок AUG и JET. Показано, что в реальных условиях масштаб указанных эффектов и их зависимость от радиуса существенно отличается от предсказанных упрощёнными методами. Прогноз для термоядерного реактора ITER показывает необходимость учёта существенного смещения максимума бутстреп-тока к границе плазмы.
4. Разработанное программное обеспечение интегрировано в создаваемый в НИИСИ РАН комплекс имитационного моделирования токамака HASP CS (Hardware-Software Plasma Control System) и может быть использовано в нём для более точного решения широкого класса задач, в том числе, задач управления током и кинетическими параметрами плазмы.

Публикации по теме диссертации

Курсивом выделены научные статьи в журналах и изданиях, входящих в Перечень ВАК, а также статьи из международных реферативных баз данных и систем цитирования Web of Science и Scopus, включаемые ВАК в Перечень.

1. *Зайцев Ф.С., Аникеев Ф.А. Эффективный параллельный алгоритм расчета электрических токов в тороидальной плазме // Доклады Академии наук. — 2018. — Т. 482, № 1. — С. 19–22.*
2. *Zaitsev F.S., Shishkin A.G., Lukianitsa A.A., Suchkov E.P., Stepanov S.V., Anikeev F.A. The basic components of software-hardware system for modeling and control of the toroidal plasma by epsilon-nets on heterogeneous mini-supercomputers // Communications in Computational Physics. — 2018. — Vol. 24, no. 1. — P. 1–26.*
3. *Костомаров Д.П., Зайцев Ф.С., Аникеев Ф.А., Богданов П.Б. Новые параллельные алгоритмы метода Монте-Карло расчёта динамики заряженных частиц в высокотемпературной плазме // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 455, № 6. — С. 628–632.*
4. *Костомаров Д.П., Зайцев Ф.С., Шишкин А.Г., Аникеев Ф.А., Донцов Е.В. Управление тороидальным током в задаче эволюции равновесия плазмы // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 11. — С. 33–43.*
5. *Костомаров Д.П., Зайцев Ф.С., Лукьяница А.А., Шишкин А.Г., Аникеев Ф.А., Злобин В.В. Код NNTMM: математическое моделирование, оптимизация и анализ данных с помощью нейросетей // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2013. — № 2. — С. 11–16.*
6. *Kostomarov D.P., Zaitsev F.S., Shishkin A.G., Matejcik S., Anikeev F.A., Zlobin V.V. Toroidal current control in the problem of plasma equilibrium evolution // Proceedings of the IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control, Saint Petersburg, Russia, June 19-21 2013. — 2013. — P. 1500–1505.*
7. *Shishkin A.G., Stepanov S.V., Suchkov, E.P., Anikeev F.A., Zaitsev F.S. Distributed access to the resources of plasma modelling and control complex HASP CS // 2018 IEEE International Conference on Computer and Communication Engineering Technology (CCET). — Beijing, China, 2018. — P. 193–197.*

8. *Anikeev F.A., Anpilov S.V., Zaitsev F.S., Savenkova N.P., Kalmykov A.V. Modeling the relaxation of oscillations in an electrolyzer with a free boundary // Computational Mathematics and Modeling. — 2017. — Vol. 28, no. 02. — P. 185–194.*
9. Зайцев Ф.С., Шишкин А.Г., Лукьяница А.А., Сучков Е.П., Степанов С.В., Аникеев Ф.А. Базовые компоненты аппаратно-программного комплекса моделирования и управления тороидальной плазмой методом эпсилон-сетей на гетерогенных мини-суперкомпьютерах // Труды НИИСИ РАН. — Т. 6. — НИИСИ РАН Москва ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2016. — С. 36–49.
10. Anikeev F.A. Solving kinetic equations with smoothed particle method // P. 275-298 in: *Mathematical modeling of toroidal plasma evolution. English edition by Zaitsev F.S. — М.: MAKS Press, 2014, 688 p.*
11. Аникеев Ф.А. Новый алгоритм расчёта радиальных электрических полей в тороидальной плазме // Тезисы конференции «Ломоносовские чтения», секция Высокопроизводительные вычисления. — МГУ, Москва, 2018.
12. Аникеев Ф.А. Быстрый алгоритм расчета движения заряженных частиц в токамаке с использованием графических процессоров // Тезисы конференции «Ломоносовские чтения», секция Высокопроизводительные вычисления. — МГУ, Москва, 2017.
13. Зайцев Ф.С., Аникеев Ф.А. Высокоскоростные параллельные алгоритмы расчета движения заряженных частиц в тороидальной плазме // Сборник тезисов XVI Международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование». — ИПК ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ г. Саров, 2016. — С. 57–58.
14. Аникеев Ф.А. Применение метода сглаженных частиц для расчёта токов в тороидальной плазме, вызванных градиентом давления // Сборник тезисов XXIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов – 2016», секция Вычислительная математика и кибернетика. — МГУ, Москва, 2016. — С. 53–54.
15. Аникеев Ф.А. Высокоскоростные алгоритмы поиска ближайших соседей в шестимерном методе SPK // Сборник тезисов XXII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов – 2015», секция Вычислительная математика и кибернетика. — МГУ, Москва, 2015. — С. 79–80.

16. Зайцев Ф.С., Аникеев Ф.А., Богданов П.Б. Высокоскоростные алгоритмы решения многомерных кинетических уравнений методом сглаженных частиц // Сборник тезисов XV Международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование». — РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров, 2014. — С. 62–63.
17. Зайцев Ф.С., Аникеев Ф.А. Решение шестимерных кинетических уравнений с оператором Кулоновских столкновений методом сглаженных частиц. Конференция Ломоносовские чтения 2014, МГУ // Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2014», секция Вычислительная математика и кибернетика. — МГУ, Москва, 2014. — С. 72–73.
18. Аникеев Ф.А. Суперкомпьютерное моделирование кинетики тороидальной плазмы методом Монте–Карло // Сборник тезисов XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2013», секция Вычислительная математика и кибернетика. — МГУ, Москва, 2013. — С. 64–65.