

На правах рукописи



Тырин Кирилл Сергеевич

**Некоторые задачи физики бета-процессов с
участием электронной оболочки атомов**

Специальность 01.04.16 —
«Физика атомного ядра и элементарных частиц»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в отделении физики нейтрино Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Научный руководитель: **Криворученко Михаил Иванович**
доктор физико-математических наук, начальник
лаборатории НИЦ "Курчатовский институт", г.Москва

Официальные оппоненты: **Карпешин Федор Федорович**,
доктор физико-математических наук, ведущий
научный сотрудник, Всероссийский научно-
исследовательский институт метрологии им. ДИ.
Менделеева, г. Санкт-Петербург

Белоцкий Константин Михайлович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник, Национальный
исследовательский ядерный университет
«МИФИ», г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», г. Москва

Защита состоится 28 июня 2022 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д520.009.03 на базе НИЦ «Курчатовский институт» по адресу: 123182, г. Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЦ «Курчатовский институт» и на сайте www.nrcki.ru.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д520.009.03, д.ф.-м.н.

Барбанов

Барбанов А. Л.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Нейтрино являются одними из наиболее интересных частиц для исследования физики за пределами Стандартной модели. Есть три типа нейтрино: электронное, мюонное и тау-нейтрино, вместе с соответствующими античастицами. В Стандартной модели нейтрино предполагаются безмассовыми. Однако эксперименты по осцилляциям нейтрино показывают, что нейтрино являются массивными частицами [1]. Из экспериментальных данных возможно оценить разность квадратов масс нейтрино, но нельзя определить абсолютные значения. Абсолютный масштаб масс нейтрино является одним из главных вопросов современной физики. Электронейтральность и чрезвычайная малость масс нейтрино также ставит вопрос являются ли нейтрино майорановскими или дираковскими частицами. Майорановские нейтрино, будучи истинно нейтральными частицами со спином $1/2$, не сохраняют полное лептонное число, в то время как нейтрино, описываемые уравнением Дирака, предполагают сохранение разности числа частиц и античастиц. В последнее время широко обсуждалась идея о существовании так называемых стерильных нейтрино, участвующих только в гравитационном взаимодействии, но способных проявлять себя косвенно через смешивание с обычными нейтрино. Решение проблем физики нейтрино требует теоретического и экспериментального исследования физики бета—процессов.

Эксперименты по прямому измерению массы электронного (анти) нейтрино основываются на измерении энергетических спектров частиц, рождающихся в бета—распаде и электроном захвате. Бета—распад обладает трехчастичной кинематикой, энергия реакции распределяется между электроном, антинейтрино, а дочернее ядро испытывает отдачу. Рассматриваются процессы с пренебрежимо малой отдачей ядра в силу малости выделяемой энергии. Интерес представляют события, в которых электрон вылетает с максимальной возможной энергией; правый край энергетического бета—спектра сравнивается с теоретическими предсказаниями. В случае массивного электронного антинейтрино правый край смещается влево на величину его массы $m_{\bar{\nu}_e}$, а форма спектра искажается вблизи правого края. На сегодняшний день наиболее совершенным экспериментом по прямому измерению массы электронного антинейтрино является эксперимент KATRIN. Используя тритий в качестве

бета—эмиттера, в результате анализа правого края экспериментального спектра получены ограничения на массу $m_{\bar{\nu}_e} < 0.8$ эВ [2].

При электронном захвате энергия реакции распределяется между электронным нейтрино и вторичным излучением оболочки атома (пренебрегая отдачей ядра). Оболочка дочернего атома содержит вакансию и релаксирует, излучая в диапазоне, определяемом энергетической шириной атомного уровня, с которого произошел захват. Анализируя смещение спектра вторичного излучения, можно дать ограничение на массу электронного нейтрино m_{ν_e} . Коллаборацией ЕСНО [3], в результате эксперимента по электронному захвату в изотопе гольмия-163, получено ограничение $m_{\nu_e} < 150$ эВ, что является лучшим ограничением полученным в результате прямого измерения на сегодняшний день. Что касается двойного безнейтринного бета—распада, безнейтринные моды искались в двойных бета—распадах германия-76, теллура-130, ксенона-136 коллаборациями GERDA [4], CUORE [5], KamLAND-Zen [6]. Поиском двойного безнейтринного бета—распада изотопа молибдена-100 занимались коллаборации NEMO-3 [7], CUPID-Mo [8], AMoRE [9]. На настоящий момент убедительные доказательства существования безнейтринной моды отсутствуют.

Актуальность данной работы определяется активным развитием исследований в области физики бета—процессов и связанной с ним необходимостью в улучшении точности действующих и планируемых экспериментов, что, в свою очередь, требует учета более тонких эффектов в теоретических расчётах. Данная работа посвящена трем задачам физики бета—процессов, которые объединяет факт вовлечения оболочки атома в бета—процесс.

Целью данной работы является:

1. Теоретическое описание электронных захватов в диспрозии-159, обусловленных двумя низкоэнергетическими ядерными переходами - разрешённым и уникальным третьего запрета.

2. Исследование эффекта перекрытия электронных оболочек материнского и дочернего атомов в бета—процессах, связанного с изменением электрического заряда ядра. Оценка амплитуды перекрытия волновых функций электронных оболочек — атомного матричного элемента при одиночных бета и двойных бета—распадах.

3. Построение модифицированного бета—спектра в распаде ${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{H} + e^- + \bar{\nu}_e$, учитывающего ионизационное рассеяние бета—электрона на атоме трития.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие **задачи**:

1. С помощью многочастичного численного моделирования построить волновые функции электронов атома диспрозия-159, в том числе внутри ядра, а также дочернего атома тербия-159 в зависимости от квантовых чисел захваченного электрона. Вычислить значения волновых функций внутри ядра, вычислить атомный матричный элемент, задающий поправку на перекрытие и обменные корреляции электронов атома. Вычислить постоянные распада и соответствующие парциальные периоды полураспада. Построить спектр вторичного излучения и проанализировать его на предмет возможности использования процесса для измерения массы электронного нейтрино.

2. Разработать аналитическую модель, позволяющую оценить эффект перекрытия волновых функций оболочек атомов в бета—процессах для средних и тяжелых элементов в широком диапазоне атомных номеров. Разработать феноменологический метод для вычисления атомных матричных элементов на основе простых выражений и эмпирических данных.

3. Исследовать процесс рассеяния бета—электрона на электроном атоме трития. Вывести выражение для амплитуды рассеяния. Учесть тождественность электронов. Вычислить вероятность ионизации. Построить распределение по энергии и импульсу вылетевшего электрона атома. Построить поправку к бета—спектру.

Научная новизна:

1. На основе новейших экспериментальных данных по энергиям реакции, впервые вычислены парциальные периоды полураспада и калориметрический спектр вторичного излучения для электронного захвата в диспрозии-159 с переходом в возбужденное состояние ядра тербия-159.

2. В работе впервые предложен способ оценки атомных матричных элементов для электронов—спектаторов при одиночном бета— и двойном бета—распаде на основании того факта, что отношение изменения заряда ядра к абсолютной величине заряда ядра является параметром малости для средних и тяжелых элементов.

3. Показано, что вероятность ионизации трития при рассеянии бета—электрона на электроном атома является заметной величиной, приводящей к искажению формы кривой бета—спектра на несколько процентов. Ранее эффект считался пренебрежимо малым в сравнении с эффектами встряхивания.

Теоретическая и практическая значимость.

1. Расчет процесса электронного захвата в диспрозии-159 показал, что исследованный разрешенный переход с рекордно низкой энергией реакции обладает сравнительно низким периодом полураспада и имеет превосходящее гольмий-163 на порядок число событий на конце расчетного калориметрического спектра. Данный переход может быть использован для уточнения экспериментальных ограничений на массу электронного нейтрино.

2. Величина амплитуд перекрытия начальной и конечной волновых функций атомных оболочек при бета—процессах указывает на существование вторичных ветвей в бета—спектре. Вклады состояний с возбужденным конечным атомом следует принимать во внимание при обработке экспериментальных данных. Показано что эффект перекрытия создает дополнительную неопределенность при извлечении эффективной майорановской массы электронного нейтрино, при условии обнаружения двойного безнейтринного бета—распада.

3. Ионизационная поправка к бета—спектру трития важна в связи с тем, что тритий является перспективным источником для экспериментов по прямому поиску массы электронного антинейтрино и поиску стерильных нейтрино; в частности, результаты могут представлять интерес для действующего эксперимента KATRIN.

Методология и методы исследования. В данной теоретической работе используется математический аппарат квантовой механики и квантовой теории поля. При аналитических и численных расчетах использовались программы для символьных вычислений MAPLE и Wolfram Mathematica. При численном моделировании многоэлектронных атомных систем был использован программный пакет GRASP2018 [10], [11].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследованы каналы разрешенного и третьего запрещенного уникального перехода в процессе электронного захвата в диспрозии-159 с переходом в тербий-159 с возбужденным ядром. Для разрешенного перехода

были вычислены парциальные периоды полураспада и построен калориметрический спектр вторичного излучения. Анализ спектра демонстрирует превосходство в относительном числе событий на конце спектра в сравнении с гольмием-163, что делает этот переход перспективным кандидатом для будущих экспериментов по прямому измерению массы электронного нейтрино. Оценка периода полураспада в канале третьего запрещенного уникального перехода приводит к величине порядка 10^{25} лет, исключая потенциальный эксперимент по измерению массы нейтрино в данном канале.

2. Предложены две модели, оценивающие амплитуды перекрытия волновых функций электронов в начальных и конечных атомах в бета-процессах. Амплитуда перекрытия волновых функций электронных орбиталей с одинаковыми квантовыми числами и полная амплитуда перекрытия волновых функций электронных оболочек оценена аналитически с помощью простой нерелятивистской модели. Далее эта модель улучшается за счет учета экранирования заряда ядра электронами, лежащими на глубоких уровнях. Также рассмотрена модель релятивистских оболочек, основанная на уравнении Дирака, в которой эффективный заряд ядра самосогласованно определяется с использованием полуэмпирических данных об энергиях связи электронов на отдельных уровнях.

3. Исследован эффект внутренней ионизации при бета-распаде трития в результате рассеяния бета-электрона на электроном атома. Рассчитана полная вероятность процесса на одно событие распада. Построены распределения по импульсу и кинетической энергии вылетевшего электрона. Определена поправка к бета-спектру за счет внутренней ионизации.

Достоверность. Результаты работы получены с использованием общепринятых представлений и математического аппарата теоретической физики. Программный пакет GRASP2018, использованный при численном моделировании многоэлектронных атомных систем, считается золотым стандартом в атомных вычислениях. Все выводы работы согласуются с современными научными представлениями о физике атомов, ядер и элементарных частиц.

Личный вклад. Автор принимал участие в формулировке целей и задач работ, по материалам которых написана диссертация; изучал научную литературу по теме исследований; проводил расчеты всех величин лептонной части процесса, необходимых для вычисления постоянных распада и по-

строения спектра вторичного излучения для реакций электронного захвата в диспрозии-159; построении аналитической модели для оценки амплитуды перекрытия волновых функций электронных оболочек материнского атома и дочернего иона в бета и двойном бета—распаде; проводил вычисления вероятности ионизационного рассеяния на атоме трития при бета—распаде; построении распределений по энергии и импульсу выбитого при ионизации электрона; выполнял расчеты поправки к бета—спектру трития, обусловленной ионизацией дочернего атома; обсуждении результатов; принимал участие в написании статей по результатам работы. Для решения поставленных задач автором был освоен программный пакет релятивистского моделирования атомных систем GRASP2018 [10], [11].

Апробация работы. Результаты задачи об ионизации, сопутствующей бета—распаду трития докладывались на Молодежной конференции по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ), г. Москва, 2018 г. Результаты опубликованных работ по теме диссертации докладывались на тематических семинарах ИТЭФ и Курчатовского института (2018-2022). Результаты диссертационного исследования вошли в конкурсную работу «Исследование физических явлений в электронной оболочке атома, сопутствующих бета-распаду ядра», отмеченную премией им. И.В. Курчатова НИЦ «Курчатовский институт» за 2021 год.

Публикации. Основные результаты по теме диссертационной работы изложены в 3 печатных изданиях, 3 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования «Web of Science» и «Scopus».

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность работы, сформулирована цель, ставятся задачи, отмечены научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию электронного захвата в элементе диспрозий-159. Экспериментальной группой Университета Йювяскюля (Финляндия), с помощью двойной ловушки Пеннинга была измерена разность масс ΔM атомов ^{159}Dy и ^{159}Tb . Новое измерение $\Delta M = 364.73(19)$ кэВ оказывается более чем в пять раз более точным в сравнении с предыду-

щим известным значением, равным $\Delta M = 365.2(12)$ кэВ [12, с. 233]. У ядра ^{159}Tb , образующегося после электронного захвата, есть два возбуждения с энергиями, близкими к разности масс ΔM . Этим возбуждениям соответствуют ядерные переходы [13, с. 225]

$$^{159}\text{Dy}(3/2^-) \rightarrow ^{159}\text{Tb}^*(5/2^-, 363.5449(14) \text{ кэВ}) \quad (1)$$

и

$$^{159}\text{Dy}(3/2^-) \rightarrow ^{159}\text{Tb}^*(11/2^+, 362.050(40) \text{ кэВ}), \quad (2)$$

а соответствующие энергии реакции $Q = \Delta M - 363.5449$ кэВ и $Q = \Delta M - 362.050$ кэВ. В первом случае речь идет об энергии реакции $Q = 1.14(19)$ кэВ, что является самым малым значением из известных для переходов данного типа, к тому же такой переход наблюдался экспериментально [14]. Во втором случае величина $Q = 2.62(19)$ кэВ. Чем меньше энергия реакции, тем большее число событий попадает на правый край спектра в область, чувствительную к экспериментальному определению массы нейтрино. Возникает необходимость теоретических расчетов вероятностей электронного захвата и калориметрического спектра вторичного излучения для оценки частоты событий и возможности постановки эксперимента по определению массы нейтрино по вторичному излучению атома ^{159}Dy . В настоящее время в таких экспериментах используется реакция электронного захвата в изотопе ^{163}Ho с переходом в основное состояния дочернего ядра ^{163}Dy , энергия реакция $Q = 2.83$ кэВ [3] и период полураспада $T_{1/2} = 4570$ лет.

Вероятность электронного захвата в единицу времени λ_x (постоянная распада) имеет следующий вид [15, с. 261], [16, с. 85]:

$$\lambda_x = \frac{G_\beta^2}{(2\pi)^2} n_x B_x \beta_x^2 (Q - e_x)^2 C_x, \quad (3)$$

где $x = \{n, l, j\}$ набор квантовых чисел захваченного электрона в атоме Dy. Число n_x есть относительная заселенность уровня x : отношение числа электронов с квантовыми числами x к числу возможных проекций $2j + 1$ полного углового момента $j = l \pm s$, где l — орбитальный угловой момент, $s = 1/2$ — спин электрона. G_β^2 — константа взаимодействия. Амплитуда β_x есть числовая константа, пропорциональная значениям одночастичной ради-

альной волновой функции захваченного электрона внутри ядра. Множитель B_x учитывает перекрытие волновых функций электронных оболочек родительского атома Dy и дочернего Tb, а также обменные корреляции электронов в этих атомах. Энергия реакции Q есть разность масс нейтрального атома ^{159}Dy и атома ^{159}Tb с возбужденным ядром, энергия возбуждения ядра зависит от типа перехода. Величина e_x является энергией вакансии, образовавшейся на месте захваченного электрона, т. е. энергией связи электрона в дочернем атоме ^{159}Tb . Разность $(Q - e_x)^2$ отвечает фазовому объему испущенного электронного нейтрино ν_e в безмассовом случае и с пренебрежением отдачи ядра. Малое значение массы нейтрино, а также вклад от эффекта отдачи ядра, с малостью, выражающейся отношением энергии реакции к массе ядра $O(Q/M_{nuc}) = 10^{-8}$, существенно не влияют на значения λ_x . Величина C_x является функцией формы перехода, она содержит ядерный матричный элемент соответствующего ядерного перехода и правила отбора по угловым моментам захваченного электрона и испущенного нейтрино. Формула (3) приведена в системе единиц $\hbar = c = m_e = 1$, m_e — масса электрона. Эта система является естественной для задач физики бета-процессов и подразумевается всюду далее, если у физических величин не указана другая размерность.

Вычисление величин β_x и B_x требует построения волновых функций электронов в атомах ^{159}Dy и ^{159}Tb . Эта сложная многочастичная задача может быть решена только численно, и для этого был использован программный пакет GRASP2018 [10]. Программное обеспечение GRASP2018 (General Relativistic Atomic Structure Package) представляет собой набор программ FORTRAN 95 для выполнения полностью релятивистских многочастичных расчетов электронной структуры атомов. Теория релятивистского многоэлектронного атома, лежащая в основе вычислений, а также детали реализации кода GRASP2018 подробно изложены в книге [11]. Волновые функции электронов строятся по схеме Дирака — Хартри — Фока в самосогласованном поле электронов атома, а распределение заряда в ядре для соответствующего электростатического потенциала ядра моделируется с помощью распределения Ферми. Для ядер ^{159}Dy и ^{159}Tb распределение Ферми параметризуется на среднеквадратичный радиус $R = 5.099$ фм. Атом ^{159}Dy предполагается находящимся в основном состоянии. При построении волновых функций электронов дочернего атома ^{159}Tb учитывается наличие вакансии на месте

захваченного электрона. Также предполагается что все электроны, за исключением захваченного, наследуют квантовые числа атома ^{159}Dy , что приводит к наличию десятого возбужденного электрона на орбитали $4f$. Как результат, программа выводит численные табуляции верхней $f_x^{(+)}(r)$ и нижней $f_x^{(-)}(r)$ радиальных компонент релятивистской волновой функций электрона с квантовыми числами x в зависимости от радиуса r . Функции $f_x^{(\pm)}(r)$, в свою очередь, используются для вычисления величин β_x и B_x . Полученные значения амплитуд β_x хорошо согласуются с известными в литературе табуляциями [17, с. 9], [16, с. 95]. При вычислении поправки на перекрытие и обмен (атомный матричный элемент) B_x было использовано приближение E. Vatai [18], согласно которому все электроны в конечном состоянии наследуют квантовые числа родительского атома за исключением захваченного электрона, эффекты встряхивания не учитываются. Вычисления показали, что для захвата с орбиталей N_1, O_1, P_1 величины B_x заметно превышают единицу, и в силу того, что данные уровни вносят заметный вклад в исследуемый разрешенный переход, учет поправки на перекрытие и обмен представляется необходимым. Для уровня N_1 , преобладающего при электроном захвате в канале (1), поправка B_{N_1} составляет 11%.

Энергии связи электронов атома ^{159}Tb возможно получить из эмпирических данных, доступных в литературе. Значения e_x также можно вычислить для изолированного атома с помощью GRASP2018, однако в приоритете использование экспериментальных данных, поскольку энергии связи могут зависеть от агрегатного состояния и условий среды. В настоящей работе были использованы данные из работ [19], [20]. Недостающая величина энергии связи для валентного электрона на орбитали P_1 вычислена в GRASP2018 с учетом десятого электрона, оказавшегося на $4f$ орбитали в силу факта наследования квантовых чисел. Ядерный матричный элемент, входящий в величину C_x , не вычислялся. Период полураспада $T_{1/2} = \ln 2(\sum_x \lambda_x)^{-1}$ для перехода (1), вычисленный при единичном ядерном матричном элементе, нормирован на значение $T_{1/2} = 2.08 \cdot 10^5$ лет, полученное из экспериментальных данных по брэнчингу [14] и полному периоду полураспада [21], что исключает необходимость вычисления ядерного матричного элемента для данного процесса.

Вычислены парциальные периоды полураспада $t_x^{(1/2)} = \ln 2 \lambda_x^{-1}$ при электронном захвате с орбитали x для разрешенного перехода (1). Доминирует захват с орбитали N_1 , величина парциального периода полураспада составляет $t_{N_1}^{(1/2)} = 3 \cdot 10^5$ лет. Второй по величине вклад дает захват с орбитали O_1 , $t_{O_1}^{(1/2)} = 8.9 \cdot 10^5$ лет. В свою очередь, по результатам вычислений с единичным ядерным матричным элементом, третий запрещенный уникальный переход (2) обладает полным периодом полураспада $T_{1/2} > 10^{24}$ лет. Оценка ядерной части процесса была проведена под руководством J. Suhonen, в этом случае период полураспада составляет $T_{1/2} \sim 10^{25}$ лет. Этот переход не наблюдался экспериментально, огромное значение периода полураспада исключает его как кандидата для измерения массы электронного нейтрино. Рассмотренный переход (1) сохраняет интерес, но проигрывают изотопу ^{163}Ho в абсолютных значениях периода полураспада. Однако в контексте эксперимента по определению массы нейтрино главным фактором выбора между изотопами является значение относительной доли событий, приходящихся на правый край спектра. Для решения этой задачи был построен спектр вторичного излучения при электронном захвате ^{159}Dy с разрешенным ядерным переходом (1) и сравнен с аналогичным спектром для ^{163}Ho . Энергетическое распределение событий электронного захвата представляется в виде некогерентной суммы вкладов захватов с отдельных орбиталей:

$$\frac{d\lambda}{dE} = \sum_x \frac{G_\beta^2}{(2\pi)^2} n_x B_x \beta_x^2 E_\nu p_\nu C_x \frac{\Gamma_x/2\pi}{(E - e_x)^2 + \Gamma_x^2/4}. \quad (4)$$

Помимо величин, встречающихся в (3), здесь фигурирует энергетическая ширина электронной вакансии Γ_x , образованной в дочернем атоме. Импульс $p_\nu = \sqrt{E_\nu^2 - m_{\nu_e}^2}$ учитывает массивность нейтрино, энергия вторичного излучения $E = Q - E_\nu$. Выражение (4) определяет вероятность электронного захвата с энергией вторичного излучения, выделяемой в бесконечно малом интервале значений $(E, E + dE)$, а вакансии рассматриваются как Брейт — Вигнеровские резонансы. Энергетические ширины Γ_x вакансий N_1 , N_2 , M_1 и M_2 в атоме $^{159}\text{Tb}^*$ взяты из [22]. Данные для остальных ширин не доступны и полагались равными $\Gamma_{N_2} = 5.26$ эВ. При суммировании вкладов уровней учтены орбитали M_1 и M_2 . Эти уровни находятся в кинематически запрещенной области $e_x > Q$, однако хвосты Брейт — Вигнеровской амплитуды для этих

вкладов проникают в разрешенный энергетический диапазон и дают заметный вклад в спектр. Вычисленный для сравнения калориметрический спектр для случая электронного захвата в изотопе ^{163}Ho , учитывает электроны на уровнях N_1 , N_2 , M_1 , M_2 , O_2 , а необходимые величины были заимствованы из [23]. Расстояния от правого края спектра до ближайшего пика вторичного излучения для диспрозия (N_1) и гольмия (M_2) сопоставимы. Близость вкладов орбиталей диспрозия M_1 , M_2 к правому краю спектра частично компенсирует большое различие в абсолютных значениях вероятностей электронного захвата у этих элементов. С графиками построенных спектров вторичного излучения можно ознакомиться в диссертационной работе. Анализ построенных спектров (4) для обоих элементов показал, что переход (1) обладает превосходством на порядок в числе событий в области, чувствительной для экспериментального определения массы нейтрино. Этот переход является разрешенным, описывается универсальной формой спектра и всего одним ядерным матричным элементом, выпадающим при нормировке спектра, он наблюдался экспериментально, его период полураспада известен. Эти преимущества позволяют рассматривать его как перспективного кандидата для проведения эксперимента по измерению массы электронного нейтрино.

Вторая глава посвящена исследованию эффекта перекрытия электронных оболочек атомов при бета и двойных бета—распадах. Каналы бета и двойного бета—распада, не сопровождающиеся возбуждением электронных оболочек, могут быть подавлены из-за неортогональности электронных волновых функций родительского и дочернего атомов. Этот эффект чувствителен к вкладу внешних электронных оболочек. Поскольку валентные электроны—спектаторы участвуют в образовании химических связей и коллективизируются в металлах, бета—спектр также может модифицироваться. Электроны на глубоко лежащих электронных оболочках менее подвержены влиянию окружающей среды, и их амплитуды перекрытия более стабильны. Эффект подавления перехода атомной оболочки в основное состояние дочернего атома оценен для бета—распада ^{87}Kr , электронного захвата в ^{163}Ho и двойных бета—распадов ^{76}Ge , ^{100}Mo , ^{130}Te и ^{136}Xe . Бета и двойные бета—распады сопровождаются изменением заряда ядра Z на одну или две единицы соответственно. Электроны, которые изначально находятся в основном состоянии родительского атома, оказываются в квантовой суперпозиции всех возможных состо-

яний дочернего атома. Во второй главе оценивается вероятность выживания основного состояния электронных оболочек в бета и двойном бета—распадах.

Амплитуда перекрытия волновых функций электронов с одинаковыми квантовыми числами для водородоподобных атомов с зарядами ядра Z и $Z' = Z + \Delta Z$ может быть записана следующим образом:

$$O_{nl} = \int_0^\infty r^2 dr Z^{3/2} R_{nl}(Zr) Z'^{3/2} R_{nl}(Z'r). \quad (5)$$

Амплитуда перекрытия O_{nl} определяет вероятность электрона в дочернем атоме обладать такими же квантовыми числами, как и в родительском. В содержательном случае $Z \gg 1$, который охватывает средне—тяжелые и тяжелые атомы, величина $\Delta Z/Z$ является параметром малости. Разложив множитель $Z'^{3/2} R_{nl}(Z'r)$ в степенной ряд $\Delta Z/Z$ до второго порядка, пользуясь свойствами уравнения Шредингера для водородоподобного атома, условием нормировки, выражением для средних степеней радиуса [24, с. 158], можно получить формулу

$$O_{nl} \approx 1 - \frac{1}{8} (1 + 2n^2 - 2l(l+1)) \frac{\Delta Z^2}{Z^2}. \quad (6)$$

На первом шаге рассматривается модель атома с заполненными оболочками невзаимодействующими друг с другом электронами. В этом случае справедливо следующее соотношение между зарядом ядра Z и максимальным главным квантовым числом n_Z :

$$Z = \sum_{n=1}^{n_Z} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l \sum_{\sigma} 1 = \frac{1}{3} n_Z (n_Z + 1) (2n_Z + 1). \quad (7)$$

Амплитуда перекрытия всех электронных оболочек K_Z может быть найдена как произведение O_{nl} всех электронов:

$$K_Z = \prod_{n=1}^{n_Z} \prod_{l=0}^{n-1} \prod_{m=-l}^l \prod_{\sigma} O_{nl}, \quad (8)$$

где произведение ведется по последовательно заполненным электронным оболочкам вплоть до максимально возможного главного квантового числа n_Z . Величина K_Z^2 имеет смысл вероятности выживания, то есть вероятности

для всех электронов дочернего атома остаться на невозбужденных уровнях. Произведение (8) можно оценить с помощью того факта, что для малых ϵ , $\prod_k(1 + c_k\epsilon) \approx \exp(\sum_k c_k\epsilon)$, что приводит к

$$K_Z \approx \exp\left(-\frac{3(n_Z^2 + n_Z + 3)}{40Z}\Delta Z^2\right). \quad (9)$$

В пределе больших Z , асимптотическое поведение формулы (9)

$$K_Z \approx \exp\left(-\frac{3^{5/3}2^{1/3}}{80}\frac{\Delta Z^2}{Z^{1/3}}\right). \quad (10)$$

Из оценки по формуле (10) следует, что при двойном бета-распаде ^{76}Ge электронная оболочка остается невозбужденной в $K_Z^2 \approx 0.75$ случаях. Вероятность безнейтринного двойного бета-распада в единицу времени в канал с невозбужденной оболочкой дочернего дважды ионизированного атома пропорциональна

$$\Gamma^{0\nu 2\beta} \propto |K_Z m_{\beta\beta} g_A^2 \mathcal{M}^{0\nu 2\beta}|^2, \quad (11)$$

где $\mathcal{M}^{0\nu 2\beta}$ ядерный матричный элемент, g_A — аксиальная константа, $m_{\beta\beta}$ — эффективная майорановская масса нейтрино. Аналогично, квадрату K_Z пропорциональны ширины двухнейтринной моды двойного бета-распада $\Gamma^{2\nu 2\beta^\pm}$ и обычного бета-распада Γ^β . Эффект перекрытия электронов-спектаторов подавляет скорость распада в невозбужденный атом и усложняет процедуру извлечения $|m_{\beta\beta}|$ из экспериментов [4–7], поскольку требуется учет ветвей с возбужденными состояниями.

Аналитическую оценку амплитуды перекрытия электронных оболочек можно улучшить, учитывая экранирование заряда ядра электронами. Электроны в атоме движутся в эффективном потенциале, который можно аппроксимировать кулоновским потенциалом с эффективным зарядом $Z_{\text{eff}} < Z$. На электрон с главным квантовым числом n действует эффективный заряд $Z_{\text{eff}} \approx Z - Z_s$, где Z_s — количество электронов на нижних орбиталях с главными квантовыми числами $1..n - 1$. Число Z_s задается формулой (7) с заменой n_Z на $n - 1$. Соответственно, в формуле (6) достаточно сделать замену $Z \rightarrow Z_{\text{eff}}$. Это приводит к более сложной формуле для K_Z , сумма вычисляется в терминах специальных функций и окончательное выражение получается довольно громоздким.

Далее рассматривается релятивистская модель. Оценка амплитуды перекрытия волновых функций электронов может быть дана с помощью решений уравнения Дирака в кулоновском поле путем определения эффективного заряда ядра для каждого электронного уровня из известных полуэмпирических значений энергий связи электронов [19]. Используя известные энергии связи электронов, эффективные заряды родительского и дочернего ядер рассчитываются для каждого электронного уровня и затем подставляются в решения уравнения Дирака для водородоподобного атома. Полученные волновые функции нормируются и используются для вычисления амплитуды перекрытия

$$O_{njl} = \int_0^\infty r^2 dr (f_{njl}^{(+)}(Z_{\text{eff}}, r) f_{njl}^{(+)}(Z'_{\text{eff}}, r) + f_{njl}^{(-)}(Z_{\text{eff}}, r) f_{njl}^{(-)}(Z'_{\text{eff}}, r)), \quad (12)$$

при этом обменные эффекты за счет перекрытия с разными главными квантовыми числами не учитываются. Интеграл (12) вычисляется аналитически для конкретных значений n, l, j . На Рисунке 1 показан график зависимости K_Z^2 , вычисленного по формулам (9) и (10) как функции заряда ядра Z . Сплошные кривые показывают поведение K_Z^2 с учетом экранировки для $\Delta Z = \pm 1$ (верхняя кривая) и $\Delta Z = \pm 2$ (нижняя кривая). Поскольку валентные электроны участвуют в химических связях и коллективизированы в металлах, их влияние плохо контролируемо. Прямой расчет с использованием модельных функций с учетом вклада электронов валентной оболочки дает нерегулярные значения полной амплитуды перекрытия K_Z , представленные в Таблице 1.

Таблица 1 — Полная амплитуда перекрытия K_Z и амплитуда перекрытия за вычетом валентных оболочек $K_Z^{\text{core shells}}$ рассчитанные с помощью (12) для бета-распада ^{87}Kr , электронного захвата в ^{163}Ho и двойном бета-распаде ^{76}Ge , ^{100}Mo , ^{130}Te и ^{136}Xe . Число валентных электронов указано в скобках после символа элемента.

Элемент	$_{32}\text{Ge}(4)$	$_{36}\text{Kr}(8)$	$_{42}\text{Mo}(6)$	$_{52}\text{Te}(6)$	$_{54}\text{Xe}(8)$	$_{67}\text{Ho}(3)$
K_Z	6.2×10^{-3}	0.89	0.56	1.4×10^{-4}	0.22	0.53
$K_Z^{\text{core shells}}$	0.26	0.90	0.58	0.069	0.36	0.64

В случае электронного захвата в атоме Ho число K_Z есть величина амплитуды перехода атомной оболочки гольмия и дочернего атома Dy без учета образовавшихся вакансий и обменных эффектов. Аккуратный расчет

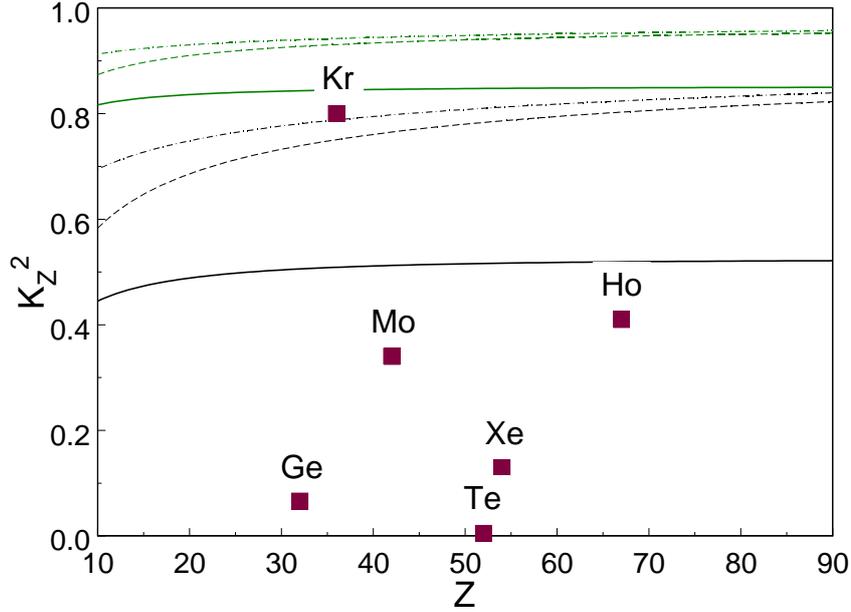


Рис. 1 — Вероятность выживания невозбужденных электронных оболочек K_Z^2 в зависимости от заряда ядра Z . Зеленые верхние кривые соответствуют процессам с $\Delta Z = \pm 1$. Черные нижние кривые соответствуют процессам с $\Delta Z = \pm 2$. Пунктирные и точно пунктирные кривые рассчитаны с использованием формул (9) и (10) соответственно. Сплошные кривые рассчитаны с учетом экранировки. Красными квадратами обозначены величины $(K_Z^{\text{core shells}})^2$, вычисленные с помощью модельных волновых функций (12), для бета—распада Kr, электронного захвата Ho и двойных бета—распадов Ge, Mo, Te и Xe

требует вычисления коэффициентов B_x , что не является возможным в рамках обсуждаемых здесь простых моделей.

Низкие значения K_Z означают, что канал распада, в котором электронные оболочки дочернего атома не возбуждены, подавлен. Чтобы понять, какие каналы преобладают в случаях с низким значением K_Z , необходимо рассмотреть переходы в возбужденные состояния. Числа, полученные для германия и теллура обладают аномальной малостью, что может свидетельствовать о недостаточной точности модельных релятивистских функций. Вероятность выживания основных электронов, то есть электронов атома за вычетом электронов из валентных оболочек, в меньшей степени подвержена эффектам среды. Исключая 4 валентных электрона в атоме Ge, получаем $K_Z^{\text{core shells}} = 0.26$. Аналогичные вычисления для Kr без 8, Mo без 6, Te без 6, Xe без 8, и Ho без

3 валентных электронов представлены в Таблице 1. Внешняя электронная оболочка криптона и ксенона заполнена, что приводит к адекватным значениям K_Z . В силу малости отношения $K_Z/K_Z^{\text{core shells}}$ полученных для некоторых элементов, необходимо выполнить расчеты по альтернативным схемам моделирования структуры электронной оболочки. Расчеты были проведены в GRASP2018 для бета-распада ^{87}Kr и двойных бета-распадов ^{76}Ge , ^{130}Te , ^{136}Xe , результаты представлены в Таблице 2.

Таблица 2 — Величины K_Z , вычисленные при помощи GRASP2018.

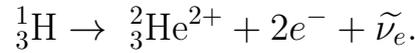
Элемент	^{32}Ge	^{36}Kr	^{52}Te	^{54}Xe
K_Z	0.575	0.876	0.589	0.606

Отношение $K_Z/K_Z^{\text{core shells}}$ определяет вклад валентной оболочки. Малость $K_Z \ll K_Z^{\text{core shells}}$ означает, что доминирующие каналы распада связаны с возбуждением валентных оболочек. Вычисление отношения $K_Z/K_Z^{\text{core shells}}$ требует многочастичного численного моделирования с учетом эффектов среды, простые модели переоценивают вклад валентных оболочек, в то время как GRASP2018 недооценивает эффект в силу отсутствия функционала для учета эффектов среды.

Амплитуды вероятности двойного безнейтринного бета-распада и безнейтринного двойного электронного захвата пропорциональны эффективной майорановской массе электронного нейтрино $m_{\beta\beta} = \sum_i U_{ei}^2 m_i$, где $U_{\alpha i}$ - матрица смешивания Понтекорво—Маки—Накагавы—Сакаты, а m_i — диагональные массы нейтрино. Коллаборации GERDA и KamLAND-Zen [4; 6] по поиску двойного безнейтринного бета-распада в ^{76}Ge и ^{136}Xe , дают ограничения $|m_{\beta\beta}| < 120 - 260$ мэВ и 61 - 165 мэВ соответственно, с учетом неопределенностей ядерных матричных элементов и при значении аксиальной константы $g_A = 1.27$. Ранее коллаборациями NEMO-3 и CUORE [5; 7] были получены ограничения $|m_{\beta\beta}| < 330 - 620$ мэВ и 270 - 760 мэВ для элементов ^{100}Mo и ^{130}Te . Ограничения на массу $|m_{\beta\beta}|$ должны быть дополнены новым условием $K_Z = 1$ согласно соотношению (11). Неидеальное перекрытие электронных оболочек при умеренно низком значении K_Z приводит к увеличению верхних пределов на множитель $1/K_Z$, если при извлечении $|m_{\beta\beta}|$ не учитываются дополнительные ветви спектра с возбуждениями дочернего атома. Результаты из Таблицы 1 для двойного безнейтринного бета-распада изотопов

^{100}Mo и ^{136}Xe демонстрируют соответствующее увеличение ограничения в 1.8 и 4.6 раз. Если использовать значения из Таблицы 2 полученные с помощью GRASP2018, для элементов Xe, Te и Ge ограничение увеличивается примерно в 1.7 раз. Случай $K_Z \ll 1$ уводит за пределы применимости формулы (11) и требует аккуратного расчета эффектов встряхивания, т. е. каналов спектра с возбужденной или ионизованной атомной оболочкой.

Третья глава посвящена исследованию эффекта ионизации в бета—распаде трития. В случае бета—распада трития интерес представляет процесс, при котором испущенный ядром электрон рассеивается на электроне атома путем кулоновского взаимодействия, уводя его в непрерывный спектр и оставляя дочерний атом гелия дважды ионизированным:



При этом бета—электрон теряет часть своей энергии, что отражается на форме кривой бета—спектра. Этот процесс следует различать с эффектом встряхивания, хорошо изученным для водородоподобного атома [25, с. 432].

Максимальная кинетическая энергия бета—электрона при распаде трития составляет 18.564 кэВ. Следовательно, рассеяние бета—электрона на электроне атома можно описать используя нерелятивистскую теорию возмущений. Волновая функция бета—электрона $\psi_s(r_1)$, излученного неполяризованным ядром, задается сферической волной $\psi_s(r_1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \frac{e^{ikr_1}}{r_1}$, нормированной на единичный поток через сферу единичного радиуса с центром в ядре, k — величина импульса, распределенная по бета—спектру. Предполагается что до рассеяния атом находится в основном состоянии, волновая функция электрона К — оболочки $\psi_K(r_2) = \frac{b^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-br_2}$, где b — обратный Боровский радиус, в используемой системе единиц $\hbar = c = m_e = 1$ его численное значение совпадает с постоянной тонкой структуры $\alpha = 1/137$, а энергия связи электрона на К — оболочке равна $\varepsilon = b^2/2$. Электроны рассеиваются кулоновским потенциалом α/r , $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, и после рассеяния их волновые функции описываются плоскими волнами $\psi_{k_i}(\mathbf{r}_i) = e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{r}_i}$, $i = 1, 2$. В этом случае амплитуда рассеяния в первом порядке теории возмущений принимает вид

$$M = -i \int \psi_{k_1}^*(\mathbf{r}_1) \psi_{k_2}^*(\mathbf{r}_2) \frac{\alpha}{r} \psi_s(r_1) \psi_K(r_2) d^3r_1 d^3r_2 \quad (13)$$

Плоские волны раскладываются по сферическим, а кулоновский потенциал в свою очередь раскладывается по формуле Лапласа. Вероятность рассеяния $W(k)$ в единицу времени за одно событие бета—распада как функция импульса k бета—электрона может быть вычислена согласно золотому правилу Ферми. В итоге было получено следующее выражение для вероятности:

$$W(k) = \frac{(2b)^5}{\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \int_0^{k_{2m}} dk_2 |I_l(k_1, k_2)|^2 k_2^2 \sqrt{k^2 - b^2 - k_2^2}. \quad (14)$$

Верхнему пределу интегрирования $k_{2m} = \sqrt{k^2 - b^2}$ соответствует максимальный возможный импульс вылетевшего электрона, а на величину импульса бета—электрона накладывается ограничение $k \geq b$, соответствующее пороговому значению для данного процесса. Радиальный интеграл $I_l(k_1, k_2)$ не вычисляется аналитически. Учет тождественности электронов приводит к переопределению $I_l(k_1, k_2)$. Полная вероятность ионизировать атом за счет рассеяния на одно событие бета—распада задается усреднением (14) по бета—спектру, нормированному на единицу. Для вычислений был использован бета—спектр трития, представленный в работе [26, с. 2]. Численный расчет приводит к вкладам в полную вероятность ионизации, быстро убывающим с ростом углового момента l : $\mathcal{W} = 0.0554$ при $l = 0$, $\mathcal{W} = 0.0031$ при $l = 1$, $\mathcal{W} = 0.0007$ при $l = 2$. Учет тождественности электронов приводит к незначительному уменьшению значения $\mathcal{W} = 0.0536$. Построено распределение по импульсам вылетевшего электрона k_2 , усредненного по бета—спектру, ограничиваясь вкладом $l = 0$, когда оба электрона излучаются в виде s —волн. Острому пику соответствует наиболее вероятное значение импульса примерно равное $6b/10$, а в переменных кинетической энергии этому пику соответствует значение $E_2 \sim 5$ эВ. За острым пиком следует медленно убывающее плато, при вычислении среднего это приводит к значению средней кинетической энергии $\overline{E}_2 = 85.8$ эВ. Это число не является пренебрежимо малым: средняя кинетическая энергия спектра бета—спектра трития из работы [26, с. 2] составляет $\overline{E} = 5.669$ кэВ. Распределение по импульсам автоионизационного электрона и соответствующие потери энергии, позволяют вычислить поправку к бета—спектру трития. Спектр трития, с учетом эффекта, характеризуется средним значением кинетической энергии $\overline{E} = 5.45$ кэВ. С гра-

фиками вычисленных распределений и модифицированного спектра можно ознакомиться в диссертационной работе. Отклонение от исходной формы спектра достигает 4 % в середине энергетического диапазона $E > 5$ кэВ. Точно такой же эффект отклонения спектра вниз относительно исходной кривой на несколько процентов ожидается при наличии четвертого стерильного нейтрино с массой $m_4 \sim 10$ кэВ и коэффициентом смешивания с электронным нейтрино $\sin^2(\theta_{14}) \sim 0.2$ [27]. Отсутствие учета ионизационного рассеяния может быть ошибочно принято за наличие физики за рамками Стандартной Модели. Проанализирован правый край модифицированного бета—спектра. Конечная точка спектра $E = 18.564$ кэВ остается несмещенной. Рассмотренный эффект не изменяет значимым образом энергетический спектр в области, чувствительной к измерению массы нейтрино.

В **заключении** приведены основные результаты: Настоящая диссертационная работа посвящена изучению влияния электронной оболочки атомов на бета—процессы. Основное внимание уделено бета—процессам, чувствительным к массе и дираковской/майорановской природе нейтрино. Данные характеристики нейтрино важны в поисках обобщений Стандартной модели.

Рассмотрены два канала процесса электронного захвата в диспрозии-159 с последующим переходом в возбужденные состояния ядра тербия-159. Согласно новейшим экспериментальным данным, оба перехода обладают рекордно низкими энергиями реакции. Для вычисления парциальных периодов полураспада и калориметрического спектра вторичного излучения при электронном захвате в диспрозии-159 были проведены многочастичные численные расчеты с помощью программного пакета моделирования релятивистских атомных систем GRASP2018. Использовались стандартные выражения для вероятности электронного захвата в единицу времени и спектра. Вероятность пропорциональна значению волновой функции захваченного электрона внутри ядра, атомному матричному элементу задающему поправку на перекрытие волновых функций и обменные корреляции всех электронов атома, фазовому объему, содержащему энергию реакции и зависящему от вакансии в дочернем атоме тербия-159, а также ядерному матричному элементу. Исследованный третий запрещенный уникальный переход в возбужденное состояние $11/2^+$ дочернего ядра тербия-159, как было показано, обладает полным периодом полураспада $T_{1/2} > 10^{24}$ лет, что исключает его из

списка возможных кандидатов для использования в экспериментах по прямому измерению массы электронного нейтрино. Для разрешенного перехода в возбужденное состояние $5/2^-$ дочернего ядра тербия-159, были проведены расчеты парциальных периодов полураспада. Доминирует электронный захват с орбитали N_1 ($e_x = 0.397$ кэВ) с периодом полураспада $t_{N_1}^{(1/2)} \sim 10^5$ лет. Это число следует сравнивать с периодом полураспада $t_{M_1}^{(1/2)} \sim 10^3$ лет при электронном захвате с орбитали M_1 ($e_x = 2.128$ кэВ) в изотопе гольмия-163, используемом в настоящее время для прямого измерения массы электронного нейтрино по энергетическому спектру вторичного излучения. Анализ спектра вторичного излучения в сравнении с таковым для гольмия-163 показал преимущество диспрозия-159 несмотря на больший период полураспада. Исследованный разрешенный переход описывается универсальной формой спектра и только одним ядерным матричным элементом, выпадающим при нормировке спектра; он наблюдался экспериментально, его период полураспада известен. Данный канал обладает превосходством на порядок в относительном числе событий в области, чувствительной для экспериментального определения массы нейтрино в сравнении с используемым в настоящий момент электронным захватом в гольмии-163. Эти преимущества позволяют рассматривать его как перспективного кандидата для проведения эксперимента по прямому измерению массы электронного нейтрино.

В бета–процессах электронная оболочка атома, как правило, рассматривается в качестве зрителя. При изменении заряда ядра волновые функции электронов начального и конечного ядра с разными квантовыми числами более не ортогональны, что ведет к подавлению канала с невозбужденным конечным атомом. В диссертационной работе был рассмотрен эффект перекрытия электронных оболочек при бета и двойном бета–распаде. Простая оценка демонстрирует, что полная амплитуда перекрытия волновых функций электронных оболочек (атомный матричный элемент) K_Z заметно отличается от единицы несмотря на то, что амплитуды перекрытия отдельных электронных уровней чрезвычайно близки к единице. Это поведение подтверждается вычислениями, проведенными при помощи GRASP2018. Отмечается, что амплитуда перекрытия K_Z чувствительна к вкладам внешних электронных оболочек. Валентные электроны участвуют в образовании химических связей, коллективизируются в кристаллах и чувствительны к условиям экс-

перимента. Если эти эффекты не учтены, величина K_Z содержит существенную неопределенность. Соответствующая погрешность атомного матричного элемента накладывается на неопределенности, возникающие при вычислении ядерной части процесса. Для вычисления K_Z , помимо простой аналитической модели, был так же предложен релятивистский подход, позволяющий проводить вычисления с помощью простых модельных волновых функций и эмпирических данных по энергиям связи электронов в атомах. Для изотопов германий-76, теллур-130, ксенон-136, подверженных двойному бета—распаду, вычисления также проведены с помощью программного пакета GRASP2018. Эффект перекрытия оказывается значительным для двойного бета—распада, величина $K_Z \sim 0.6$ для приведенных выше элементов, что также демонстрирует существенный вклад ветвей спектра с возбужденным или ионизированным дочерним атомом. Отличие атомного матричного элемента от единицы модифицирует связь ширины двойного безнейтринного бета—распада с эффективной майорановской массой нейтрино $m_{\beta\beta}$, что ставит вопрос о необходимости более детального анализа эффекта в связи с ограничениями на величину $m_{\beta\beta}$, извлекаемую экспериментально.

В задаче об ионизационном рассеянии бета—электрона на атоме трития, вычислена вероятность процесса на акт бета—распада, оказывающаяся заметной величиной $\sim 5\%$. Электрон, находившийся в основном состоянии атома трития, оказывается в непрерывном спектре со средней кинетической энергией ~ 85 эВ. За счет потери энергии на ионизацию, энергетический бета—спектр испытывает подавление в средней части, при этом величина отклонения от спектра без учета эффекта достигает 4% при промежуточной кинетической энергии бета—электрона. Рассмотренный эффект не влияет значимым образом на поведение вблизи правого края спектра, чувствительного к измерению массы нейтрино.

Полученные результаты демонстрируют важную роль коллективных эффектов в электронных оболочках атомов в бета—процессах. Корректное описание коллективных эффектов позволяет указать атомы и процессы, перспективные для изучения фундаментальных свойств нейтрино.

Публикации автора по теме диссертационной работы

1. *Krivoruchenko M. I., Tyrin K. S.* Overlap of electron shells in β and double- β decays // *Eur. Phys. J. A.* — 2020. — Vol. 56. — P. 16.
2. *Tyrin K. S., Krivoruchenko M. I., Šimkovic F. F.* Internal Ionization of an Atom in the β Decay of Tritium // *Phys. Atom. Nucl.* — 2020. — Vol. 82. — P. 1627–1630.
3. *Ge Z., Eronen T., Tyrin K. S. [et al.]* ^{159}Dy Electron-Capture: A New Candidate for Neutrino Mass Determination // *Phys. Rev. Lett.* — 2021. — Vol. 127. — P. 272301.

Список литературы

1. Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos / Y. Fukuda [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 1562–1567.
2. Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity / M. Aker [et al.] // *Nature Physics.* — 2022. — Vol. 18, no. 2. — P. 160–166.
3. High-resolution and low-background ^{163}Ho spectrum: interpretation of the resonance tails / C. Velte [et al.] // *Eur. Phys. J. C.* — 2019. — Vol. 79, no. 12. — P. 1026.
4. Improved Limit on Neutrinoless Double- β Decay of ^{76}Ge from GERDA Phase II / M. Agostini [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 120. — P. 132503.
5. Search for Neutrinoless Double-Beta Decay of ^{130}Te with CUORE-0 / K. Alfonso [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 115. — P. 102502.
6. Search for Majorana Neutrinos Near the Inverted Mass Hierarchy Region with KamLAND-Zen / A. Gando [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 117. — P. 082503.

7. Results of the search for neutrinoless double- β decay in ^{100}Mo with the NEMO-3 experiment / R. Arnold [et al.] // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92. — P. 072011.
8. The CUPID-Mo experiment for neutrinoless double-beta decay: performance and prospects / E. Armengaud [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80, no. 1. — P. 44.
9. First Results from the AMoRE-Pilot neutrinoless double beta decay experiment / V. Alenkov [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 9. — P. 791.
10. GRASP2018-A Fortran 95 version of the General Relativistic Atomic Structure Package / C. Froese Fischer [et al.] // Computer Physics Communications. — 2019. — Vol. 237. — P. 184–187.
11. *Grant I. P.* Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules. — New York : Springer, 2007. — 800 p.
12. The AME 2020 atomic mass evaluation (I). Evaluation of input data, and adjustment procedures* / W. J. Huang [et al.] // Chinese Physics C. — 2021. — Vol. 45, no. 3. — P. 030002.
13. *Reich C.* Nuclear Data Sheets for A = 159 // Nuclear Data Sheets. — 2012. — Vol. 113, no. 1. — P. 157–363.
14. *Myslek B., Sujkowski Z., Kotlinska B.* The Levels in ^{159}Tb Populated from the β^- Decay of ^{159}Gd and Electron Capture Decay of ^{159}Dy // Proceedings of the Conference on the Electron Capture and Higher Order Processes in Nuclear Decays, Debrecen, Hungary, July 15–18, 1968. V. 1. P. 102-7. — 1969.
15. *Behrens H., Bühring W.* Electron Radial Wave Functions and Nuclear Beta-decay. — Oxford : Clarendon Press, 1982. — 626 p.
16. Orbital electron capture by the nucleus / W. Bambynek [et al.] // Rev. Mod. Phys. — 1977. — Vol. 49, no. 1. — P. 77–221.
17. *Band I. M., Trzhaskovskaya M. B.* Electron-wave-function expansion amplitudes near the origin calculated in the Dirac-Fock-Slater and Dirac-Fock potentials // Atomic Data and Nuclear Data Tables. — 1986. — Vol. 35, no. 1. — P. 1–13.

18. *Vatai E.* On the exchange and overlap corrections in electron capture // Nucl. Phys. A. — 1970. — Vol. 156. — P. 541–552.
19. *Larkins F. P.* Semiempirical Auger-electron energies for elements $10 \leq Z \leq 100$ // Atomic Data and Nuclear Data Tables. — 1977. — Vol. 20, no. 4. — P. 311–387.
20. X-Ray Data Booklet. — URL: https://xdb.lbl.gov/Section1/Table_1-1.pdf (дата обращения 01.05.2021).
21. National Nuclear Data Center. — URL: <https://www.nndc.bnl.gov/> (дата обращения: 07.04.2020).
22. *Campbell J., Papp T.* Widths of the Atomic K–N7 Levels // Atomic Data and Nuclear Data Tables. — 2001. — Vol. 77, no. 1. — P. 1–56.
23. The electron capture in ^{163}Ho experiment – ECHO / L. Gastaldo [et al.] // European Physical Journal: Special Topics. — 2017. — Vol. 226, no. 8. — P. 1623–1694.
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — Москва : Физматлит, 2004. — 800 с.
25. *Feinberg E. L.* Ionization of the Atom due to β -Decay // J. Phys. (USSR). — 1941. — Vol. 4. — P. 423.
26. *Šimkovic F. F., Dvornický R., Faessler A.* Exact relativistic tritium β -decay endpoint spectrum in a hadron model // Phys. Rev. C. — 2008. — Vol. 77. — P. 055502.
27. Wavelet approach to search for sterile neutrinos in tritium β -decay spectra / S. Mertens [et al.] // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91. — P. 042005.