

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

На правах рукописи



Шитов Михаил Игоревич

**МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТОВ  
СВЯЗИ С ФОНОНАМИ В МАГИЧЕСКИХ И  
ПОЛУМАГИЧЕСКИХ ЯДРАХ**

Специальность 01.04.16 —

«Физика атомного ядра и элементарных частиц»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Камерджиев Сергей Павлович

Москва — 2022

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Основные соотношения самосогласованной ТКФС</b> . . .	11
1.1 Основные соотношения стандартной ТКФС . . . . .	12
1.2 Метод вариации в поле фонона, тэдпол, амплитуда рождения двух фононов . . . . .	14
1.3 Метод энергетического функционала плотности. Функционал Фаянса. . . . .	15
<b>Глава 2. Ангармонические эффекты второго и третьего     порядков по амплитуде рождения фонона в     магических и полумагических ядрах</b> . . . . .	20
2.1 История вопроса. . . . .	20
2.2 Состояния с двумя фононами. Вероятности переходов и результаты расчетов для ядер без спаривания . . . . .	22
2.3 Состояния с двумя фононами. Вероятности переходов и результаты расчетов для ядер со спариванием. Роль спиновых составляющих амплитуды рождения фонона . . . . .	30
2.4 Состояния с тремя фононами. Вероятности переходов из двухфононного состояния в однофононное . . . . .	40
2.5 Выход за рамки теории ангармонических эффектов Ходеля . . .	47
2.6 Выводы . . . . .	50
<b>Глава 3. Учет квазичастично фононного взаимодействия в     области энергий ПДР и ГМР</b> . . . . .	53
3.1 История вопроса . . . . .	55
3.2 Учет сложных $1p1h$ ⊗фонон-конфигураций . . . . .	57
3.3 Микроскопическая модель учета сложных $1p1h$ ⊗фонон и двухфононных конфигураций . . . . .	62
3.4 Учет регулярной части $\Gamma^r$ полной амплитуды $\Gamma$ . Характеристики ПДР и ГМР . . . . .	74
3.5 Выводы . . . . .	81

	Стр.
Заключение . . . . .	84
Список сокращений и условных обозначений . . . . .	86
Список литературы . . . . .	87
Список рисунков . . . . .	97
Список таблиц . . . . .	100
Приложение А. Отделение угловых переменных и расчет интегралов для магических ядер . . . . .	101
Приложение Б. Пропагаторы для полумагических ядер . . . . .	103
Приложение В. Отделение угловых переменных для амплитуды перехода между двухфононным и однофононным состояниями . . . . .	105
Приложение Г. Связь амплитуд рождения одного и двух фононов . . . . .	116
Приложение Д. Новое уравнение для вершины . . . . .	118

## Введение

Главное направление развития теоретической ядерной физики низких энергий в последние полвека заключалось в развитии ее микроскопической составляющей, в основном, по линии обобщения стандартного метода хаотических фаз (МХФ) или квазичастичного МХФ (КМХФ). Эти методы оперируют со средним (самосогласованным) полем ядра, эффективным взаимодействием нуклонов находящихся в этом поле, и учитывают только одночастично-однодырочные ( $1p1h$ )-конфигурации. Развитие шло в двух параллельных направлениях: развитие метода квантовых функций Грина (ФГ) с включением самосогласования [1; 2] и учет квазичастичного взаимодействия (связи с фононами) [3; 4]. Под фононами подразумеваются низколежащие коллективные состояния ядер, которые на первом этапе описываются в рамках МХФ или (для ядер со спариванием) КМХФ.

Одной из важнейших причин такого активного развития было быстрое и опережающее развитие методов экспериментальной ядерной физики. После «ренессанса физики гигантских резонансов» в 70-80-х годах, которые были описаны в фундаментальной монографии [5], появились новые области интересов – пигми- и гигантские мультипольные резонансы (ПДР и ГМР).

В дополнение к этому появились также новые экспериментальные методы по изучению тонкой структуры как (в особенности) ПДР, так и ГМР [6–8]. Эти результаты остро поставили вопрос о необходимости полной и точной информации о характеристиках уровней в этой огромной энергетической области фактически без использования параметров сглаживания. Здесь важны любые детали теории, приводящие к перераспределению силы. Отсутствует также полное объяснение загиба радиационной силовой функции в области 1–3 МэВ [8]

Другой важнейшей причиной такого активного развития теории было бурное развитие астрофизических направлений в ядерной физике, а также дополнительные потребности в ядерных данных. Оказалось, что информация о свойствах ядер и характеристиках ядерных реакций требуется практически для всех нуклидов (примерно 6–8 тыс.), огромное большинство из которых нестабильны. Для таких ядер почти отсутствуют экспериментальные данные, необходимые для получения феноменологических параметров. Поэтому появилась настоятельная необходимость в развитии микроскопических подходов с

большой предсказательной силой, которые, по крайней мере, исключили бы существование двух наборов параметров и свели бы их к одному. Такой набор позволил бы рассчитывать и среднее поле ядра, и эффективное взаимодействие, т.е. характеристики как основного, так и возбужденных состояний, по крайней мере, в области физики низких энергий, то есть до 30-40 МэВ, или области пигми- и гигантских резонансов. Такая необходимость была реализована в результате развития самосогласованных микроскопических подходов [9–11] с использованием энергетического функционала плотности (ЭФП) Скирма [12] или функционала Фаянса [13; 14]. Одним из вариантов вышеуказанных подходов является самосогласованная теория конечных ферми-систем (ТКФС) [15] с использованием функционала Фаянса, который был разработан в группе Курчатовского Института и уже получил международное признание [16].

Кроме самосогласования, для надежного предсказания свойств ядер на современном уровне микроскопической теории ядра необходимо также учитывать квазичастично-фононное взаимодействие (КФВ). Общая причина состоит в том, что амплитуда рождения наиболее коллективных низколежащих фононов достаточно велика – соответствующий безразмерный параметр в среднем на порядок меньше единицы для магических и полу-магических ядер, а для ядер с обоими незамкнутыми оболочками он даже больше единицы.

Фактически еще ранее указанного направления с самосогласованием или параллельно с ним развивались и микроскопические подходы, учитывающие КФВ в рамках несамосогласованной квазичастично-фононной модели (КФМ) [4; 17], и в рамках формализма функций Грина (ФГ) [1; 18]. Если в КФМ единообразно учитывалось КФВ для всей области физики низких энергий, то, например, в [13; 19] изучались характеристики только основного и низколежащих однофононных состояний, ангармонические эффекты с участием 2–3 фононов, а в области энергий пигми- и гигантского резонанса использовалось обобщение стандартной ТКФС [1] на случай учета КФВ в частично-дырочных пропагаторах теории ТКФС [20; 21].

Следующим шагом, направленным на улучшение описания имеющихся экспериментальных данных и предсказание новых физических результатов, связанных с учетом КФВ, прежде всего, для нестабильных ядер, было развитие и применение самосогласованных подходов для задач, требующих включения КФВ. Здесь, в отличие от самосогласованной КФМ [22; 23], продолжает пока существовать некоторый разрыв между подходами в области описания основного

и низколежащих возбужденных состояний [15], с одной стороны, и подходом в области (ПДР и ГМР) [24–26] с другой стороны. Обобщение этого подхода на самосогласование и учет КФВ [2; 15; 19] привело к дальнейшему успешному развитию ТКФС, т.е. созданию самосогласованной ТКФС, и может считаться вторым этапом развития ТКФС. Однако в этих работах рассматривались только характеристики основного и первых возбужденных коллективных состояний. За пределами самосогласованной ТКФС осталась обширная область энергий ПДР и ГМР. Кроме того, большая область ангармонических эффектов, которые количественно изучались в ядерной физике низких энергий, т.е. при энергиях возбуждения до 30-40 МэВ также требует применения развитых методов самосогласованной ТКФС, например, более внимательному анализу трех- и четырех-квазичастичных корреляций в основном состоянии.

По нашему мнению, перспективным подходом для решения этих групп задач является использование метода ФГ и дальнейшее развитие самосогласованной ТКФС. В работе последовательно используется современный формализм ядерной теории многих тел и метод квантовых функций Грина. Исходной базой для развития была самосогласованная теория конечных ферми-систем и ее основное понятие – вершина (эффективное поле), которая описывает поляризуемость ядра по действию внешнего поля. Рассмотрены ангармонические эффекты второго и третьего порядков и обобщение уравнения для вершины на область энергий пигми- и гигантских мультипольных резонансов.

**Целью** данной работы является развитие и применение самосогласованной ТКФС для анализа ангармонических эффектов 2-го и 3-го порядка в ядрах, формулировка и анализ обобщенного уравнения для основной величины ТКФС – вершины в области энергий ПДР и ГМР.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Рассчитать  $E1$ - переходы между возбужденными состояниями в магических и полу-магических ядрах, и такие же  $E2$ -переходы в магических ядрах, сравнить с имеющимися экспериментальными данными, выяснить роль трехквазичастичных корреляций в основном состоянии (КОС) в этих переходах
2. Изучить специфику спаривания в этих задачах
3. Изучить принципиальную возможность оценки правильности описания фононов в рамках МХФ путем добавления связи фонона с тэдполом

4. Обобщить квантовую теорию ангармонических эффектов 3-го порядка на ядра со спариванием, изучить возможность появления четырехквaziчастичные КОС
5. Сформулировать и проанализировать варианты обобщенного уравнения для вершины в области энергий ПДР и ГМР с последовательным учетом  $g^2$ -поправок к вершине
6. Выяснить возможность появления и выполнить первичный анализ динамических эффектов тэдпола и других новых эффектов в этих вариантах

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Показано, что величина приведенных вероятностей  $E2$ -переходов между низколежащими однофононными состояниями в магических ядрах и  $E1$ -переходов между низколежащими однофононными состояниями как в магических, так и в полумагических ядрах определяется суммой ( $E2$ ) или разностью ( $E1$ ) двух количественно больших эффектов — поляризуемостью ядра и трехквaziчастичными корреляциями в основном состоянии. Получено хорошее согласие с имеющимися экспериментальными данными [27; 28]
2. В рамках квантовой теории многих тел выполнен общий анализ ангармонических эффектов 3-го порядка как для магических ядер, так и для ядер со спариванием и предсказано существование новых эффектов [29–31]
3. Выполнено последовательное обобщение самосогласованной теории конечных ферми систем на область энергий пигми- и гигантских резонансов с целью вывода обобщенного уравнения для вершины, которая определяет поляризуемость ядра. Получены три варианта такого уравнения, которые, кроме  $1p1h$ -конфигураций, содержат либо только сложные  $1p1h \otimes$  фонон, либо  $(1p1h \otimes + \text{двухфононные})$  – конфигурации. [32–34]

**Научная новизна:**

1. Впервые показано что для задач о вероятностях  $E1$ - и  $E2$ -переходов между низколежащими однофононными состояниями в магических и в полу-магических ядрах нельзя объяснить экспериментальные данные без учета эффектов трехквaziчастичных корреляций в основном состоянии

2. Получена универсальная формула для приведенного матричного элемента перехода между низколежащими однофононными состояниями как для магических ядер, так и для ядер со спариванием, которая описывает и статические электромагнитные моменты фононов, и переходы между однофононными состояниями. Расчеты показали, что специфика вышеуказанной задачи в ядрах со спариванием состоит в том, что слагаемые с аномальными функциями Грина составляют около половины величины полной амплитуды перехода
3. Предсказано существование новых эффектов, в частности, четырехквaziчастичных корреляций в основном состоянии и совместного эффекта тэдпола и трехквaziчастичных корреляций в основном состоянии
4. Впервые в рамках метода функций Грина выполнено обобщение квантовой теории ангармонических эффектов 3-го порядка на ядра со спариванием, рассмотрен частный случай перехода между двух-фононным и одно-фононным состояниями, получены и проанализированы четырехквaziчастичные корреляции в основном состоянии
5. В области энергий пигми- и гигантских резонансов выведены и проанализированы новые уравнения для вершины, которые содержат предыдущие частные случаи и новые эффекты: 1). Динамические эффекты тэдпола 2). Эффекты изменения эффективного взаимодействия в поле фонона. 3). Новые корреляции в основном состоянии 4). Двух-фононные- конфигурации.

**Практическая значимость** Развитые методы необходимы для объяснения имеющихся и будущих экспериментальных данных для основного состояния и возбуждений в ядрах в области энергии отделения нейтрона, а также для объяснения новых данных и тонкой структуры в области энергий ПДР и ГДР. Метод предоставляет базу для последовательного микроскопического расчета характеристик ядер, необходимых для развития астрофизики и атомной энергетики.

**Достоверность** Использовался последовательный самосогласованный микроскопический подход на основе теории ЭФП, с единым для всех ядер (кроме легких) хорошо известным набором параметров Фаянса DF3-а, подтвержденный многочисленными расчетами других авторов. Полученные в рамках данной работы величины хорошо описывают экспериментальные данные и согласуются с частными случаями известных микроскопических подходов.



**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на конференциях:

1. «Results of the microscopic self-consistent theory of quasiparticle-phonon interaction in nuclei» - Международная научная конференция по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра (ЯДРО-2018), Воронеж.

2. «Second- and third - order anharmonic effects within the quantum many-body theory» - 15-ый Международный семинар по электромагнитным взаимодействиям ядер (ЕМИН-2018), Москва.

3. «Anharmonic effects in theory of finite fermi- systems» - Международный семинар "Infinite and Finite Nuclear Matter"(INFINUM-2019) (Дубна).

4. «Self-consistent calculations of transitions between the first one-phonon 2+ and 3- states in Sn isotopes» - LXX Международная конференция «Ядро–2020. Ядерная физика и физика элементарных частиц. Ядерно-физические технологии» (NUCLEUS-2020), Санкт-Петербург.

5. «On the microscopic pygmy- and giant resonances theory accounting for complex  $1p1h \otimes$  phonon configurations» - LXX Международная конференция «Ядро–2020. Ядерная физика и физика элементарных частиц. Ядерно-физические технологии» (NUCLEUS-2020), Санкт-Петербург.

6. «The role of spin-spin forces in calculations of transition probabilities between the first one-phonon states» - LXXI Международная конференция «Ядро–2021. Ядерная физика и физика элементарных частиц. Ядерно-физические технологии» (NUCLEUS-2021), Санкт-Петербург.

7. «Microscopic theory of pygmy- and giant resonances: accounting for complex  $1p1h \otimes$  phonon and two-phonon configurations» - LXXI Международная конференция «Ядро–2021. Ядерная физика и физика элементарных частиц. Ядерно-физические технологии» (NUCLEUS-2020), Санкт-Петербург.

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие в разработке теоретического подхода. Написал ряд программ для расчета вероятностей ЕL-переходов, выполнял расчеты и интерпретировал результаты, участвовал в написании статей по полученным результатам.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях [27–40], 9 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [27–35], 5 – в тезисах докладов [36–40].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 5 приложений. Полный объем диссертации составляет 129 страниц,

включая 28 рисунков и 7 таблиц. Список литературы содержит 96 наименований.

## Глава 1. Основные соотношения самосогласованной ТКФС

Первая глава содержит изложение основных уравнений ТКФС и особенностей метода ЭФП Фаянса, использовавшихся для вывода всех основных формул и расчета характеристик электромагнитных моментов. Очень часто мы символически записываем наши формулы, большая часть которых представляется в виде диаграмм Фейнмана, так что окончательные формулы могут быть легко получены.

В разделе 1.1 описаны основные формулы стандартной ТКФС, описывающей ядро в рамках квантовой теории многих тел в формализме функций Грина. Приводится используемый параметр малости – обезразмеренный квадрат амплитуды рождения фонона. В разделе 1.2 изложен метод Ходеля для описания амплитуды перехода между возбужденными состояниями для ядер без спаривания, а также изложены правила графического описания процессов на языке диаграмм Фейнмана. В разделе 1.2 сформулирован метод «тэдола», описывающий вклад КФВ и позволяющий в рамках  $g^2$ -приближения учесть последовательно все  $g^2$ -члены в расчете массового оператора (здесь и далее  $g$ -обезразмеренная амплитуда рождения фонона).

В разделе 1.3 приведено описание метода ЭФП Фаянса, который используется во всех решаемых нами задачах для построения одночастичного базиса и расчетов эффективного ядерного взаимодействия. Представлен набор параметров функционала DF3-а, выбор данного набора обоснован большим количеством работ, показавших высокую точность описания в близких по механизмам задачах, таких как вычисление зарядовых радиусов и моментов ядер. Приведено краткое описание расчетов параметров среднего поля и амплитуд рождения фононов в рамках последовательного ТКФС подхода. Применяемый нами подход, основанный на методе ЭФП и последовательном решении уравнений ТКФС с использованием условий самосогласования между средним полем и эффективным  $pp$ - и  $ph$ -взаимодействием обеспечивает хорошую точность описания эксперимента.

## 1.1 Основные соотношения стандартной ТКФС

Часто мы символически записываем наши формулы, большая часть которых представляется в виде диаграмм Фейнмана, так что окончательные формулы могут быть легко получены.

В стандартной ТКФС основной величиной в задачах, связанных с взаимодействием ядра и внешнего поля  $V_0(\omega)$  с энергией  $\omega$ , является эффективное поле (вершина)  $V$ , описывающее ядерную поляризуемость и удовлетворяющее уравнению в символической форме (для ядер без спаривания) [1; 2]:

$$V = e_q V^0(\omega) + FA(\omega)V(\omega), \quad (1.1)$$

где  $e_q$  – локальный заряд, а все члены уравнения представляют собой матрицы

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_0 = \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F} & \mathcal{F}^{\omega\xi} & \mathcal{F}^{\omega\xi} \\ \mathcal{F}^{\xi\omega} & \mathcal{F}^{\xi} & \mathcal{F}^{\xi\omega} \\ \mathcal{F}^{\xi\omega} & \mathcal{F}^{\xi\omega} & \mathcal{F}^{\xi} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$\hat{A}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\omega) & \mathcal{M}_1(\omega) & \mathcal{M}_2(\omega) \\ \mathcal{O}(\omega) & -\mathcal{N}_1(\omega) & \mathcal{N}_2(\omega) \\ \mathcal{O}(-\omega) & -\mathcal{N}_1(-\omega) & -\mathcal{N}_2(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

а  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}_1$  и т.д. обозначают интегралы по  $\varepsilon$  от произведений различных комбинаций функции Грина [1]. В наших работах мы обычно пренебрегаем изменением полей  $d^{(1)}$  и  $d^{(2)}$ .

Обычный поляризационный эффективный заряд (не путать с кинематическим  $E1$ - зарядом  $eN/A$  для протона и  $-eZ/A$  для нейтрона) определяется очень просто и естественно как  $V/e_q V_0$  [41]. Соответствующий расчет для магических и околomagических ядер показал, что квадрупольный эффективный заряд близок к 2 для протонов и 1 для нейтронов [41].

Для задач без спаривания в уравнении (1.1) пропагатор есть интеграл от двух одночастичных ФГ

$$A_{12}(\omega) = \int G_1(\varepsilon)G_2(\varepsilon - \omega)\frac{d\varepsilon}{2\pi i}, \quad (1.5)$$

где

$$G_1(\varepsilon) = \frac{1 - n_1}{\varepsilon - \varepsilon_1 + i\delta} + \frac{n_1}{\varepsilon + \varepsilon_1 - i\delta}, \quad (1.6)$$

Полная амплитуда частично-дырочного взаимодействия  $\Gamma$  удовлетворяет уравнению [1]

$$\Gamma = F + F\Lambda\Gamma. \quad (1.7)$$

Амплитуда рождения  $g$  фонона в ТКФС удовлетворяет однородному уравнению (в символическом виде) [1]:

$$g = FAg. \quad (1.8)$$

В уравнениях (1.1), (1.7) и (1.8)  $F$  – эффективное взаимодействие Ландау–Мигдала (ЛМ), которое в самосогласованной ТКФС [15] определяется как вторая вариационная производная по плотности от функционала,  $A$  – частично-дырочный пропагатор, представляющий собой интеграл от двух ФГ. Эти уравнения соответствуют обычному МХФ для магических ядер, сформулированному на языке ФГ. Нижние индексы означают набор одночастичных квантовых чисел  $1 \equiv \lambda_1 \equiv (n_1, j_1, l_1, m_1)$ . Для ядер со спариванием необходимо использовать аномальные функции Грина:

$$G_1(\varepsilon) = G_1^h(-\varepsilon) = \frac{u_1^2}{\varepsilon - E_1 + i\delta} + \frac{v_1^2}{\varepsilon + E_1 - i\delta},$$

$$F_1^{(1)}(\varepsilon) = F_1^{(2)}(\varepsilon) = -\frac{\Delta_1}{2E_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon - E_1 + i\delta} + \frac{1}{\varepsilon + E_1 - i\delta} \right], \quad (1.9)$$

где

$$E_1 = \sqrt{(\varepsilon_1 - \mu)^2 + \Delta_1^2}, \quad u_1^2 = 1 - v_1^2 = (E_1 + \varepsilon_1 - \mu)/2E_1. \quad (1.10)$$

При этом  $\mathcal{F}$  в (1.3) – обычная ЛМ-амплитуда, в случае применения метода энергетического функционала плотности (ЭФП) описываемая второй вариационной производной ЭПФ по плотности

$$F^{ph} \equiv F = \frac{d^2\mathcal{E}}{d\rho^2}; F^{pp} \equiv F^\xi = \frac{d^2\mathcal{E}}{d\nu^2}; \quad (1.11)$$

а  $F^{ph}$  – эффективное взаимодействие в канале частица-дырка,  $F^{pp}$  – эффективное взаимодействие в канале частица-частица.

## 1.2 Метод вариации в поле фонона, тэдпол, амплитуда рождения двух фононов

Мы используем факт существования малого параметра, т.н.  $g^2$ -приближение:

$$\alpha = \frac{|\langle 1||g_L||2 \rangle|^2}{(2j_1 + 1)\omega_L^2} \ll 1 \quad (1.12)$$

для магических [42] и полумагических ядер, где  $\langle 1||g_L||2 \rangle$  - приведенный матричный элемент амплитуды рождения фонона  $L$  с энергией  $\omega_L$ .

КФВ-поправка к массовому оператору показана на рис. 1.1. Первая диаграмма – полюсная. Из соображений трансляционной инвариантности для дипольного фонона при нулевой энергии (например, равенство нулю одночастичной энергии при сдвиге ядра) в работах [13; 15] была введена вторая поправка, и в [43] была названа фононным тэдполом. Поправка к массовому оператору имеет вид:

$$\delta\Sigma = gDGg + \delta\Sigma^{tad}, \quad (1.13)$$

где вторая поправка есть фононный тэдпол

$$\delta\Sigma^{tad} = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \delta_L g_L D_L(\omega). \quad (1.14)$$

В работах [15; 44] был введен и широко использовался метод вариации физической величины в поле фонона. Такой метод позволяет последовательно изучить как меняется все уравнение, например, уравнение для вершины  $V$  (1.1) или для амплитуды  $g$  (1.8) под влиянием фононного поля. Тем самым включаются изменения всех (а не отдельных, хотя, может быть, и самых важных) составляющих уравнения в этом поле.

Фононная D-функция появляется в (1.14) после соединения двух волнистых (фононных) концов в выражении. Эта операция отвечает усреднению двух бозонных (фононных) операторов  $B_L^+ B_L$  по основному состоянию [19]. Величина  $\delta_L g_L$ , вообще говоря, представляет собой вариацию амплитуды рождения фонона  $g_1$  с моментом  $L_1$  в поле другого фонона  $g_2$  с моментом  $L_2$ , но в фононный тэдпол, по определению, входит  $g_{12}$  с  $L_1 = L_2 = L$ . Уравнение для амплитуды рождения двух фононов  $g_{12}$  (это название впервые, по-видимому, ввел С.А. Фаянс [45]) получается варьированием уравнения (1.8) для амплитуды рождения

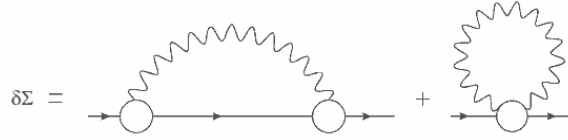


Рисунок 1.1 —  $g^2$ -поправки к массовому оператору в магических ядрах. Кружки с одной волнистой линией в первом слагаемом — амплитуды рождения фонона  $g$ . Волнистые линии — ФГ фонона  $D$ . Сплошные линии — одночастичные ФГ. Второе слагаемое — фононный тэдпол.

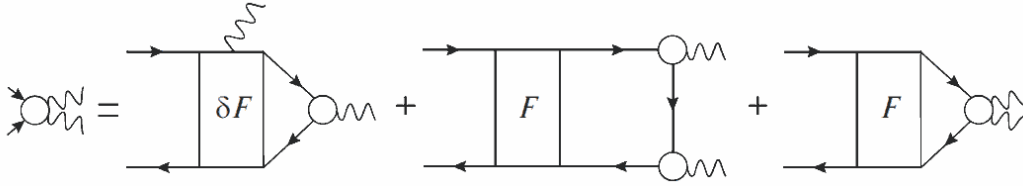


Рисунок 1.2 — Уравнение 1.15 в диаграммном виде.

фонона  $g_1$  в поле фонона  $g_2$ :

$$g_{12} = \delta_1 F A g_2 + F(\delta_1 A) g_2 + F A g_{12}, \quad (1.15)$$

где

$$\delta_1 A = G g_1 G G + G G g_1 G. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.15), рис. 1.2 есть интегральное уравнение с двумя свободными членами. Оно решалось только в координатном представлении в указанных работах группы Курчатовского института. В остальных работах группы использовалась реалистическая оценка для величины  $g_{11}$ , определяющей тэдпол.

$$\delta_L F = \frac{\delta F(\rho)}{\delta \rho} \delta \rho_L, \quad (1.17)$$

где

$$\delta \rho_L = A g_L \quad (1.18)$$

— переходная плотность возбуждения L-фонона.

### 1.3 Метод энергетического функционала плотности. Функционал Фаянса.

Метод ЭФП основан на теореме Хоенберга–Кона [46], утверждающей, что энергия  $E_0$  основного состояния любой квантовой ферми-системы является

функционалом ее плотности  $\rho(r)$ . Сама по себе теорема ничего не говорит о виде этого функционала, и различные варианты ЭФП Скирма или Гони можно рассматривать как более или менее удачные “анзацы”. В последние годы для учета спаривания нуклонов в сверхтекучих ядрах в рамках метода Хартри-Фока (ХФ), как правило, вместо доминировавшего в прошлом веке метода Бардина-Купера-Шриффера (ХФ + БКШ) используется более последовательный метод Боголюбова. Соответственно, подход стал называться ХФБ.

Важный шаг был сделан группой Фаянса [13], распространившей метод ЭФП на сверхтекучие системы. Обобщенный ЭФП зависит равноправным образом от нормальной и аномальной плотностей.

Энергия основного состояния сверхтекучего ядра рассматривается как функционал нормальной и аномальной плотностей:

$$E_0 = \int \varepsilon[\rho_n(\mathbf{r}), \rho_p(\mathbf{r}) \mathbf{v}_n(\mathbf{r}) \mathbf{v}_p(\mathbf{r})] d^3r \quad (1.19)$$

Нормальная часть ЭФП, по определению, зависит только от нормальной плотности  $\rho$ . В [13; 47–49] была выбрана довольно сложная форма этой зависимости:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{a\rho^2}{2} \frac{1 + \alpha\rho^\sigma}{1 + \gamma\rho}, \quad (1.20)$$

где  $\sigma$  и  $\gamma$  – параметры. Соответствующий член ЭФП Скирма получается из (1.20) при  $\gamma = 0$ . Дробнолинейная функция (1.20) качественно воспроизводит плотностную зависимость эффективного гамильтониана  $H_q$  из работы [50]. Таким образом, знаменатель этого выражения в скрытой форме отражает эффекты энергетической зависимости, присущие самосогласованной ТКФС. Использование голей нуклонной массы,  $m^* = m$ , – другая особенность функционала Фаянса, которая также согласуется с результатами самосогласованной ТКФС. Так что ЭФП Фаянса можно рассматривать как версию ЭФП самосогласованной ТКФС. Функционал Фаянса, в отличие от скирмовского, но в согласии с ЭФП Гони, имеет конечный радиус. А именно, в нем используются эффективные силы с юкавской радиальной зависимостью.

Нормальная часть ЭФП  $\mathcal{E}_{norm}(\rho)$  содержит центральную, спин-орбитальную и эффективную тензорную компоненту, а также кулоновский член для протонов. Главный, центральный член энергии  $\mathcal{E}_{norm}$  соответствует конечному радиусу сил с юкавской радиальной зависимостью. Объемная часть ЭФП,  $\mathcal{E}^v(\rho)$ , взята в виде дробно-линейной функции плотностей  $\rho_+ = \rho_n + \rho_p$  и



$$\rho_- = \rho_n - \rho_p:$$

$$\mathcal{E}^v(\rho) = C_o[a_+^v \frac{\rho_+^2}{2} f_+^v(x) + a_-^v \frac{\rho_-^2}{2} f_-^v(x)], \quad (1.21)$$

где

$$f_{\pm}^v(x) = \frac{1 - h_{1\pm}^v x}{1 + h_{2\pm}^v x}, \quad (1.22)$$

Здесь  $x = \rho_+/(2\rho_0)$  – безразмерная ядерная плотность ( $\rho_0$  – плотность нуклонов одного сорта в равновесной симметричной ядерной материи). Чтобы представить поверхностную энергию в более компактном виде, в [47] был введен оператор "тильда" для обозначения следующей операции свертки

$$\widetilde{\varphi}(r) = \int D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.23)$$

где

$$D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi r_c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{r_c} - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right). \quad (1.24)$$

Тогда получаем

$$\mathcal{E}^s(\rho) = C_o[a_+^s (\rho_+ f_+^s) (\widetilde{f_+^s \rho_+}) + a_-^s (\rho_- f_-^s) (\widetilde{f_-^s \rho_-})], \quad (1.25)$$

где

$$f_{\pm}^s(x) = \frac{1}{1 + h_{\pm}^s x} \quad (1.26)$$

Все параметры здесь безразмерные.

Спин-орбитальное взаимодействие, генерирующее спин-орбитальное среднее поле, имеет вид

$$\mathcal{F}_{sl} = C_0 r_0^2 (k + k' \tau_1 \tau_2) \times [\nabla_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2), \quad (1.27)$$

где фактор  $r_0^2$  введен, чтобы сделать спин-орбитальные константы  $k$ ,  $k'$  безразмерными. Он может быть выражен через равновесную плотность:  $r_0^2 = (3/(8\pi\rho_0))^{2/3}$ .

В ядрах с частично заполненными спин-орбитальными уровнями существует так называемая спин-орбитальная плотность:

$$\rho_{sl}^{\tau}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} \mathbf{n}_{\lambda}^{\tau} \langle \boldsymbol{\varphi}_{\lambda}^{\tau} * (\mathbf{r}) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}) \boldsymbol{\varphi}_{\lambda}^{\tau}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.28)$$

где  $\tau = n, p$  – изотопический индекс и предполагается усреднение по спиновым переменным. Как хорошо известно (см., например, [15]), в спин-орбитальном

среднем поле появляется новый член, пропорциональный тензорным силам и первой гармонике  $\hat{g}_1$  спиновой ЛМ-амплитуды. Мы собираем эти члены в эффективную тензорную силу или эффективную первую спиновую гармонику

$$\mathcal{F}_1^s = C_0 r_0^2 (g_1 + g'_1 \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2) \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2), \quad (1.29)$$

Аномальная часть ЭФП Фаянса имеет вид [49]

$$\mathcal{E}_{an}(\mathbf{r}) = \sum_{\tau} \mathcal{F}^{\xi, \tau \tau}(\mathbf{r}; [\rho]) |\mathbf{v}^{\tau}(\mathbf{r})|^2, \quad (1.30)$$

где эффективное спаривательное взаимодействие есть

$$\mathcal{F}^{\xi} = C_0 f^{\xi} = C_0 (f_{ex}^{\xi} + h^{\xi} x^{2/3} + f_{\nabla}^{\xi} r_0^2 (\nabla x)^2) \quad (1.31)$$

Первые два члена обычны для ТКФС [51; 52] или для метода Скирма–ХФБ [53]. Третий член 1.31, специфически поверхностный, был введен в [54].

Оптимальный набор параметров для описания масс и радиусов ядер от кальция до свинца [47; 49] был назван DF3. В работе [14] ЭФП Фаянса был применен к ядрам тяжелее свинца, включая сверхтяжелые ядра. Оказалось, что для правильного их описания необходима небольшая модификация функционала DF3, касающаяся только зависящих от спина компонент — спин-орбитальных и эффективных тензорных сил. Модифицированный функционал DF3-а оказался успешным и в более легких ядрах. Эти параметры приведены в таблице 1.

Таблица 1 — Параметры функционала Фаянса DF3-а.

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$a_+^y$	-6.575	$k$	0.190
$a_-^y$	-5.523	$k'$	0.077
$h_{1+}^y$	0.163	$g_1$	0
$h_{2+}^y$	0.725	$g_1'$	-0.308
$h_{1-}^y$	0	$f_{ex}^\xi$	-1.05
$h_{2-}^y$	3.0	$h^\xi$	0.92
$a_+^s$	-11.1	$f_\delta^\xi$	0
$a_-^s$	-4.10	$r_c, \text{ фМ}$	0,35
$h_+^s$	0.31	$C_0, \text{ МэВ} \cdot \text{фМ}^3$	300
$h_-^s$	0		

## Глава 2. Ангармонические эффекты второго и третьего порядков по амплитуде рождения фонона в магических и полумагических ядрах

В настоящей главе приведены формулы для расчетов амплитуды перехода в задачах с участием двух и трех фононов для магических и полумагических ядер на основе самосогласованной ТКФС. Основные соотношения были представлены в разделе 1.1. Получены формулы для вероятностей переходов между однофононными состояниями (для случая задачи с двумя фононами) в магических (раздел 2.2) и полумагических (раздел 2.3) ядрах, и между двухфононным и однофононным состояниями (для случая с тремя фононами) (раздел 2.4). Приведены расчеты переходов между однофононными состояниями для ряда магических и полумагических ядер. Расчеты проводились на основе метода ЭФП с параметрами функционала DF3-а, который разобран в разделе 1.3.

Глава 2 основана на работах автора [27–31; 35].

### 2.1 История вопроса.

Проблема учета КФВ для ядерной физики низких энергий начала изучаться еще в 50-60-х годах прошлого века. В частности, долгое время изучалась в рамках нескольких основных подходов: теории ядерных полей (ТЯП) [55–58] Бора-Моттельсона [42; 59], квазичастичной-фононной модели (КФМ) В.Г. Соловьева [3; 4]. В последние годы широкое развитие получили методы, использующие методы функций Грина и идеи ТКФС А.Б. Мигдала [1; 2] – самосогласованная ТКФС [15], приближение временной блокировки (ПВВ) [21], квазичастичное (КПВВ) [25] и релятивистское (РКПВВ) [60], а также подходы с ФГ в рамках формализма, основанного на уравнениях движения, см. например [61]. После первого издания книги А.Б. Мигдала в 1965 г. его подход, основанный на формализме квантовой теории многих тел, получил значительное развитие. Принципиальное значение ТКФС состояло во введении в теорию ядра очень плодотворного аппарата квантовых ФГ, позволяющего более просто и полно описывать квантовые процессы, и учесть большое число эффектов. Широкое использование метода диаграмм Фейнмана, привело к универсализа-

ции, сокращению и единообразию формализма теории. Важнейшие результаты следующего этапа – это развитие самосогласованного подхода, основанного на методе ЭФП Фаянса и развитие теории КФВ в рамках квантовой теории ангармонических эффектов.

Ангармонические эффекты, которые количественно изучались в ядерной физике низких энергий можно разделить на два вида: эффекты второго и третьего порядка по амплитуде рождения фонона  $g$ , если изучается относительно слабый ангармонизм, когда существует малый параметр по амплитуде  $g$ . Ангармонические поправки  $g^2$  и  $g^3$  уже изучались ранее для магических ядер и ядер со спариванием в рамках КФМ В.Г Соловьева [23; 62–65]. В части этих работ была получена необходимость учета примешивания двухфононной компоненты к низколежащим однофононным состояниям. Однако в рамках ТКФС этот вопрос обсуждался не столь подробно.

Сравнительный анализ  $E1$ - и  $E2$ -переходов между однофононными изоскалярными состояниями представляет интерес, прежде всего, из-за того, что  $E1$  и  $E2$  операторы перехода имеют соответственно изовекторную и изоскалярную природу. В случае, если микроскопическое описание этих двух различных по физической природе переходов будет достаточно хорошим, мы можем полагать что наш метод в целом хорошо описывает низколежащие состояния и переходы между ними. Ранее в рамках ТКФС осуществлялись только расчеты такого  $E2$ -перехода в ядре  $^{208}\text{Pb}$  [66] на основе несамосогласованной ТКФС [1]. Поэтому нашей первой главной задачей было выполнить аналогичный расчет в рамках самосогласованной ТКФС, обобщить метод на ядра со спариванием, исследовать роль новых эффектов и, кроме того, попытаться проверить в рамках нашего метода необходимость использования предположений о примешивании двухфононных компонент к низколежащим однофононным состояниям.

Второй главной задачей было применение развитого метода к описанию ангармонических эффектов третьего порядка. Сегодня имеется большое количество экспериментальных данных в этой области, в частности, вероятности переходов между двухфононным и однофононным возбужденными состояниями для полумагических ядер. Поэтому для этой характеристики было решено получить последовательное микроскопическое описание в рамках метода ФГ и исследовать новые четырехквaziчастичные КОС, которые появляются в этой задаче.

Последовательный метод изучения ангармонических эффектов в ядрах в рамках метода квантовых функций Грина был развит в работах В.А. Ходеля и Э.Е. Саперштейна [15; 44]. Этот метод активно применялся для расчетов характеристик основного и низколежащих состояний. Во всех этих случаях самосогласованная схема расчетов основывалась на методе энергетического функционала плотности Фаянса DF3-а. Для расчета фононов в них использовался обычный МХФ для магических ядер или квазичастичный МХФ для ядер со спариванием. В работах по расчету характеристик первых коллективных уровней ядра, сделанных в рамках данного метода, в частности, отмечалось большое значение трехквазичастичных корреляций в основном состоянии (КОС) [67; 68].

## 2.2 Состояния с двумя фононами. Вероятности переходов и результаты расчетов для ядер без спаривания

Как было сказано выше, ангармонические эффекты, которые количественно описываются в ядерной физике низких энергий можно разделить на эффекты второго и третьего порядка по амплитуде рождения фонона  $g$ , если предполагается относительно слабый ангармонизм, когда существует малый параметр  $g^2$  – безразмерный квадрат амплитуды рождения фонона 1.12.

В рамках данной главы мы будем учитывать только  $g^2$ -члены, т.е. все работы проводятся только в  $g^2$ -приближении.

В работе [44] был развита последовательная теория ангармонических эффектов, основанная на использовании вышеуказанного приближения. В частности, было получено, что матричный элемент, описывающий возбуждение внешним полем  $V^0$  двух фононов с моментами  $s$  и  $s'$ , каждый из которых описывается строго в рамках МХФ, определяется через вторую вариацию ФГ в поле этих фононов:

где в  $g^2$  приближении для вариации  $\Phi\Gamma$  мы можем написать:

$$M_{ss'} = \int V^0(r) \delta_{ss'}^{(2)} G(r, r, \epsilon) dr \frac{d\epsilon}{2\pi i}, \quad (2.1)$$

$$\delta_{ss'}^{(2)} G(\epsilon) = G(\epsilon) g_s G(\epsilon + \omega_s) g_{s'} G(\epsilon) + G(\epsilon) g_s G(\epsilon - \omega_s) g_{s'} G(\epsilon) + G(\epsilon) \delta_s g_{s'} G(\epsilon). \quad (2.2)$$

Здесь  $\delta_s g_{s'}$  – вариация амплитуды рождения фонона  $s$  во внешнем поле фонона  $s'$ . Таким образом, для амплитуды перехода в случае с двумя фононами  $M_{ss'}$  мы имеем следующее выражение (в символическом виде):

$$M_{ss'} = V^0 G g_s G g_{s'} + V^0 G G \delta_s g_{s'}. \quad (2.3)$$

Это выражение может быть преобразовано к более простому виду (см. например [69]):

$$M_{ss'} = V G G g_s g_{s'} + V G G \delta_s F G g_{s'}, \quad (2.4)$$

которое представлено на рис. 2.1 (как обычно, при написании формул в символическом виде мы опускаем графики, "идущие назад"). В работе [67] было показано, что учет  $\delta_s F$  оказывает незначительное влияние на величину амплитуды перехода. Потому в этой главе и далее мы будем опускать этот член. Тогда в явном виде формула (2.4) может быть переписана

$$M_{ss'} = M_{ss'}^{(1)} + M_{ss'}^{(2)} = \Sigma_{123} [V_{12} (g_{31}^s)^* g_{23}^{s'} A_{123}^{(1)} + V_{12} g_{31}^{s'} (g_{23}^s)^* A_{123}^{(2)}], \quad (2.5)$$

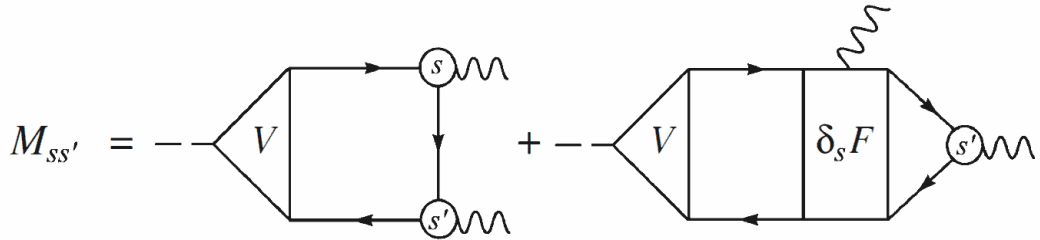


Рисунок 2.1 – Матричный элемент амплитуды перехода для случая двух фононов  $M_{ss'}$  в магическом ядре.  $V$  – вершина, пунктир – внешнее поле с энергией  $\omega$ ,  $s$  и  $s'$  – фононы, стрелками обозначены одночастичные функции Грина.

Здесь и далее для обозначения матричных элементов используется упрощенная запись  $\langle 1|V|2 \rangle \equiv V_{12}$ ,  $M_{ss'}^{(2)}$  – набор графиков, с развернутыми в обратном рис. 2.1 направлении стрелками,  $V_{12}$  матричный элемент для вершины, определяемый уравнением ТКФС (1.1),  $g_{31}^s$  и  $g_{23}^{s'}$  амплитуды рождения

фононов, определяемые уравнением (1.8), а  $A_{123}^{(1)}$  представляет собой пропагатор – интеграл от трех ФГ:

$$A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) = \int G_1(\varepsilon)G_2(\varepsilon + \omega)G_3(\varepsilon + \omega_s)d\varepsilon. \quad (2.6)$$

Подробности вычисления интегралов и приведения угловых переменных представлены в Приложении А. После проведения всех необходимых манипуляций получаем следующую формулу для приведенной вероятности перехода между однофононными состояниями  $I_s \rightarrow I_{s'}$  с энергией  $\omega = \omega_{s'} - \omega_s$ :

$$B(EL) = \frac{1}{2I_s + 1} | \langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle |^2, \quad (2.7)$$

где

$$\langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle = \Sigma_{123} \left\{ \begin{matrix} I_s & I_{s'} & L \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} V_{12} g_{31}^s g_{23}^{s'} [A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) + A_{213}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s)], \quad (2.8)$$

а сумма пропагаторов описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) + A_{213}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s) = & \quad (2.9) \\ = & [(1 - n_1)(1 - n_2)n_3 - n_1n_2(1 - n_3)] \times \\ & \left[ \frac{1}{(\varepsilon_{32} - \omega_{s'})(\varepsilon_{31} - \omega_s)} + \frac{1}{(\varepsilon_{32} + \omega_{s'})(\varepsilon_{31} + \omega_s)} \right] \\ & + [n_1(1 - n_2)(1 - n_3) - (1 - n_1)n_2n_3] \times \\ & \left[ \frac{1}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{13} - \omega_s)} + \frac{1}{(\varepsilon_{12} + \omega)(\varepsilon_{13} + \omega_s)} \right] \\ & + [(1 - n_1)n_2(1 - n_3) - n_1(1 - n_2)n_3] \times \\ & \left[ \frac{1}{(\varepsilon_{21} - \omega)(\varepsilon_{23} + \omega_{s'})} + \frac{1}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{23} - \omega_{s'})} \right]. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  разность энергий уровней одночастичного базиса, нижние индексы представляют собой наборы квантовых чисел  $1 = (n_1, j_1, l_1)$ . Данная формула очень близка к результатам, полученным в рамках КФМ модели в работе [62], но содержит два дополнительных члена с знаменателями  $(\varepsilon_{21}^2 - \omega^2)$ . Эти слагаемые представляют собой новый (для динамической задачи, т.е.  $\omega \neq$



0) эффект – Трехквазичастичные Корреляции в Основном Состоянии (КОС), названные по аналогии с двухквазичастичными корреляциями, возникающими в рамках классического МХФ. В методе ФГ разнообразные КОС появляются из-за наличия двух слагаемых в одночастичной и однофононной функциях Грина, например, в одночастичной ФГ:

$$G_1(\varepsilon) \equiv G_1^p + G_1^h = \frac{(1 - n_1)}{\varepsilon - \varepsilon_1 + i\gamma} + \frac{n_1}{\varepsilon - \varepsilon_1 - i\gamma} \quad (2.11)$$

Выражение для пропагатора  $A_{123}(\omega) = \int (G_1^p + G_1^h)(G_2^p + G_2^h)(G_3^p + G_3^h)d\varepsilon$  содержит сумму из 6 интегралов. При этом первая строка полного выражения для пропагатора характерна тем, что частицы 1 и 2 в вершине  $V_{12}$  обе находятся либо ниже либо выше поверхности ферми (эта часть получается в КФМ). Члены, входящие в КОС (третья и четвертая строки в формуле (2.9), содержащие члены со знаменателем  $(\varepsilon_{12}^2 - \omega^2)$ , т.е. включающими энергию поля  $V(\omega)$ ), содержат комбинацию частиц 1 и 2, находящихся по разные стороны от поверхности Ферми. При этом, в отличие от двухквазичастичных КОС в RPA методе, трехквазичастичные КОС, как оказалось, обеспечивают около 50% результирующей величины амплитуды перехода.

Расчеты были проведены для магических изотопов олова и свинца и выполнен сравнительный анализ  $E1$ - и  $E2$ -переходов. Эта задача представляет интерес, прежде всего, из-за того, что  $E1$  и  $E2$  операторы перехода имеют соответственно изовекторную и изоскалярную природу. Поэтому такие  $E1$ -переходы запрещены, а  $E2$ -переходы разрешены в модели идеальных бозонов. Экспериментально это подтверждается тем, что вероятности таких  $E1$ -переходов на несколько порядков величины меньше, чем вероятности  $E2$ -переходов [70]. Первый расчет такого  $E2$ -перехода в ядре  $^{208}Pb$  был выполнен в работе [66] на основе несамосогласованной теории конечных ферми-систем (ТКФС) [1]. Наша цель – выполнить аналогичный расчет в рамках самосогласованной ТКФС [15]. Отметим, что задача расчета вероятностей  $E1$ -переходов между низколежащими однофононными состояниями была довольно подробно рассмотрена в рамках несамогласованной квазичастично-фононной модели на примере трех ядер со спариванием:  $^{120}Sn$ ,  $^{144}Sm$  и  $^{144}Nd$  [62]. Удовлетворительное согласие с экспериментом было получено благодаря добавлению смешивания между одно- и двухфононными компонентами волновых функций изучаемых низколежащих состояний, т.е. за счет выхода за рамки предположения об однофононности изучаемых уровней  $2_1^+$  и  $3_1^-$ . При этом, упомянутые выше трехквазичастичные КОС

в [62] не учитывались. По этим причинам представляет большой интерес рассмотреть задачу расчета  $E1$ -и  $E2$ -переходов в рамках последовательной теории ангармонических эффектов, которая была сформулирована в [15] и в ее самосогласованной версии была использована в [67] для статической задачи расчета квадрупольных моментов в первом  $2_1^+$ -состоянии магических и полумагических ядер. В нашем случае задача не статическая и включение эффектов спаривания алгебраически ее усложняет заметно больше, чем статическую, рассмотренную в [67]. Поэтому мы ограничимся здесь только дважды-магическими ядрами  $^{132}\text{Sn}$  и  $^{208}\text{Pb}$ , в которых спаривание отсутствует. Кроме того, состояния  $3_1^-$ ,  $2_1^+$  и  $5_1^-$ , между которыми изучаются переходы, в этих ядрах с большой точностью можно считать однофононными. Как говорилось выше, для всех расчетов в рамках данной работы использовался метод энергетического функционала плотности с параметрами Фаянса DF3-а (подробнее в разделе 1.3).

Все рассматриваемые возбуждения магических ядер (фононы) являются поверхностными колебаниями — компонентами голдстоуновской ветви возбуждений, обусловленной спонтанным нарушением трансляционной инвариантности. Соответствующая вершина для  $L$ -фонона имеет резкий поверхностный максимум (рис. 2.2):

$$g_L(r) = \left( \alpha_L \frac{dU}{dr} + \chi_L(r) \right) Y_{LM}(n), \quad (2.12)$$

где  $U(r)$  — самосогласованный одночастичный потенциал ядра, а объемная поправка  $\chi_L(r)$  мала.

Как можно видеть на рис. 2.2, объемная компонента  $\chi_L(r)$  очень мала, и, кроме того, ее вклад в соответствующие матричные элементы дополнительно подавлен множителем  $r^2$ . Если пренебречь объемной компонентой и незначительным различием протонного и нейтронного коэффициентов  $\alpha_L$ , мы приходим к очень простой физической модели жидкой капли Бора-Моттельсона.

$$g_L(r) = \frac{\beta_L}{\sqrt{2L+1}} r \frac{dU}{dr} Y_{LM}(n), \quad (2.13)$$

которую, в принципе, можно использовать для упрощения расчетов. Здесь, как и в (2.12),  $U$  — самосогласованный одночастичный потенциал, полученный с параметрами DF3-а. Коэффициенты модели Бора-Моттельсона  $\beta_L$  связаны с вероятностью  $B(EL)$  возбуждения  $L$ -фонона, и могут быть найдены из теоретически полученных значений  $B(EL)$  в табл. 2. Тем самым использование

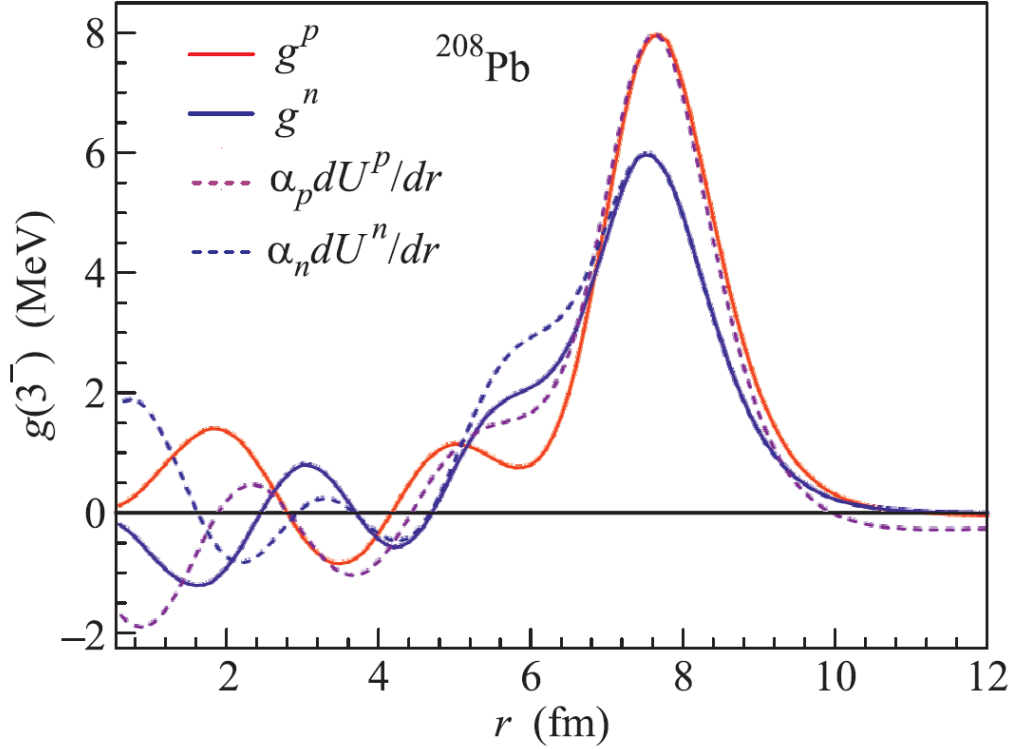


Рисунок 2.2 — Вершины  $g_L^{(p,n)}(r)$  для состояния  $3_1^-$  в ядре  $^{208}\text{Pb}$ . Для сравнения изображены поверхностные члены (2.12)  $\alpha_L^{(p,n)} dU^{(p,n)}/dr$  ( $\alpha_L^p = 0.334$  фм,  $\alpha_L^n = 0.322$  фм)

Таблица 2 — Характеристики однофононных состояний магических изотопов олова и свинца

Ядро	Уровень	$\omega_{exp}$ (МэВ)	$\omega_{th}$ (МэВ)	$B(EL) \uparrow_{exp}$ ( $e^2\text{фм}^{2L}$ )	$B(EL) \uparrow_{th}$ ( $e^2\text{фм}^{2L}$ )
$^{132}\text{Sn}$	2+	4.041	4.327	$1.396 \cdot 10^3$	$1.03 \cdot 10^3$
	3-	4.351	4.572	$> 5.071 \cdot 10^4$	$1.29 \cdot 10^5$
	5-	4.942	5.884	-	$2.269 \cdot 10^7$
$^{208}\text{Pb}$	2+	4.085	4.747	$3.18 \cdot 10^3$	$1.89 \cdot 10^3$
	3-	2.614	2.684	$6.12 \cdot 10^5$	$7.09 \cdot 10^5$
	5-	3.197	3.306	$4.47 \cdot 10^5$	$2.97 \cdot 10^8$

модели Бора-Моттельсона не нарушает самосогласованного характера расчета. Данное приближение использовалось нами в пробных расчетах, и для сравнения точного решения с приближением Бора-Моттельсона приведен рис. 2.3

Полученные характеристики однофононных состояний приведены в табл. 2. Уравнение для эффективного поля  $V$  (1.1) решалось в координатном представлении с использованием самосогласованного базиса ЭФП Фаянса. Поскольку сумма в выражении (2.8) некогерентна, то выполнялась процедура

определения максимальной энергии, до которой следует суммировать в (2.8) для достижения сходимости. Оказалось, что, как и в работе [67] для статических квадрупольных моментов, достаточная точность достигается при суммировании до 100 МэВ. Такой предел суммирования фактически обеспечивает учёт непрерывного одночастичного спектра, что является хорошим аналогом координатного представления. Тот же базис использовался и в остальных формулах.

Для оценки влияния эффектов поляризуемости ядра, были проведены расчеты с известными приближенными выражениями для  $V^{n,p}(r)$ :

$$\begin{aligned} V_{eff} &= e_{eff}V_0, e_{eff} = e_q e_{pol} \approx V/V_0, e_{pol}^p(E1) = e_{pol}^n(E1) = (1 - \chi), \\ e_{pol}^p(E2) &= (1 + \chi); e_{pol}^n(E2) = \chi, \chi(E1) = 0.7, \chi(E2) = 0.6. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Локальные заряды  $e_q^p(E1) = N/A$ ,  $e_q^n(E1) = -Z/A$ , а оценки для величин  $\chi$  взяты из [42; 71; 72].

На рис. 2.3 приведены результаты расчета полей  $E1$  и  $E2$  для изотопов  $^{132}\text{Sn}$  и  $^{208}\text{Pb}$ . Хорошо заметна изовекторная природа поля  $E1$  и изоскалярная – поля  $E2$ . Не полная симметрия  $E1$  вершины отражает отсутствие полной изовекторности, которая реализуется только в случае  $N = Z$ . Для изоскалярных переходов  $E2$  эффективные  $E2$ -поля  $V^n$  и  $V^p$  имеют фазы одинакового знака. Хотя на рис. 2.3. и точные вершины, и их оценки принимают большие значения при  $r > R$  ( $R$ -радиус ядра), это компенсируется в соответствующих интегралах  $V_{12}$  в (2.8) малыми значениями одночастичных волновых функций при  $r > R$ .

Результаты расчетов представлены в табл. 3. Чтобы оценить роль отдельных эффектов, определяющих величину  $B(EL)$ , в колонках 4, 5 и 6 представлены результаты различных приближенных расчетов. Поляризационные эффекты для  $E1$ -переходов прежде всего определяются различием знаков в локальных зарядах  $e_q^p(E1)$  и  $e_q^n(E1)$ . Однако, включение КОС увеличивает величины  $B(E1)$  больше, чем на порядок (см. колонки 6 и 7), а включение поляризуемости уменьшает их тоже на порядок (см. колонки 4 и 6), т.е. окончательная величина наблюдаемого эффекта определяется разностью двух больших чисел, что подчеркивает важность самосогласованности расчетной схемы. Для  $E2$ -переходов включение КОС изменяет величины  $B(E2)$  в 2-3 раза, а включение поляризуемости увеличивает эффект неодинаково для разных ядер.

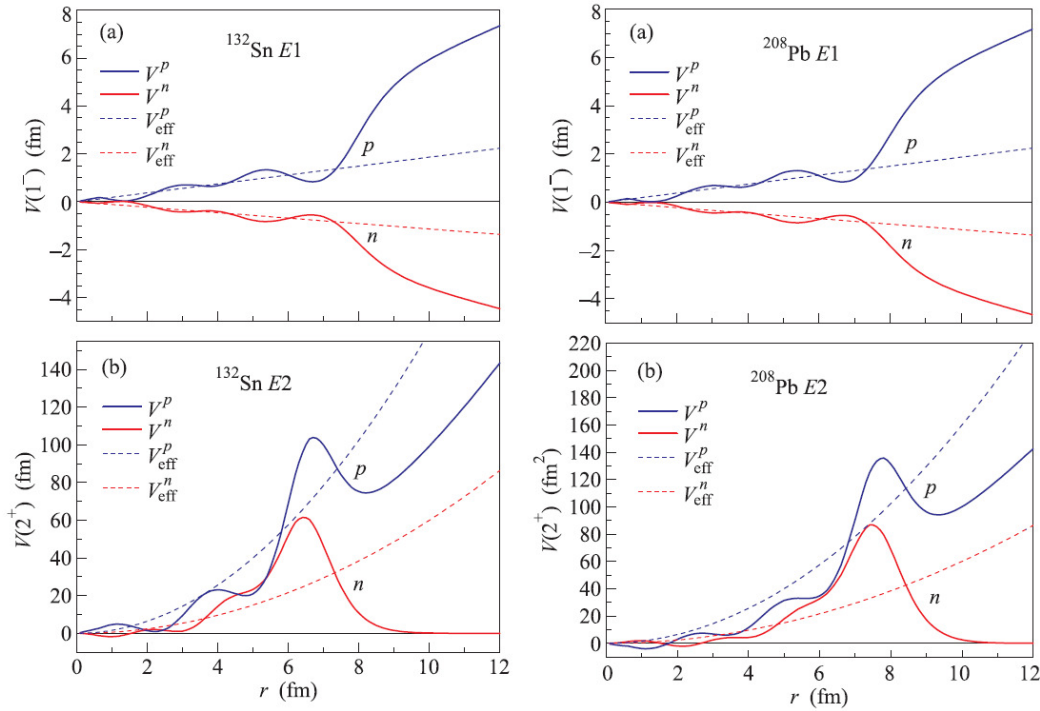


Рисунок 2.3 — . Вершины  $V(r)$  для  $E1$  (a) и  $E2$  (b) переходов в  $^{132}\text{Sn}$  и  $^{208}\text{Pb}$ , рассчитанные в самосогласованной ТКФС (сплошные кривые) и с использованием оценок по формулам (2.14) (штрихи).

Таблица 3 — Приведенные вероятности переходов ( $EL$ ),  $e^2\text{фм}^{2L}$  (экспериментальные данные [70]). В колонке 4 приведены результаты расчетов без новых КОС и поляризуемости ядра, в колонке 5 - КОС  $\neq 0$  и с оценкой поляризуемости по формулам (2.14), в колонке 6 – с КОС=0 и учетом поляризуемости через решение уравнения для вершины, окончательные результаты показаны в колонке 7

EL	Ядро	Переход	КОС=0 $V = e_q V_0$	КОС $\neq 0$ $e_{eff} \neq 0$	КОС=0 $V \neq 0$	КОС $\neq 0$ $V \neq 0$	Эксп.
1	2	3	4	5	6	7	8
$E1$	$^{132}\text{Sn}$	$3_1^- \rightarrow 2_1^+$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$> 2.8 \cdot 10^{-4}$
	$^{208}\text{Pb}$	$2_1^+ \rightarrow 3_1^-$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$> (7.9 \pm 2.7) \cdot 10^{-4}$
$E2$	$^{132}\text{Sn}$	$5_1^- \rightarrow 3_1^-$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	7.8	13.8	25.7	$24.3 \pm 1.2$
	$^{208}\text{Pb}$	$5_1^- \rightarrow 3_1^-$	19.3	36.2	46.0	18.8	$27.9 \pm 1.5$

### 2.3 Состояния с двумя фононами. Вероятности переходов и результаты расчетов для ядер со спариванием. Роль спиновых составляющих амплитуды рождения фонона

Выражение для амплитуды перехода в случае задачи с двумя фононами (2.4) остается неизменным, но для полумагических ядер, в которых присутствует параметр малости  $g^2$  [73], следует учесть эффект спаривания. Это означает, что необходимо дополнить нашу картину графиками, содержащими интегралы от четырех функций Грина  $G, G^h, F^{(1)}, F^{(2)}$ :

$$G_1(\varepsilon) = G_1^h(-\varepsilon) = \frac{u_1^2}{\varepsilon - E_1 + i\delta} + \frac{v_1^2}{\varepsilon + E_1 - i\delta}, \quad (2.15)$$

$$F_1^{(1)}(\varepsilon) = F_1^{(2)}(\varepsilon) = -\frac{\Delta_1}{2E_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon - E_1 + i\delta} + \frac{1}{\varepsilon + E_1 - i\delta} \right], \quad (2.16)$$

В ядрах со спариванием для описания фононов необходимо использовать уравнения КМХФ, которые содержат (ph, hp, pp, hh)-каналы и четыре эффективных поля  $V, V^h, d^{(1)}$  и  $d^{(2)}$  [2]. Как и во всех работах, связанных с расчетом квадрупольных моментов ядер [67; 68], мы пренебрегаем изменениями спаривательной щели во внешнем поле  $d^{(1)}$  и  $d^{(2)}$ . Тогда вместо первого слагаемого в выражении (2.5), рис. 2.1, получаются 8 слагаемых, к каждому из которых следует, вообще говоря, добавить по 2 слагаемых, содержащих  $\delta_s F$  и  $\delta_s F^\xi$ , где  $F^\xi$  —  $pp$ -взаимодействие. Однако, как было показано ранее при расчетах квадрупольных моментов [67], учет  $\delta_s F$  и  $\delta_s F^\xi$  дает очень небольшой вклад, поэтому мы ограничились рассмотрением только восьми основных графиков, которые приведены на рис. 2.4.

Таким образом, по аналогии с формулой (2.5) мы получаем сумму из 8 членов для каждой из амплитуд  $M_{ss'}^{(i)}$ , представленных на рис. 2.4. После отделения угловых переменных, суммирования по магнитным квантовым числам, и вычисления всех необходимых интегралов (подробнее см. Приложение Б), мы получаем следующую формулу для приведенной вероятности перехода  $I_s \rightarrow I_{s'}$  с энергией  $\omega = \omega_{s'} - \omega_s$

$$B(EL) = \frac{1}{2I_s + 1} | \langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle |^2, \quad (2.17)$$

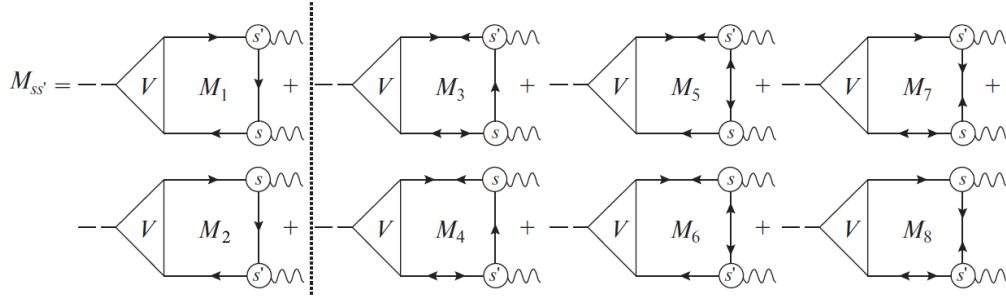


Рисунок 2.4 — Диаграммы для амплитуды перехода  $M_{ss'}$  в ядрах со спариванием. Двойные стрелки отвечают аномальным функциям Грина  $F$ . Графики с аномальными функциями Грина отделены вертикальной штриховой линией.

где приведенный матричный элемент  $\langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle$  определяется выражением:

$$\langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle = \sum_{123} \left\{ \begin{array}{ccc} I_s & I_{s'} & L \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{array} \right\} V_{12} g_{31}^s g_{23}^{s'} \quad (2.18)$$

$$\left[ A_{123}^{(12)} + A_{123}^{(34)} + (-1)^{L+I_s} A_{123}^{(76)} + (-1)^{L+I_{s'}} A_{123}^{(58)} \right]$$

и величины  $A^{(ik)} = A^{(i)} + A^{(k)}$  представляют собой суммы двух пропагаторов – интегралов от трех ФГ (2.19), соответствующих одному из восьми графиков на рис. 2.4. Подробности расчета интегралов представлены в Приложении Б

формулы (Б.1)-(Б.8).

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(12)} &= A_{123}^{(1)} + A_{123}^{(2)} = \frac{2(E_{13}E_{23} + \omega_s\omega_{s'})}{(E_{13}^2 - \omega_s^2)(E_{23}^2 - \omega_{s'}^2)}(u_1^2u_2^2v_3^2 - v_1^2v_2^2u_3^2) + \\
&\frac{2(E_{32}E_{12} + \omega\omega_{s'})}{(E_{32}^2 - \omega_{s'}^2)(E_{12}^2 - \omega^2)}(u_1^2v_2^2u_3^2 - v_1^2u_2^2v_3^2) + \frac{2(E_{31}E_{21} - \omega\omega_s)}{(E_{31}^2 - \omega_s^2)(E_{21}^2 - \omega^2)}(v_1^2u_2^2u_3^2 - u_1^2v_2^2v_3^2), \\
A_{123}^{(34)} &= A_{123}^{(3)} + A_{123}^{(4)} = \\
&\frac{\Delta_1\Delta_2}{4E_1E_2}(u_3^2 - v_3^2) \cdot \left( \frac{2(E_{13}E_{23} + \omega_s\omega_{s'})}{(E_{13}^2 - \omega_s^2)(E_{23}^2 - \omega_{s'}^2)} + \frac{2(E_{32}E_{12} + \omega\omega_{s'})}{(E_{32}^2 - \omega_{s'}^2)(E_{12}^2 - \omega^2)} + \right. \\
&\left. + \frac{2(E_{31}E_{21} - \omega\omega_s)}{(E_{31}^2 - \omega_s^2)(E_{21}^2 - \omega^2)} \right), \\
A_{123}^{(76)} &= A_{123}^{(7)} + A_{123}^{(6)} = \\
&\frac{\Delta_1\Delta_3}{4E_1E_3}(u_2^2 - v_2^2) \cdot \left( \frac{2(E_{13}E_{23} + \omega_s\omega_{s'})}{(E_{13}^2 - \omega_s^2)(E_{23}^2 - \omega_{s'}^2)} + \frac{2(E_{32}E_{12} - \omega\omega_{s'})}{(E_{32}^2 - \omega_{s'}^2)(E_{12}^2 - \omega^2)} + \right. \\
&\left. + \frac{2(E_{31}E_{21} + \omega\omega_s)}{(E_{31}^2 - \omega_s^2)(E_{21}^2 - \omega^2)} \right), \\
A_{123}^{(58)} &= A_{123}^{(5)} + A_{123}^{(8)} = \\
&\frac{\Delta_2\Delta_3}{4E_2E_3}(u_1^2 - v_1^2) \cdot \left( \frac{2(E_{13}E_{23} + \omega_s\omega_{s'})}{(E_{13}^2 - \omega_s^2)(E_{23}^2 - \omega_{s'}^2)} + \frac{2(E_{32}E_{12} - \omega\omega_{s'})}{(E_{32}^2 - \omega_{s'}^2)(E_{12}^2 - \omega^2)} + \right. \\
&\left. + \frac{2(E_{31}E_{21} + \omega\omega_s)}{(E_{31}^2 - \omega_s^2)(E_{21}^2 - \omega^2)} \right). \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Здесь для приведенных матричных элементов вершины и фононов введены обозначения  $\langle 1||V||2 \rangle = V_{12}$ ,  $\langle 3||g^s||1 \rangle = g_{31}^s$  и  $\langle 2||g^{s'}||3 \rangle = g_{23}^{s'}$ . Как и в случае для магических ядер (см. раздел 2.2), суммирование производится по уровням одночастичного базиса до 100 МэВ. Пропагаторы  $A_{123}^{(ik)}$  сгруппированы для удобства представления суммарной амплитуды перехода.

$$M_{ss'} = M_{ss'}^{(12)} + M_{ss'}^{(34)} + M_{ss'}^{(76)} + M_{ss'}^{(58)}. \tag{2.20}$$

Формула (2.18) в предельном случае  $I_s = I_{s'}$  соответствует формулам, полученным для величин квадрупольных моментов [67; 68]; в предельном случае  $\Delta_i = 0$  она переходит в формулу для  $EL$ -переходов в магических ядрах (2.8). Первый член каждого из слагаемых  $A_{123}^{(ik)}$  полностью соответствуют формуле для приведенной вероятности переходов между однофононными состояниями



в задаче со спариванием в работе [62], в которой решалась аналогичная задача для  $^{120}\text{Sn}$  на базе КФМ [4]. Второй и третий члены каждого из слагаемых  $A^{(ik)}$  представляют собой трехквaziчастичные корреляции в основном состоянии. В случае для полумагических ядер КОС, так же как и для магических ядер, содержат комбинацию частиц находящихся по разные стороны от поверхности Ферми (см. раздел 2.2). Насколько мы знаем, для рассматриваемой задачи переходов между однофононными состояниями они не учитываются в работах за пределами метода функций Грина. Как было получено ранее для мультипольных моментов [67;68] в полумагических ядрах и в наших расчетах однофононных переходов в магических ядрах [27], для полумагических ядер КОС вносят количественно большой вклад в результирующую величину вероятности.

В этой задаче была поставлена дополнительная цель: кроме самого расчета вероятности для однофононных переходов, было решено изучить роль спиновых эффектов в данной задаче. Расчеты проводились для ряда полумагических изотопов олова  $^{110-124}\text{Sn}$ . Общая схема расчета совпадает с использованной в разделе 2.2 для магических ядер. Во всех расчетах, как для эффективного поля, так и для эффективного взаимодействия и амплитуд рождения фононов использовались хорошо известные параметры функционала Фаянса [13; 49] DF3-a [14]. Расчеты амплитуд рождения фононов были усложнены для изучения влияния спина на величину вероятности перехода между однофононными состояниями в полумагических ядрах. Для исследования были выбраны  $E1$ - переходы между  $3-$  и  $2+$  состояниями, так как описание этих состояний выполняется в рамках ТКФС достаточно хорошо (см. таб. 4), и при этом  $E1$  переход обладает повышенной чувствительностью, так как окончательный результат для приведенной вероятности однофононных  $E1$  переходов определяется разностью двух больших чисел-эффекта поляризуемости и учета КОС (см. раздел 2.2).

Как было сказано выше, обычно для амплитуды рождения фонона мы используем выражение  $g_s = g_{I_s 0} Y_{I_s M}$  и для получения формулы (2.18) использованы свойства симметрии шаровой функции. Полное выражение для амплитуды рождения фонона имеет вид:

$$g_s = g_{I_s 0} Y_{I_s M} + g_{I_s 1} [Y_{I_s} \otimes \sigma]_{I_s M} \quad (2.21)$$

На рис. 2.5-2.6 приведены амплитуды рождения фононов  $g_s$  для изотопов  $^{118-124}\text{Sn}$ , в которых показаны вклады «основной» компоненты  $g_0$  и «спиновой»

Таблица 4 — Характеристики фононов в изотопах Sn: энергии (МэВ) первых  $3^-(\omega_3)$ -,  $2^+(\omega_2)$ - состояний и приведенные вероятности переходов  $B(EL) \uparrow (e^2b^L)$  (экспериментальные данные взяты из [70; 74])

Ядро	$\omega_3$	$\omega_3^{\text{exp}}$	$B(E3)$	$B(E3)^{\text{exp}}$	$\omega_2$	$\omega_2^{\text{exp}}$	$B(E2)$	$B(E2)^{\text{exp}}$
$^{118}\text{Sn}$	3.072	2.324	0.106	0.115(10)	1.217	1.229	0.172	0.208(9)
$^{120}\text{Sn}$	3.069	2.400	0.112	0.115(15)	1.241	1.171	0.152	0.200(4)
$^{122}\text{Sn}$	3.112	2.492	0.107	0.092(10)	1.290	1.140	0.158	0.192(4)
$^{124}\text{Sn}$	3.208	2.602	0.103	0.073(10)	1.350	1.131	0.147	0.165(6)

компоненты  $g_1$ . Как можно видеть, вклад спиновой компоненты значительно уступает вкладу основной компоненты, потому чаще всего в вычислениях мы ограничиваемся простым выражением для амплитуды рождения фонона  $g_s = g_{I_s0} Y_{I_sM}$ .

Результаты расчетов приведенной вероятности  $B(E1)$  перехода между первыми  $3^-$ - и  $2^+$ -состояниями представлены в табл. 5. Сначала мы использовали для расчета приведенных матричных элементов амплитуды рождения фонона простое выражение  $g_s = g_{I_s0} Y_{I_sM}$ . Получено достаточно хорошее согласие с экспериментом. Экспериментальные данные взяты из работ экспериментаторов Курчатовского института [75; 76]. Для оценки влияния отдельных эффектов на рассчитываемую величину в таблице также приведены результаты расчетов без учета эффектов поляризуемости ядра и без учета КОС. Как видно из таблицы, также, как и для магических ядер, учет поляризуемости уменьшает  $B(E1)$  (колонки 2 и 3), но это уменьшение (примерно в 3 раза) не такое большое как для магических ядер (там — на порядок величины). Это можно объяснить спецификой учета спаривания, см. следующий раздел. Учет эффектов КОС увеличивает величину  $B(E1)$  больше чем на порядок (колонки 2 и 4), в то время как дополнительный учет эффектов поляризуемости уменьшает ее почти на порядок (колонки 4 и 5) и приводит к хорошему согласию с экспериментом. Таким образом, хорошее согласие с экспериментом получено за счет разности двух больших эффектов, что, как и ранее, подчеркивает важность используемой самосогласованной схемы.

Рассмотрим теперь результаты решения данной задачи с учетом спиновой компоненты амплитуды рождения фонона  $g_1$ . В этом случае формула (2.18) усложняется:

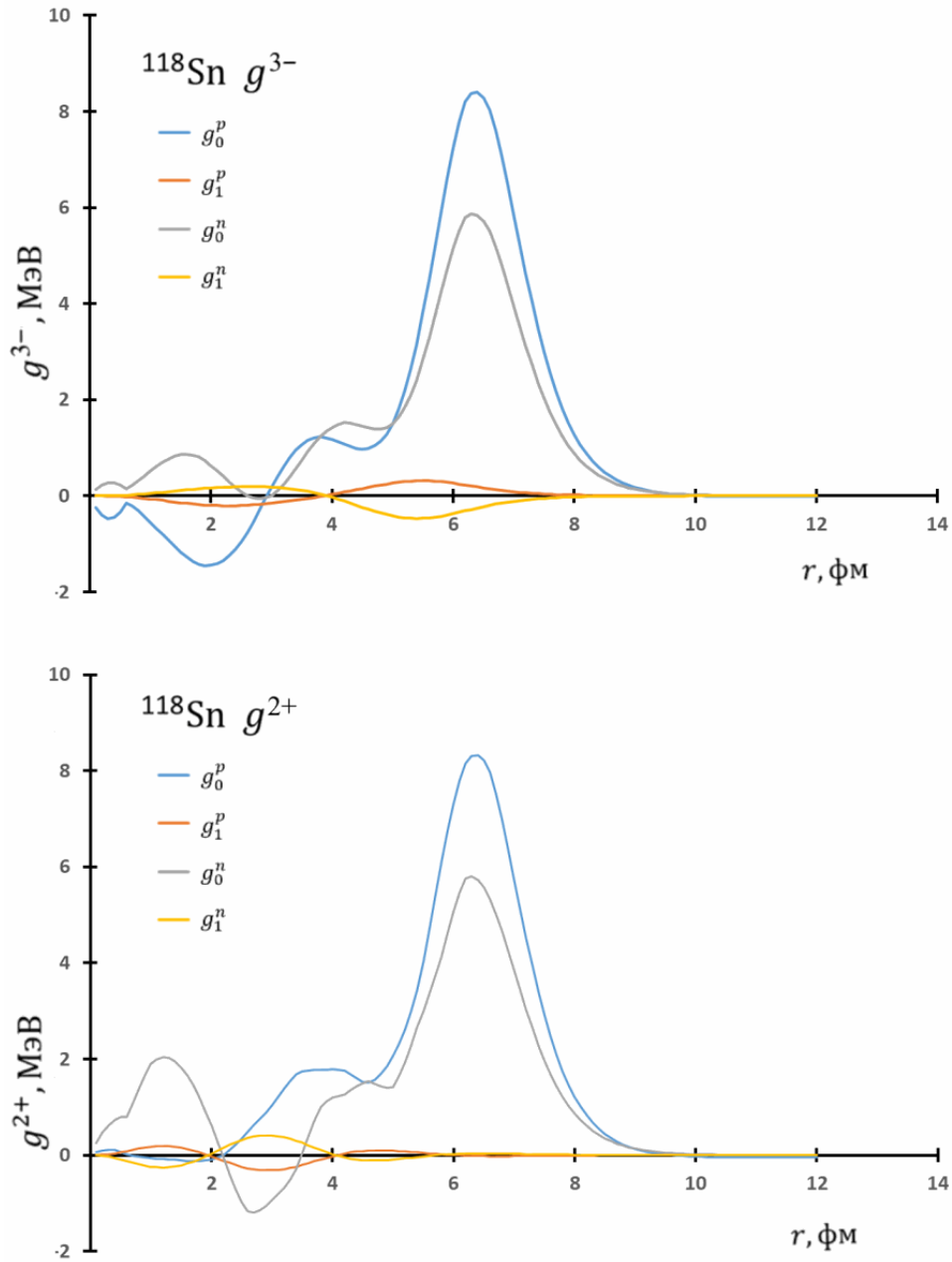


Рисунок 2.5 — Протонная и нейтронная составляющие амплитуды рождения фононов  $g_s$  для  $^{118}\text{Sn}$ . Выделены вклады «основной» компоненты  $g_0$  и «спиновой» компоненты  $g_1$ .

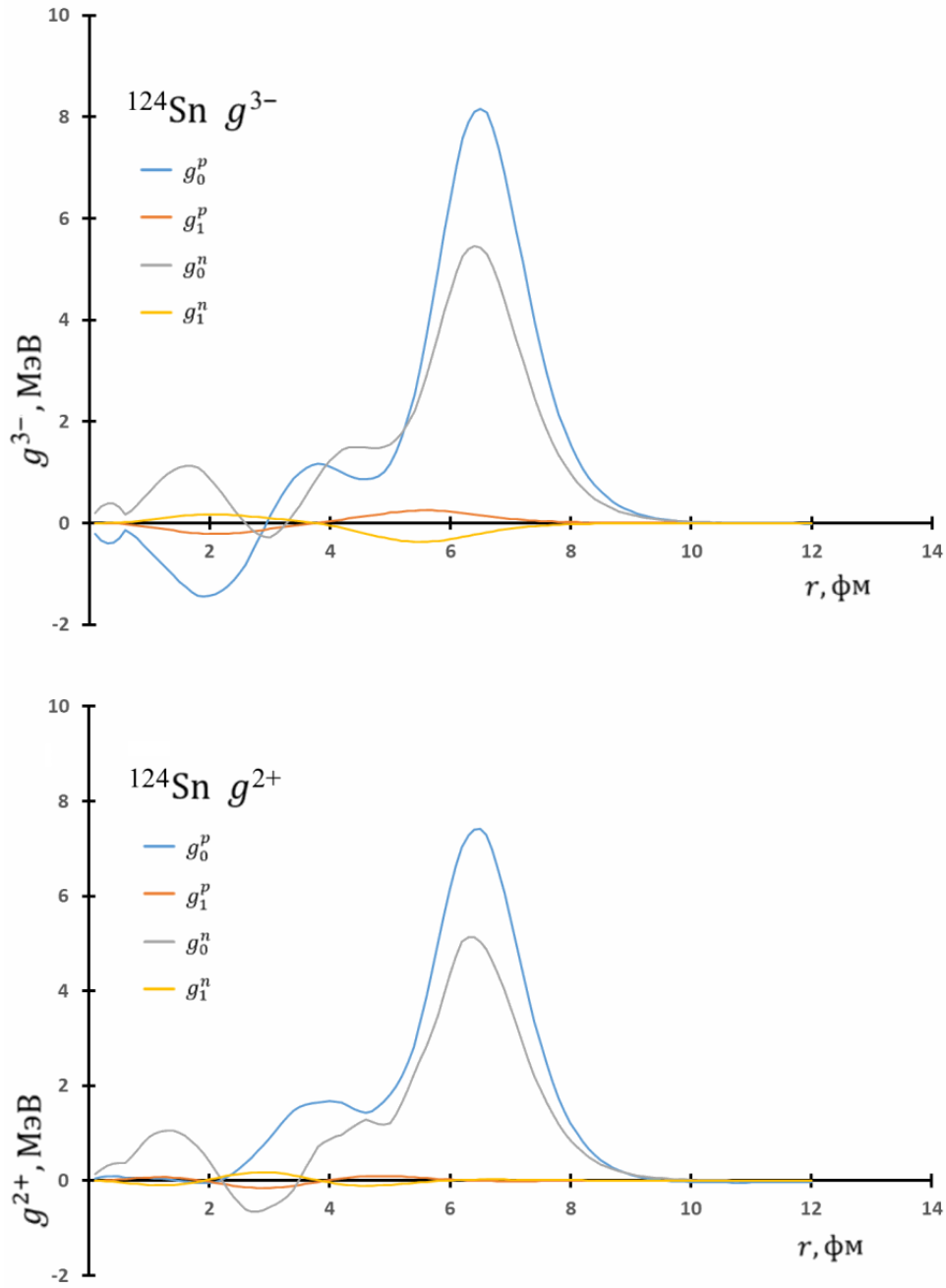


Рисунок 2.6 — Протонная и нейтронная составляющие амплитуды рождения фононов  $g_s$  для  $^{124}\text{Sn}$ . Выделены вклады «основной» компоненты  $g_0$  и «спиновой» компоненты  $g_1$ .

Таблица 5 — Приведенные вероятности перехода между первыми  $3^-$ - и  $2^+$ -фононами  $B(E1)$ ,  $e^2\text{фм}^2$  для изотопов олова (в колонке 2 приведены результаты расчетов без учета поляризуемости и без КОС; в колонке 3 — с поляризуемостью, но без КОС; в колонке 4 — без поляризуемости, но с КОС; в колонке 5 — окончательные результаты с поляризуемостью и КОС; в колонке 6 — эксперимент [75; 76])

1	2	3	4	5	6
Ядро	$V = e_q V^{(0)}$ КОС = 0	$V = V_{\text{pol.}}$ КОС = 0	$V = e_q V^{(0)}$ КОС $\neq$ 0	$V = V_{\text{pol.}}$ КОС $\neq$ 0	Эксп.
$^{118}\text{Sn}$	0.00044	0.00011	0.00939	0.00202	$0.0017 \pm 0.0004$
$^{120}\text{Sn}$	0.00044	0.00012	0.00901	0.00199	$0.0020 \pm 0.0001$
$^{122}\text{Sn}$	0.00047	0.00014	0.00899	0.00199	$0.0018 \pm 0.0002$
$^{124}\text{Sn}$	0.00041	0.00012	0.00785	0.00180	$0.0020 \pm 0.0002$

$$\begin{aligned}
\langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle = & \sum_{123} \left\{ \begin{matrix} I_s & I_{s'} & L \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} V_{12} \\
& \left( \langle 3 || g_0^s || 1 \rangle \langle 2 || g_0^{s'} || 3 \rangle + \langle 3 || g_1^s || 1 \rangle \langle 2 || g_1^{s'} || 3 \rangle \right. \\
& \left. - \langle 3 || g_0^s || 1 \rangle \langle 2 || g_1^{s'} || 3 \rangle - \langle 3 || g_1^s || 1 \rangle \langle 2 || g_0^{s'} || 3 \rangle \right) \\
& \left[ A_{123}^{(12)} + A_{123}^{(34)} + (-1)^{L+I_s} A_{123}^{(76)} + (-1)^{L+I_{s'}} A_{123}^{(58)} \right]. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Результаты расчета вероятности перехода  $B(E1)$  с учетом спиновой компоненты амплитуды рождения фонона приведены в табл. 6. Как можно видеть, учет спина заметно влияет на итоговую величину. Однако характер же этого влияния нуждается в дальнейшем уточнении, так как учет спина явно улучшает согласие с экспериментом в случае  $^{118}\text{Sn}$  и  $^{122}\text{Sn}$ , но ухудшает в случае  $^{120}\text{Sn}$  и  $^{124}\text{Sn}$ . Можно предположить, что это может объясняться тем, что экспериментальные данные говорят о наличии примеси  $M2$ -переходов к непосредственно измеряемым величинам в экспериментах [76]. Однако, как уже упоминалось выше, в данных расчетах не учитывалось спин-орбитальное взаимодействие при решении уравнения для амплитуды рождения фонона и эффективного поля, что также может послужить объяснением данного эффекта. В работе [77]

Таблица 6 — Влияние учета спиновых составляющих в амплитуде рождения фонона на величину приведенной вероятности перехода между первыми  $3^-$  и  $2^+$ -состояниями  $B(E1)$ ,  $e^2\text{фм}^2$

Ядро	без спина	со спином	Эксп.
$^{118}\text{Sn}$	0.0020	0.0016	$0.0017 \pm 0.0004$
$^{120}\text{Sn}$	0.0020	0.0016	$0.0020 \pm 0.0001$
$^{122}\text{Sn}$	0.0020	0.0017	$0.0018 \pm 0.0002$
$^{124}\text{Sn}$	0.0018	0.0015	$0.0020 \pm 0.0002$

было показано, что влияние спин-орбитального взаимодействия в расчетах эффективного поля может быть заметным. Таким образом, учет спиновой составляющей в расчетах амплитуды рождения фононов может влиять на приведенную вероятность переходов между возбужденными состояниями, но для адекватного учета данного влияния, предположительно, необходимо так же учитывать последовательно спин-орбитальное взаимодействие в расчетах как амплитуды рождения фононов, так и в расчетах эффективного поля, но такой подход в разы увеличивает сложность решения общей задачи расчета приведенных вероятностей перехода. При этом даже с упрощенной формулой для амплитуды рождения фононов, не учитывающей спиновую составляющую, мы получаем близкие к экспериментальным результатам. Таким образом, мы можем заключить, что в исследуемом нами круге задач для амплитуды рождения фононов, по-видимому, достаточно простого выражения  $g_s = g_{I_s 0} Y_{I_s M}$ .

Для исследования специфики эффектов спаривания в данной задаче приведена таблица 7. В ее столбцах указан вклад в полную амплитуду  $M_{ss'}$  (2.20) как суммарных протонных  $M^p$  и нейтронных  $M^n$  составляющих, так и отдельных групп графиков в нейтронную составляющую амплитуды перехода  $M^n$ . Видно, что сумма  $M_{ss'} = M^p + M^n$  складывается из двух слагаемых с разными знаками, где  $M^p$  примерно в два раза больше чем  $M^n$ . Отличие знаков отражает отличие знаков в затравочных кинематических зарядах  $e_q^p = (A - Z)/Ae$  и  $e_q^n = -Z/Ae$ .

Также видно, что величина вклада  $M^{(58),n}$  на порядок больше вклада в  $M^n$  от двух других слагаемых с аномальными ФГ, что обусловлено близостью энергии  $E1$ -перехода к энергиям  $2^+$ -фононов (см.табл. 4 и формулу (2.18)). Отличающийся от других нейтронных составляющих знак в  $M^{(58),n}$  обусловлен фазой (см. формулу (2.18)). На рис. 2.7, 2.8 показаны рассчитанные функции

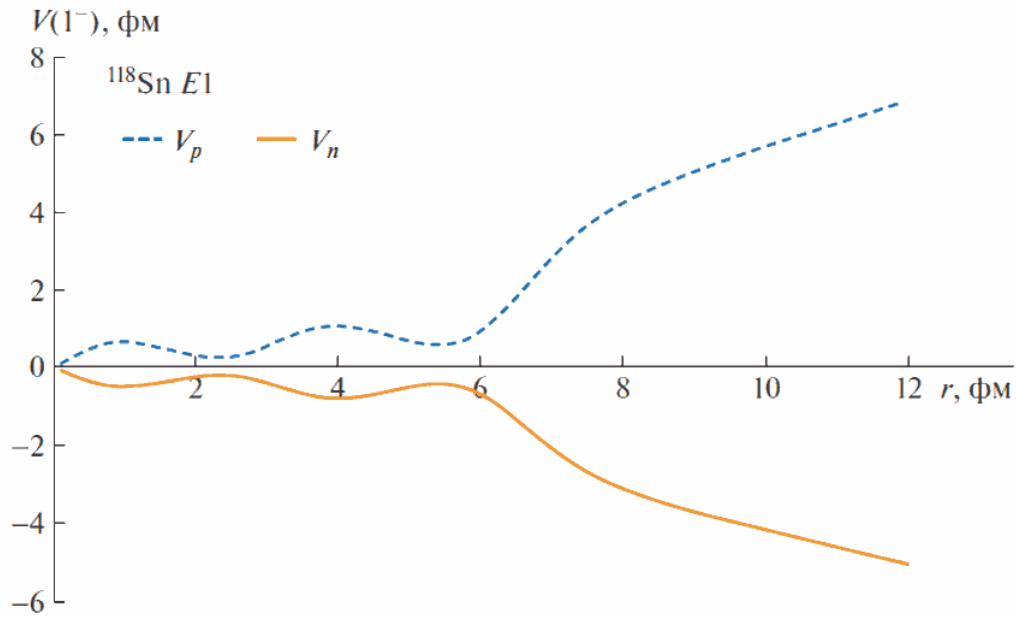


Рисунок 2.7 — Вершина  $V(r)$  для  $E1$ -перехода в  $^{118}\text{Sn}$ , рассчитанная в самосогласованной ТКФС.

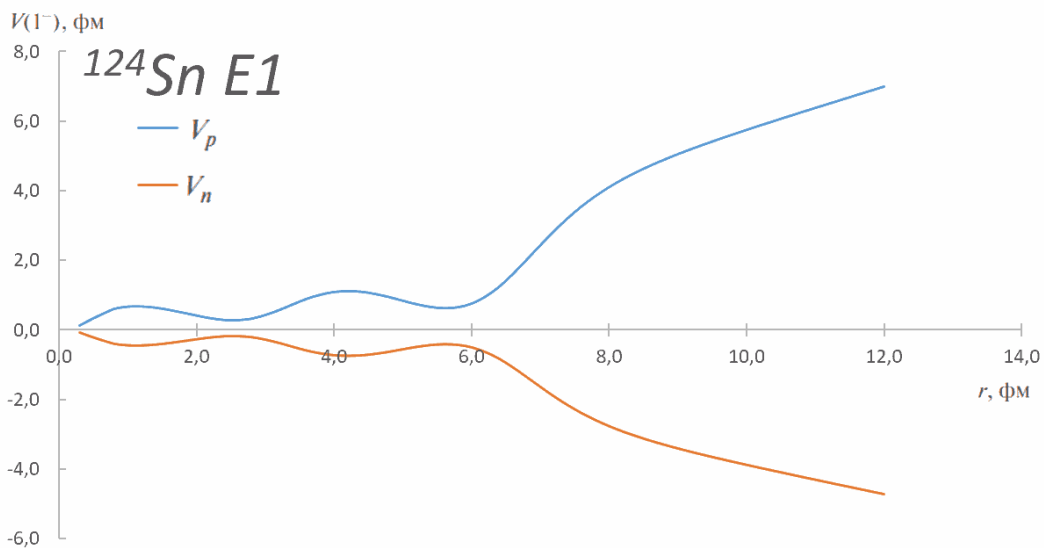


Рисунок 2.8 — Вершина  $V(r)$  для  $E1$ -перехода в  $^{124}\text{Sn}$ , рассчитанная в самосогласованной ТКФС.

Таблица 7 — Вклад отдельных групп графиков (рис. 2.4) в полную амплитуду перехода  $M_{ss'}$ , см. формулу (2.11) ( $M^n$ ,  $M^p$  – нейтронная и протонная составляющие амплитуды  $M_{ss'}$ ,  $e$  фм)

Ядро	$M^n$					$M^p$	полная $M_{ss'}$
	$M^{(12)}$	$M^{(34)}$	$M^{(76)}$	$M^{(58)}$	полная $M^n$	$M^{(12)}$	
$^{118}\text{Sn}$	-0.185	-0.008	-0.007	0.073	-0.126	0.245	0.119
$^{120}\text{Sn}$	-0.174	-0.006	-0.006	0.067	-0.119	0.237	0.118
$^{122}\text{Sn}$	-0.170	-0.004	-0.006	0.064	-0.116	0.234	0.118
$^{124}\text{Sn}$	-0.149	-0.001	-0.004	0.048	-0.107	0.219	0.112

$V_{n,p}(r)$ . Хорошо заметна изовекторная природа поля  $E1$ : вершины  $V_p$  и  $V_n$  имеют противоположные фазы, хотя они и не полностью симметричны относительно нулевой линии раздела. Последнее отражает отсутствие полной изовекторности, которая реализуется лишь при  $N = Z$ .

На рис. 2.7, 2.8 точные вершины принимают большие значения при  $r > R$  ( $R$  — радиус ядра), но это компенсируется в соответствующих интегралах  $V_{12}$  в (2.18) малыми значениями одночастичных волновых функций при  $r > R$ . Вследствие изовекторности поля  $V(r)$  протонная составляющая амплитуды перехода  $M^{(12),p}$  и ее нейтронная составляющая  $M^{(12),n}$  близки по величине, но противоположны по знаку. При этом спаривательная щель в протонных уровнях для магических по протонам изотопов олова пренебрежимо мала, и соответственно пренебрежимо малы вклады графиков  $M^{(34)}$ ,  $M^{(76)}$  и  $M^{(58)}$  в протонную составляющую  $M_{ss'}^p$ . Так как  $B(E1) \sim (M^p + M^n)^2$ , то нейтронная составляющая вклада графиков  $M^{(58)}$  оказывает большое влияние на результирующую величину  $B(E1)$ , составляя около половины величины полной амплитуды перехода  $M_{ss'}$  (табл. 7). Это еще раз показывает важность и эффективность самосогласования в расчетах полумагических ядер.

## 2.4 Состояния с тремя фононами. Вероятности переходов из двухфононного состояния в однофононное

Очевидным дальнейшим шагом в развитии современной ТКФС является описание эффектов, связанных с взаимодействием трех фононов, чтобы понять



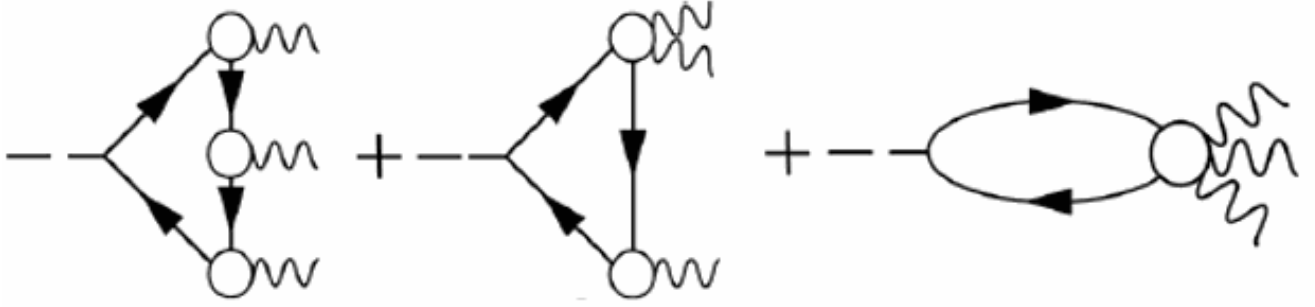


Рисунок 2.9 — Правая часть формулы (2.24) в диаграммном виде. Пунктир означает внешнее поле  $V_0$ , кружки с одной волнистой линией обозначают амплитуду рождения фонона  $g$ , кружки с двумя и тремя волнистыми линиями обозначают, соответственно, величины  $g_{12}$  и  $g_{123}$ , линии со стрелками – функции Грина.

специфику такого подхода, выделить вклад КОС и, по возможности, сравнить с имеющимися подходами. Это является основной целью данного раздела. Эта задача в рамках ТКФС в общем виде рассматривалась только в работах Ходеля [44]. Поскольку в работе [44] рассматривались только магические ядра и использовалось приближение Бора–Моттельсона для амплитуды  $g$ , желательно избавиться от этих приближений и обобщить подход на случай ядер со спариванием. Обобщение на спаривание позволит сравнить этот подход с конкретной задачей перехода между двухфононным и однофононным состояниями, рассмотренной ранее в рамках КФМ [62].

Исходная амплитуда перехода  $M^{(3)}$  для возбуждения внешним полем  $V_0$  трех фононов выражается через вариацию одночастичной ФГ под действием трех фононов [44], которые в этом разделе мы обозначим для простоты как 1, 2, 3, где 1 – набор квантовых чисел фонона с энергией  $\omega_{s_1} : I_{s_1}, M_{s_1}$  и т.д.:

$$M^{(3)} = V_0 \delta^3 G = V_0 \delta_1 \delta_2 \delta_3 G, \quad (2.23)$$

где, например,  $\delta_3 G = G g_3 G$  и  $g_3$  – амплитуда рождения фонона. Последовательное варьирование в формуле (2.23) приводит к символическому выражению для  $M^{(3)}$ , правую часть которого можно записать на языке диаграмм Фейнмана в виде, представленном на рис. 2.9.

$$M^{(3)} = V_0 G G g_1 G g_2 G g_3 + V_0 G G g_{12} G g_3 + V_0 G G g_{123}, \quad (2.24)$$

где  $g_{123} = \delta_1 \delta_2 g_3 = \delta_1 g_{23}$ . В формулах мы нигде не выписываем слагаемые, отличающиеся перестановкой фононов. Здесь, как обычно, величина  $g$  рассмат-

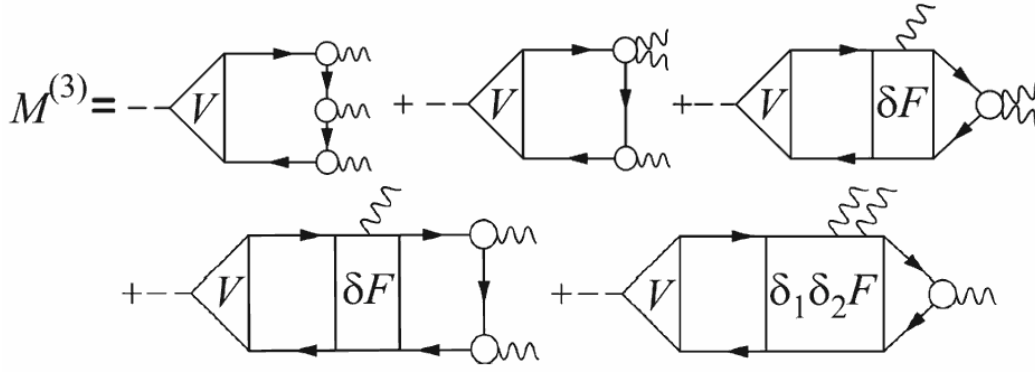


Рисунок 2.10 — Выражение для амплитуды с тремя фононами(2.26)

ривается в рамках МХФ, точнее ТКФС:

$$g = FAg, \quad (2.25)$$

где  $F$  – эффективное взаимодействие нуклонов,  $A$  – частично-дырочный пропагатор, представляющий собой интеграл от двух ФГ  $G$ . То есть, в отличие от [44], приближение Бора–Моттельсона для амплитуды  $g$  не используется. В формулу (2.24), рис. 2.9 входят “четыреугольник” с тремя фононами, “треугольник” с амплитудой  $g_{12}$  (эффекты фононного тэдпола), которые содержат, соответственно, интегралы от 4-х и 3-х ФГ и третий график с блоком  $g_{123}$ , удовлетворяющим сложному интегральному уравнению с большим количеством свободных членов. После длительного вывода (Приложение Б) находим выражение для  $M^{(3)}$ :

$$M^{(3)} = VGg_1Gg_2Gg_3G + VGg_{12}Gg_3G + VGG\delta_1FGGg_{12} + \\ VGG\delta_1FGg_1Gg_2G + VG\delta_1\delta_2FGg_3G. \quad (2.26)$$

На языке диаграмм Фейнмана его можно записать в виде, показанном на рис. 2.10.

По аналогии с результатами о малости графиков с  $\delta F$ , полученными в [67] можно думать, что третий, четвертый и пятый графики на рис. 2.10, содержащие  $\delta F$ ,  $\delta_1\delta_2F$ , также дают малый вклад. Второй график на рис. 2.10 с  $g_{12}$ , который содержит эффекты фононного тэдпола, насколько мы знаем, нигде не обсуждался. В дальнейшем для нашей задачи с тремя фононами мы рассматриваем только первый график с четырьмя ФГ на рис. 2.10 чтобы сравнить с другими подходами. Для задачи с тремя равноправными фононами, рассмотренной в [44], необходимо учитывать перестановки фононов. Чтобы на языке ФГ рассмотреть ядра со спариванием, следует использовать четыре ФГ:  $G$ ,  $G^h$ ,  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$

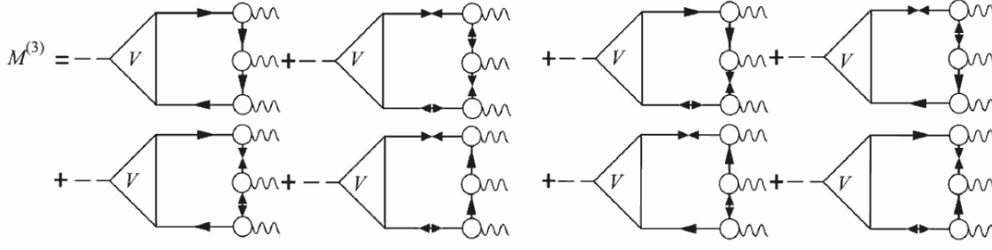


Рисунок 2.11 — Амплитуда перехода в ядрах со спариванием, полученная при учете только первого слагаемого в (2.26), рис. 2.10. Линии с двумя входящими и двумя выходящими стрелками обозначают ФГ  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$

Действуя по аналогии с нашей работой для задачи со спариванием (см. раздел 2.3), запишем первый график для  $M^{(3)}$  с учетом этих ФГ. При этом, как и во всех наших работах, учитываем только  $ph$ -вершины в уравнении для эффективного поля и не учитываем  $pp$ - и  $hh$ -вершины, которые обычно дают малый вклад, их учет привел бы к огромному усложнению задачи. Итак, в случае спаривания необходимо рассмотреть 7 типов графиков. Все они, кроме графика с четырьмя аномальными ФГ, содержат произведения ФГ  $F_1^{(1)}$   $F_2^{(2)}$  и интегралы вида  $\int GG F^{(1)} F^{(2)} d\epsilon$  с множителями  $\frac{\Delta_1 \Delta_2}{4E_1 E_2}$  и представлены на рис. 2.11 для  $M^{(3)}$  вместе с графиками, содержащими четыре ФГ  $G$  и четыре аномальных ФГ.

В случае равноправных фононов [44], следует рассматривать шесть (число сочетаний) графиков, содержащих ФГ  $G$ . Для задачи со спариванием необходимо добавить  $7 \times 6 = 42$  графика с аномальными ФГ  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ , итого 48 диаграмм с 48 интегралами от 4-х ФГ, каждый из которых имеет весьма сложный алгебраический вид. Формула для амплитуды  $M^{(3)}$ , квадрат которой определяет вероятность перехода, имеет следующий общий вид:

$$M^{(3)} = \sum_{i=(1-48),1234} V_{12} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_2} g_{42}^{s_3} A_{1234}^{(i)}(\omega, \omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}) \quad (2.27)$$

В этом выражении нижние индексы 1 обозначают полный набор одночастичных квантовых чисел  $(n_1, j_1, l_1, m_1)$ ,  $A^i$  — интегралы от 4-х ФГ, вершина  $V$  и амплитуда  $g_{s_i}$  удовлетворяют, соответственно, уравнениям (1.1) и (1.8), в которых следует уже учесть спаривание, см. 1.1. Соответствующие 8 графиков без перестановок фононов показаны на рис. 2.11.

Представляет интерес рассмотреть конкретный случай перехода между двухфононным и однофононным состояниями, для которого имеются экспериментальные данные и расчеты в рамках других моделей. В частности, в [62]

была рассмотрена задача о  $E1$  переходе между конкретными двух-фононным и однофононным состояниями в ядрах со спариванием. Авторы вывели формулу (10), рассчитали вероятность наблюдаемых  $E1$  переходов между двухфононным  $1^-$  состоянием, состоящем из низколежащих первых однофононных  $2^+$ - и  $3^-$  состояний, и однофононным  $2^+$  состоянием в трех ядрах  $Sn$ ,  $Sm$ ,  $Nd$ , и получили хорошее согласие с экспериментом. По аналогии с [62] рассмотрим переход между конкретным двухфононным состоянием  $[1 \times 2] \rightarrow 4$  на однофононное состояние 4.

В результате интегрирования 4-х ФГ  $G$

$$A_{1234}^{(1)} = \int G_1(\varepsilon)G_2(\varepsilon - \omega)G_3(\varepsilon - \omega_1)G_4(\varepsilon - \omega + \omega_2)d\varepsilon \quad (2.28)$$

с законом сохранения ( $\omega$  - энергия перехода)

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_4 \quad (2.29)$$

получаются 20 слагаемых, показанных в (2.31). Здесь произведение слагаемых со щелями  $\Delta_i$  выделены в структуру обозначенную  $b_{1234}$ . В том числе, 12 слагаемых содержат по два множителя вида  $u^2u^2$  или  $v^2v^2$  и в пределе отсутствия спаривания соответствуют случаю, когда две частицы (дырки) находятся выше поверхности Ферми, а две дырки (частицы) находятся ниже поверхности Ферми. Эта группа содержит знаменатели  $(E_{12} \pm \omega)$ , где 1, 2-индексы вершины  $V$ , и более сложные знаменатели с суммой энергий двух квазичастиц и двух фононов. По аналогии с [67; 68] мы называем их четырехквазичастичными КОС.

Кроме слагаемых типа  $u^2u^2v^2v^2$  в результате интегрирования 4-х ФГ  $G$  в (2.28) получаются 8 слагаемых с одним из двух коэффициентов Боголюбова и трем другими коэффициентами типа  $u^2v^2v^2v^2$  или  $u^2u^2u^2v^2$ , а именно  $[v_1^2u_2^2u_3^2u_4^2 + u_1^2v_2^2v_3^2v_4^2 + \dots]$ ,  $[u_1^2v_2^2u_3^2u_4^2 + v_1^2u_2^2v_3^2v_4^2 + \dots]$ ,  $[v_1^2v_2^2u_3^2v_4^2 + u_1^2u_2^2v_3^2u_4^2 + \dots]$  и  $[v_1^2v_2^2v_3^2u_4^2 + u_1^2u_2^2u_3^2v_4^2 + \dots]$ . В пределе отсутствия спаривания они соответствуют случаю когда одна частица (дырка) находится выше поверхности Ферми и три дырки (частицы) находятся ниже поверхности Ферми.

После длительных вычислений по взятию соответствующих интегралов от 4-х функций грин и отделению угловых переменных (подробнее в Приложении В) окончательная формула для амплитуды перехода из двухфононного

состояния в однофононное имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \langle [s_1 \times s_2]_{I_3} \parallel M^{(3)} \parallel s_4 \rangle = \sum_{1234} V_{12} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_2} g_{42}^{s_3} \times \\
& \quad \sum_J (-1)^J (u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234}) \cdot \\
& \quad \left[ \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} \right) \times \delta_{I_3 J} \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times (2J + 1) \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} L & I_4 & I_3 \\ I_1 & I_2 & J \end{array} \right\} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & J \end{array} \right\} + [GSC] + [uvvv], \\
& \tag{2.30}
\end{aligned}$$

где мы явно выделили части, совпадающие с формулой (10) [62], и обозначили как [GSC] и [uvvv] дополнительные слагаемые, описанные выше.

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} + \right. \\
& \left. \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{12} + \omega)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{12} - \omega)} \right) \\
& \cdot \left[ u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{34} - \omega_4)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{12} + \omega)} + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{12} - \omega)} \right) \\
& \cdot \left[ u_1^2 v_2^2 v_3^2 v_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{24} + \omega_2)} + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{24} - \omega_2)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{13} - \omega_1)} + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{13} + \omega_1)} \right) \\
& \cdot \left[ u_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + v_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{12} + \omega)(E_{13} + \omega_1)} + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{12} - \omega)(E_{13} - \omega_1)} \right) \\
& \cdot \left[ u_1^2 v_2^2 v_3^2 v_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{12} + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{24} + \omega_2)} + \frac{1}{(E_{12} - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{24} - \omega_2)} \right) \\
& \cdot \left[ v_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + u_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{34} - \omega_4)} \right) \\
& \cdot \left[ v_1^2 v_2^2 u_3^2 v_4^2 + u_1^2 u_2^2 v_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} \right) \\
& \cdot \left[ v_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + u_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234} \right]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Таким образом, формула (10) [62] получается в рассматриваемом нами подходе, если в первом графике на рис. 2.11 не учитывать: 1) указанные четырех-квазичастичные КОС, в том числе, четыре слагаемых типа  $u^2 u^2 v^2 v^2$ ; 2) все 8 слагаемых типа  $u^2 v^2 v^2 v^2$  или  $u^2 u^2 u^2 v^2$ . И на рисунке 2.10 не учитывать: 1) графики с  $g_{12}$  (вторые на рис. 2.10), которые содержат как эффекты тэд-пола, так и и трехквазичастичные КОС; 2) слагаемые с  $\delta F$  и  $\delta_1 \delta_2 F$ , которые,

видимо, малы. Вышесказанное остается справедливым и для задачи без спаривания, рассмотренной в работе [78], если заменить коэффициенты Боголюбова на соответствующие числа заполнения. Для графиков на рис. 2.11, содержащих аномальные ФГ, следует выполнить аналогичные процедуры.

Каждый из этих пунктов применим для многих физических случаев – по мультипольности и энергии переходов, характеристикам фононов и т.п. Иначе говоря, появляется много новых физических вариантов изучения ангармонических эффектов 3-го порядка. К этому следует добавить факт наличия в формулах (2.26) (рис. 2.10), (2.27) вершины  $V$ , описывающей поляризуемость ядра под действием внешнего поля  $V_0$ , которая определяется эффективным взаимодействием нуклонов.

Поскольку для решения этой задачи в рамках КФМ-модели было получено описание экспериментальных данных для случая конкретного  $E1$  перехода между  $[2_1^+ \times 3_1^-]_{1-} \rightarrow 2_1^+$  для двух ядер со спариванием, можно предположить, что КОС и неучтенные эффекты тэдпола могут компенсировать друг друга. Кроме того, как было показано для случаев ангармонизмов второго порядка, экспериментальные данные объясняются только при совместном учете вкладов КОС и поляризуемости. Можно предполагать что то же самое вместе с вкладом от графиков  $g_{12}$  будет важным и для ангармонических эффектов третьего порядка.

## 2.5 Выход за рамки теории ангармонических эффектов Ходеля

Существенное предположение всех вышеупомянутых работ, основа которых была заложена работой Ходеля [44], заключалось в том, что фононы описывались в рамках МХФ или КМХФ. Однако известно, что наблюдаемые фононы содержат вклад двухфононных состояний и это обстоятельство подробно изучается в рамках КФМ [4; 23; 62–65]. В рамках формализма ФГ можно учесть этот вклад двумя способами, которые заметно отличаются друг от друга. Во-первых, путем обобщения уже развитых подходов [18; 69], основанных на включении эффектов связи с фононами, только в квазичастично-квазидырочный пропагатор ТКФС как в магических ядрах, так и ядрах со спариванием. Это представляет интерес в области энергий гигантских и пигми-резонансов и

должно быть реализовано в рамках обобщенной теории этих резонансов. Этой задаче будет посвящена третья глава этой работы. Во-вторых, этот вклад необходимо рассмотреть с использованием связи между амплитудами рождения одного и двух фононов, т.е. связи амплитуд  $g$  и  $g_{12}$ , определяемой в простейшем приближении  $L_1 = L_2$  как эффекты тэдпола. Иначе говоря, представляет интерес обобщить результаты ТКФС, чтобы в рамках  $g^2$ -приближения и на языке метода ФГ учесть эффекты смешивания однофононных и двухфононных возбуждений для лучшего описания самих низколежащих фононов, точнее, проверить степень адекватности описания фононов в рамках МФХ (и аналогично, если понадобится в будущем, включить  $g^3$ -поправки). Это обобщение является целью данного раздела.

Как обсуждалось в разделе 1.2, в работах группы Курчатовского института большое внимание уделялось подробному изучению эффектов тэдпола, который содержит  $g_{LL}$ . Это связано с тем, что учет тэдпола необходим для последовательного учета "духового" состояния, соответствующего случаю фонона с  $L = 1, \omega = 0$ , т.е. сдвигу системы как целого, когда система не меняется. В этом случае для поправок к среднему полю учет тэдпола (локальная, или "охватывающая" диаграмма) полностью сокращает полюсные диаграммы, см. рис. 1.1. Как оказалось, для реальных фононов вклад тэдпольных диаграмм в  $g^2$ -поправках к среднему полю заметен и частично компенсирует вклад полюсных диаграмм [19].

Для статических электромагнитных моментов нечетных ядер в основном состоянии [79; 80] был выполнен анализ  $g^2$ -поправок с использованием самосогласованного подхода на основе функционала Фаянса. Поскольку эти величины определяются диагональным матричным элементом от вершины (эффективного поля)  $V$ , описываемой в рамках (К)МХФ, точнее в рамках самосогласованной ТКФС, то анализ  $g^2$ -поправок выполнялся для матричных элементов от вершины  $V$ . Были рассмотрены три вида  $g^2$ -поправок: 1) основные пять поправок, которые дают большой вклад, — так называемые концевые поправки, и поправки от появления дополнительного взаимодействия, обусловленного обменом фононами, которые, как оказалось, дают противоположные по знаку вклады и сильно компенсируют друг друга, 2) несколько поправок, которые содержат электромагнитный момент в возбужденном состоянии, именно они оказались важными из-за того, что поправки первой группы сильно компенсируют друг друга, 3) поправки, связанные с изменением частично-дырочного пропагатора



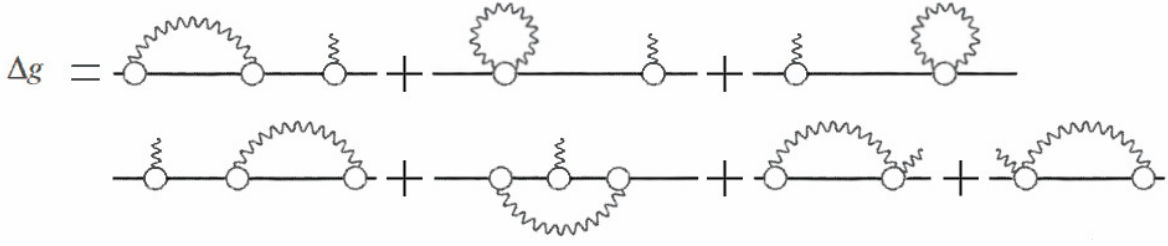


Рисунок 2.12 — Диаграммы, определяющие  $g^2$ -поправки к амплитуде рождения одного фонона.

(две группы), и некоторые другие; эти поправки анализировались, и было показано, что их не надо учитывать в данной задаче. Кроме поправок к статическим величинам (среднее поле, моменты нечетных ядер), величины  $g_{12}$  с  $L1 = L2$  оказались необходимыми для анализа динамических эффектов второго и третьего порядков по амплитуде  $g$  (см. разделы 2.2-2.4). Однако  $g^2$  поправки к самой амплитуде рождения фонона до этого момента не рассматривались.

Для простоты в этой поисковой работе рассматриваются магические ядра и не учитываются эффекты порядка  $g^3$ , содержащие амплитуду рождения трех фононов  $\delta^{(2)}g = \delta_1\delta_2g_3 = g_{123}$ . Кроме того, не учитываются члены порядка  $g^5$ .

Тогда  $g^2$ -поправки к матричному элементу  $g_{\lambda_1,\lambda_2} = (\varphi_{\lambda_1}, g\varphi_{\lambda_2})$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta g_{\lambda_1,\lambda_2} = & (\delta^{(2)}\varphi_{\lambda_1}, g\varphi_{\lambda_2}) + (\varphi_{\lambda_1}, g\delta^{(2)}\varphi_{\lambda_2}) + (\delta^{(1)}\varphi_{\lambda_1}, g\delta^{(1)}\varphi_{\lambda_2}) + \\ & (\delta^{(1)}\varphi_{\lambda_1}, \delta^{(1)}g\varphi_{\lambda_2}) + (\varphi_{\lambda_1}, \delta^{(1)}g\delta^{(1)}\varphi_{\lambda_2}) \equiv \Delta g_{\lambda_1\lambda_2}^{end} + \Delta g_{\lambda_1\lambda_2}^{GGD} + \Delta g_{\lambda_1\lambda_2}^{new} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Диаграммы Феймана, отвечающие этим поправкам, показаны на рис. 2.12. Величина  $\Delta g_{\lambda_1\lambda_2}^{end}$  содержит четыре слагаемых, показанных на первых четырех графиках, а  $\Delta g_{\lambda_1\lambda_2}^{new}$  — это два последних слагаемых из пяти в (2.32), представленными двумя последними графиками на рис. 2.12. Что касается двух последних слагаемых в (2.32) и на рис. 2.12, то для анализа их вклада необходимо попытаться использовать уже имеющуюся оценку самой величины  $g_{12}$ , а именно оценить связь амплитуды рождения одного и двух фононов.

Эта связь, которая иллюстрируется на рис. 2.12 двумя последними графиками, требует специального анализа. Во-первых, можно с большой степенью уверенности утверждать, что слагаемые, соответствующие сумме пятого графика и первых четырех графиков на рис. 2.12, сильно компенсируют друг друга. Для аналогичного случая, когда вместо амплитуды  $g$  входит вершина  $V$ , это показано в расчетах магнитных и квадрупольных моментов основного состояния нечетных ядер в работах [79; 80]. Поэтому остальные два слагаемых на рис. 2.12, которые реализуют связь амплитуд одного и двух фононов, могут

оказаться существенными. Во-вторых, это обстоятельство является весьма важным, хотя бы частично, в силу физических причин, описанных выше. Как уже говорилось, решение уравнения (1.15) для амплитуды рождения двух фононов, входящей в эти два графика, весьма трудоемко. Оно решалось в координатном представлении только в работах А.П. Платонова [81] для других величин по сравнению теми, что интересуют нас в рамках наших работ. Проведя соответствующие преобразования (см. Приложение Г) получаем соответствующие формулы для величины  $\Delta g_{LL}^{new}$ :

$$(\Delta g_{LL}^{new})_I = (\Delta g_{LL}^{new})_{\lambda_1 \lambda_2 L M'} = (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -m_1 & m_2 & M' \end{pmatrix} (\Delta g_{LL}^{new})_{\nu_1 \nu_2 L}, \quad (2.33)$$

$$(\Delta g_{LL}^{new})_{\nu_1 \nu_2 L} = (-1)^{(j_1 - m_1)} (2L + 1) \begin{pmatrix} L & L & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{\nu_3 K} \left( \frac{2K + 1}{4\pi} \right)^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ K & L & j_3 \end{matrix} \right\} \cdot \langle \nu_3 \| Y_K \| \nu_2 \rangle \langle \nu_1 \| g^L \| \nu_3 \rangle I_{\nu_1 \nu_3 L} (M_{LL}^K)_{\nu_3 \nu_2}, \quad (2.34)$$

где

$$(M_{LL}^K)_{\nu_3 \nu_2} = \int R_{\nu_3}^* M(r) R_{\nu_2} r^2 dr, \quad (2.35)$$

величины  $M(r)$  приведены в [81] и Приложении Г (Г.4),  $R_{\nu_3}, R_{\nu_2}$  - одночастичные радиальные волновые функции и приведенные матричные элементы рассчитываются по обычной схеме.

Расчеты, как по полученным новым формулам (2.33), так и по остальным формулам, соответствующим графикам на рис. 2.12, вклад которых необходимо проверить, должны быть сделаны позднее. В первую очередь необходимо завершить работу путем обобщения уже развитых подходов, основанных на включении эффектов связи с фононами в квазичастично-квазидырочный пропагатор ТКФС на область энергий гигантских и пигми-резонансов.

## 2.6 Выводы

Получены формулы для амплитуд перехода для состояний с двумя и тремя фононами в магических и полумагических ядрах. Они позволяют выпол-

нить расчеты квадрупольных и октупольных моментов, а также приведенных вероятностей переходов между однофононными состояниями, или между однофононным и двухфононным состояниями, исходя из небольшого набора параметров энергетического функционала плотности. Выполненные расчеты приведенных вероятностей переходов между однофононными состояниями на основе успешного себя зарекомендовать функционала Фаянса с параметрами DF3-а показали достаточно хорошую точность как для магических, так и для полумагических ядер. Было обнаружено, что новый для динамической задачи эффект – трехквазичастичные КОС обеспечивают значительный вклад в результирующую величину.

Получено, что при расчетах  $E1$  переходов величина вероятности  $B(E1)$  определяется разностью двух больших эффектов – эффекта поляризуемости и эффектов КОС. В то время, как учет КОС увеличивает величину вероятности примерно на порядок, учет поляризуемости уменьшает ее на аналогичную величину. Показано, что в магических ядрах этот эффект проявляется сильнее, вследствие отсутствия спаривания. В полумагических ядрах большой вклад спаривания для изотопов  $^{110-124}\text{Sn}$  обеспечен высокой степенью изовекторности  $E1$  поля. Вследствие этого факта в полумагических ядрах эффект поляризуемости частично компенсирован спариванием, и в итоге происходит уменьшение примерно в три раза.

Показано, что для исследуемого спектра задач, по крайней мере связанных со взаимодействием двух фононов, для описания амплитуды рождения фонона пока достаточно использования приближения  $g_s = g_{I_s 0} Y_{I_s M}$ .

Подготовлен базис для проведения расчетов для задач с тремя фононами. Полученная формула для расчетов переходов между однофононным и двухфононным состояниями показала наличие двух типов четырехквазичастичных КОС: простые четырехквазичастичные КОС с коэффициентами Боголюбова  $u^2 u^2 v^2 v^2$ , аналогичные по структуре трехквазичастичным КОС, и несколько новых членов с коэффициентами Боголюбова  $u^2 v^2 v^2 v^2$  и  $v^2 u^2 u^2 u^2$ , описывающих конфигурации с 1 квазичастицей над Ферми-барьером, и тремя под ним.

Во всех выполненных расчётах использовалось предположение, что все фононы описываются в рамках МХФ или квазичастичного КМХФ, однако данные экспериментов и работы в рамках КФМ [23; 62–65] говорят о необходимости выхода за пределы этого приближения. Предложено использовать 2 схемы: 1) введение  $g^2$  поправки к амплитуде рождения фонона, что позволяет учиты-

вать связь амплитуд рождения одного и двух фононов, 2) обобщение метода на область энергий пигми- и гигантских резонансов. В первой схеме анализ  $g^2$  поправок показал появление ряда новых членов в уравнении для амплитуды рождения фононов. Наибольший интерес будет иметь применение предлагаемого подхода к полумагическим ядрам, где указанные поправки могут достаточно заметно изменить результаты, полученные с использованием указанного предположения.

### Глава 3. Учет квазичастично фононного взаимодействия в области энергий ПДР и ГМР

Современная микроскопическая теория ПДР и ГМР включают в себя 2 основных момента: учет самосогласования между средним полем и эффективным взаимодействием и учет эффектов спаривания низколежащих фононов [6; 9]. Учет квазичастично-фононного взаимодействия (КФВ) объяснил третью интегральную характеристику ГМР – их ширины [9; 18]. Самосогласованный подход оказался очень полезным для астрофизических приложений даже на уровне квазичастичного МХФ из-за его большой предсказательной способности [82]. Кроме того, включение КФВ привело к значительному улучшению описания свойств ГМР и соответствующих приложений [6; 9; 69], хотя некоторые проблемы возникают даже для магических ядер, например, связанных с параметрами Скирма [83] и учетом спин-спиновых сил [24], которые универсальны для всех ядер. Что касается ПДР, ситуация более сложная и требует более подробного рассмотрения. Во-первых, это обусловлено существованием многих новых и тонких физических эффектов в этой энергетической области, таких как безвихревые и вихревые виды движения (тороидальный дипольный резонанс, присутствующий во всех ядрах, а ПДР проявляется в ядрах с  $N > Z$  [6; 9; 84]), загиб радиационной силовой функции (РСФ) в области 1-3 МэВ. Кроме того, появились новые экспериментальные возможности [6–8], например, эксперименты по неупругому рассеянию поляризованных протонов под прямым углом [7]. Во-вторых, оказалось невозможно полностью объяснить наблюдаемую тонкую структуру ПДР в рамках новейшего самосогласованного подхода с функционалом Скирма и учетом КФВ [24] в ядре  $^{208}\text{Pb}$ , который всегда был основным ядром для проверки теории и эксперимента в области энергий ПДР и ГМР.

Поэтому остро стоит вопрос описания тонкой структуры ПДР и ГМР, требующий учета большего количества фононных конфигураций. Ранее в данной области применялись несамосогласованные методы, основанные на ТКФС, однако ключевой особенностью описания тонкой структуры должно быть самосогласованное описание КФВ. Успехи, достигнутые в рамках самосогласованной ТКФС в области описания основного и низколежащих коллективных состояний, мультипольных моментов и переходов между возбужденными состояниями дают надежду на столь же успешное ее применение в области энергий ПДР

и ГМР. Поэтому нашей новой целью было разработать последовательный самосогласованный метод, базирующийся на методе ЭФП и аппарате ФГ для описания КФВ, позволяющий единообразно работать в большом энергетическом диапазоне (до 30-40 МэВ). Для этого необходимо последовательно учесть все эффекты КФВ, т.е. включить КФВ члены не только в  $ph$ -пропагатор, но и в другие величины, содержащиеся в аппарате ФГ, например, в эффективное взаимодействие. Мы увидим, что такой подход дает новые эффекты, которые могут быть важны для микроскопического описания ПДР и ГМР.

Настоящая глава основана на работах автора [32–34].

В нашей работе [32] (раздел 3.2) последовательный метод вариаций использованный в [15], был перенесен на область энергий ПДР и ГМР. Это сразу же привело к появлению новых и неизученных в этой области эффектов, именно динамического эффекта тэдпола, эффектов изменения эффективного взаимодействия  $\delta F$  в поле фононов. Во всех наших работах [32–34] не использовалась процедура факторизации, что привело к заметному усложнению всех формул.

В статье [33] (раздел 3.3) была развита микроскопическая модель для учета сложных конфигураций в области энергий ПДР и ГМР. Исходным было основное понятие ТКФС вершина, описывающая поляризуемость ядра под действием внешнего поля. Впервые были получены: 1) Точные выражения для первой и второй вариаций вершины  $\delta^{(1)}V \equiv \delta V$  и  $\delta^{(2)}V$ . 2) Перспективные уравнения для новой вершины, включающие полную амплитуду взаимодействия  $\Gamma$ , которая удовлетворяет уравнению метода хаотических фаз (МХФ), сформулированному на языке ФГ. 3) Впервые в рамках ТКФС - двух-фононные конфигурации ( в дополнение к сложным конфигурациям  $1p1h \otimes$  фонон). В конце раздела кратко обсуждается обобщение [34] предыдущих результатов на учет второй  $g^2$ -поправки к вершине и, как следствие, появлению зависимости от четвертой (энергетической) переменной  $\tilde{V}(\epsilon, \omega)$ .

Также в конце раздела 3.3 кратко обсуждается обобщение, основанное на статье [34], предыдущих результатов на учет второй  $g^2$ -поправки к вершине и, как следствие, появлению зависимости вершины от четвертой (энергетической) переменной  $\tilde{V}(\epsilon, \omega)$ .

Раздел 3.4 посвящен дальнейшей разработке вышеупомянутой микроскопической модели и описанию новых эффектов, связанных с появлением регулярной части  $\Gamma^r$  полной амплитуды  $\Gamma$ .

### 3.1 История вопроса

Изучение пигми- и гигантских резонансов (ПДР, ГМР) продолжает оставаться одним из центральных направлений развития физики низких энергий [6; 9; 85]. Центральное место занимает изучение роли связи с фононами в этих явлениях [4; 15; 17; 61]. В теоретических работах главным является использование самосогласованных подходов, которые имеют большую предсказательную силу, что особенно важно для астрофизики и ядерных данных.

Как известно, в процессе возбуждения ядра внешним полем могут возбуждаться не только одно-фононные, но и двух-фононные состояния, см. например [6; 9; 17; 18; 62; 85]. Кроме того, включение двух-фононных состояний важно для объяснения характеристик ПДР и ГМР. Эти вопросы достаточно успешно решались как в рамках КФМ [4; 17; 23; 62–64], так и в приближение временного блокирования (ПВБ) [86] и его вариантах. Однако, несмотря на довольно быстрое и успешное развитие, мы думаем что пространство для дальнейшей работы еще остается.

По нашему мнению, перспективным подходом является использование метода функций Грина (ФГ) и дальнейшее развитие Теории Конечных Ферми-Систем (ТКФС) [2]. Например в работах [20; 21; 87–89] уравнение для вершины – основного понятия ТКФС, определяющее поляризуемость ядра, - было обобщено на случай учета квазичастично-фононного взаимодействия в пропагаторе уравнения ТКФС для вершины и были выполнены соответствующие расчеты М1-резонансов в магических ядрах, которые с помощью включения эффекта фононов объяснили актуальную в то время проблему "исчезновения М1-резонанса".

Ранее в части вышеупомянутых работ для описания вершины использовалось уравнение

$$V' = e_q V^0 + F[A + A']V' \quad (3.1)$$

показанное на рис. 3.1. Здесь  $A$  – обычный  $1p1h$ -пропагатор ТКФС,  $A'$  – пропагаторы с  $g^2$ -поправкой со вставками и поперечным фононом.

Как говорилось во Введении, в рамках самосогласованной ТКФС изучались только характеристики основного и первых коллективных возбужденных

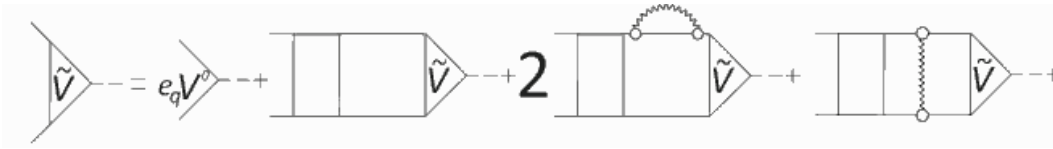


Рисунок 3.1 — Уравнение для вершины  $V'$ . Последние две диаграммы содержат  $g^2$ -поправки.

состояний. Одновременно с этим (указанными работами) метод ФГ применялся для описания ПДР и ГМР, как в рамках несамосогласованных [18; 20; 21], так и самосогласованных [25; 26] подходов. Отличие между [20] и [21] состояло в том, что в [21] недостаток метода [20] был исключен, именно, был предложен приближенный метод хронологического разделения диаграмм (МХРД), или (используя более современную терминологию) приближение временного блокирования (ПВБ). Указанный недостаток был не важен для объяснения свойств М1-резонанса, находящегося в области энергий ПДР [88; 89]. Более того, фактически ранее он применялся в рамках Теории Ядерных Полей (ТЯП) и для электрических ГМР [90; 91] с использованием параметра усреднения 600 кэВ. Позднее этот метод был значительно модифицирован и для задач в ядрах со спариванием был назван квазичастичным ПВБ [61; 92]. Однако главное физическое содержание этого метода, т.е. включение КФВ только в частично-дырочный пропагатор (на языке ТКФС), сохранялось всегда, несмотря на тот факт, что при выводе использовался другой подход, основанный на уравнении Бете–Солпитера и использовался формализм функций отклика.

В работах [21; 86; 87] в рамках метода ФГ был использован рецепт исключения полюсов второго порядка (метод МХРД или, пользуясь более современной терминологией, ПВБ), что позволило позднее выполнить расчеты характеристик резонансов вплоть до расчетов тонкой структуры ПДР и М1 резонанса [24; 93]. Дальнейшее развитие этого подхода пошло по пути учета более сложных, чем  $1p1h$  фонов-конфигураций в рамках так называемой двух-фононной модели [25; 60]. В этой модели был использован аппарат функций отклика, т.е. (величины, описываемой четырьмя индексами), основанный на уравнении Бете–Солпитера. При этом, кроме рецепта МХРД, использовалось другое приближение — так называемая процедура факторизации функции отклика, которая позволила сильно упростить уравнение и выполнить соответствующие расчеты для низко-лежащих двух-фононных возбуждений в изотопах олова в рамках релятивистской двухфононной модели [60].



Метод вариаций, предложенный в [15;44], успешно развивался и использовался для последовательного описания характеристик основного и нескольких коллективных низколежащих состояний в рамках самосогласованной ТКФС в работах [15;19;44], которые можно считать вторым этапом развития ТКФС.

### 3.2 Учет сложных $1p1h \otimes$ фонон-конфигураций

В данной главе мы будем рассматривать только магические ядра и обсуждаем только  $g^2$ -поправки, где  $g$  — амплитуда рождения фонона. Как обычно, мы используем факт существования малого параметра  $g^2$  (см. раздел 1.1). Наша цель — найти  $g^2$ -поправки к вершине  $V$ , которая описывается стандартным уравнением ТКФС [2],

$$V = e_q V^0 + FAV, \quad (3.2)$$

чтобы написать в рамках метода ФГ новое уравнение для вершины, учитывающей все  $g^2$  поправки к  $V$ . Первый член уравнения (3.2) содержит уравнение локального заряда и внешнее поле  $V_0$  с энергией  $\omega$ . Мы предполагаем, что наш подход является самосогласованным, т.е. среднее поле и эффективное взаимодействие  $F$  определяются соответственно, как первое и второе вариации эффективного функционала плотности. В этом смысле наш подход — обобщение самосогласованной ТКФС с учетом КФВ-поправок в энергетической области ПДР и ГМР.

Есть только две возможности найти  $g^2$  поправки к самой вершине  $V$ : первая — они должны содержать поправка второго порядка к самой  $V$ , другой заключается в том, что они могут содержать поправку первого порядка по  $g$  к  $V$  вместе с другой на конечную линию вершины  $V$ . Тогда, также используя общую аналогию для упомянутой выше  $g^2$ -поправки к среднему полю можно записать  $g^2$ -поправки к вершине  $V$ :

$$\tilde{V} = V + \Delta V(g, V) \quad (3.3)$$

и

$$\Delta V = 2gDG\delta^{(1)}V + \delta^{(2)}VD, \quad (3.4)$$

$$\Delta V = 2 \left( \text{triangle with wavy line and circle} \right) + \left( \text{triangle with wavy line and dashed line} \right)$$

Рисунок 3.2 —  $g^2$ -поправка к вершине  $V$ 

где величины  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  — первая и вторая вариации вершины в поле фона.  $g^2$ -поправки к  $V$  показаны на рис. 3.2. Второй член выражения (3.4), рис. 3.2, содержит «чистые»  $g^2$  поправки, которые в некотором смысле похожи на тэдпол на рис. 1.1, а первый член в формуле (3.4), рис. 3.2, есть "смесь" между поправкой первого порядка для вершины  $V$  и «концевой» поправкой первого порядка по  $g$ .

Поправки  $\Delta V$  уже фигурировали при рассмотрении совсем другой проблемы, а именно расчетов  $g^2$ -поправок к матричным элементам  $(\varphi_{\lambda_1}, V \varphi_{\lambda_2})$  для статических электромагнитные моменты нечетных ядер в основном состоянии [79; 80]. Эта задача сводилась к анализу восьми членов с  $g^2$  поправками, из которых пять членов содержат  $\delta^{(2)}\varphi_{\lambda}$  (так называемые концевые поправки), а остальные три члена соответствуют нашим поправкам  $\Delta V$ , уравнение (3.4), но в статической форме, а в нашем случае они нужны при энергиях PDR и GMR. Как оказалось, эти пять членов, сильно зависящих от одночастичные концов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  заметно компенсируют друг друга. Для некоторых частных случаев остальные три поправки были оценены и, как оказалось, для рассматриваемых задач в [79; 80] соответствующие  $g^2$ -поправки не должны отбрасываться, так как они важны не для отдельных случаев  $\lambda_1 = \lambda_2$ , но для случая, когда они содержат большие суммы небольших по величине слагаемых. И именно последний случай имеет большой интерес для описания ПДР и ГМР, которые, как известно, обусловлены когерентными суммами многих конфигураций  $1p1h + (1p1h \otimes \text{фонон})$ .

Варьируя уравнение (3.2) получаем выражение для величин  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$ :

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}V &= \delta^{(1)}FAV + F\delta^{(1)}AV + FA\delta^{(1)}V, \\ \delta^{(2)}V &= \delta^{(1)}\delta^{(1)}V = F\delta^{(2)}AV + \\ &\quad \delta^{(1)}F\delta^{(1)}AV + \delta^{(1)}FA\delta^{(1)}V + F\delta^{(1)}A\delta^{(1)}V + \\ &\quad \delta^{(2)}FAV + FA\delta^{(2)}V \end{aligned} \quad (3.5)$$

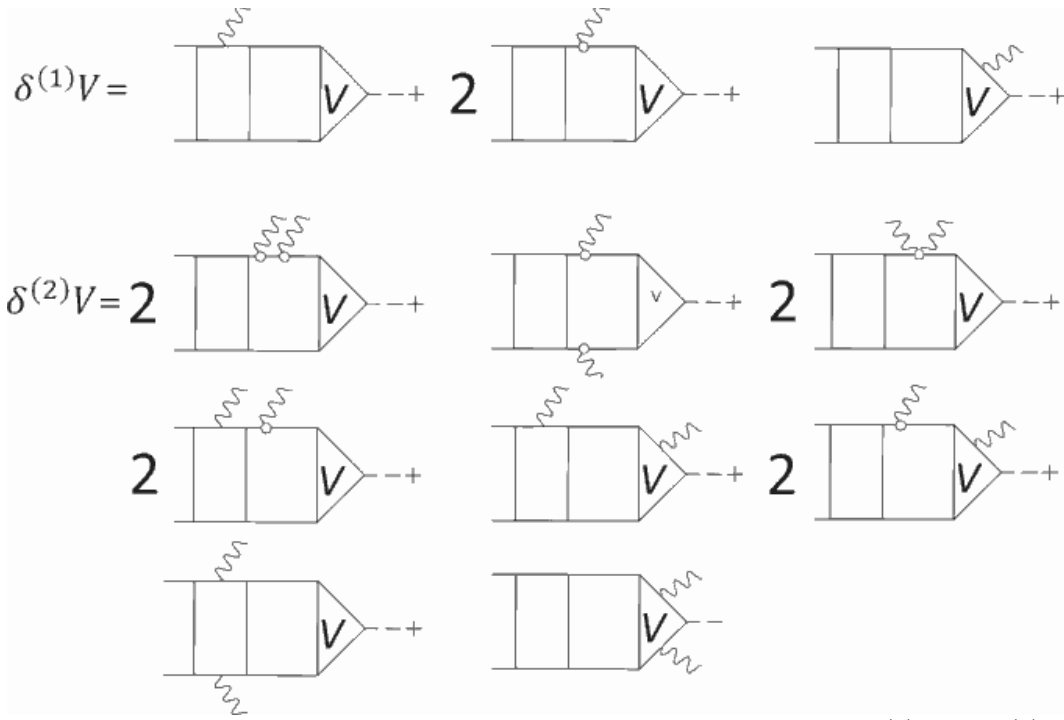


Рисунок 3.3 — Первая и вторая вариации вершины  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  в поле фонона. Прямоугольники с одной и двумя волнистыми линиями обозначают эффективное взаимодействие  $F$  и его вариации в поле фонона.

Как можно видеть из этих уравнений, рис. (3.3), величины  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  связаны сложной системой интегральных уравнений, первое из которых содержит 3 свободных члена, а второе пять. Система может быть решена с использованием некоторых аппроксимаций (см. разделы 1.2, 3.3), однако для лучшего физического понимания задачи для первичного анализа, как будет видно, пока достаточно учесть свободные члены уравнений (3.5). Конечно, данный подход, как будет видно, лишает нас двухфононных конфигураций, но для целей анализа сложных  $1p1h \otimes$  фонон-конфигураций этого уже достаточно.

Возвращаясь к новому уравнению для вершины и используя свободные члены для определения вариаций  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$ , получаем новое уравнение для новой вершины  $\tilde{V}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{V} = & e_q V^0 + F A \tilde{V} + 2 F G g D G g G G \tilde{V} + F G g G D G g G \tilde{V} \\
& + 2 F G g_{\bar{1}\bar{1}} D G G \tilde{V} + 4 g G D F G g G G \tilde{V} + \\
& 4 F G g D G G F G g G G \tilde{V} + \\
& 2 g \delta F D G G G \tilde{V} + 2 \delta F D G g G G \tilde{V} + \\
& 2 \delta F D G G F G g G \tilde{V} + 2 F G g D G G \delta F G G \tilde{V} + \\
& 2 \delta F D G G \delta F G G \tilde{V} + \delta^{(2)} F D G G \tilde{V}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

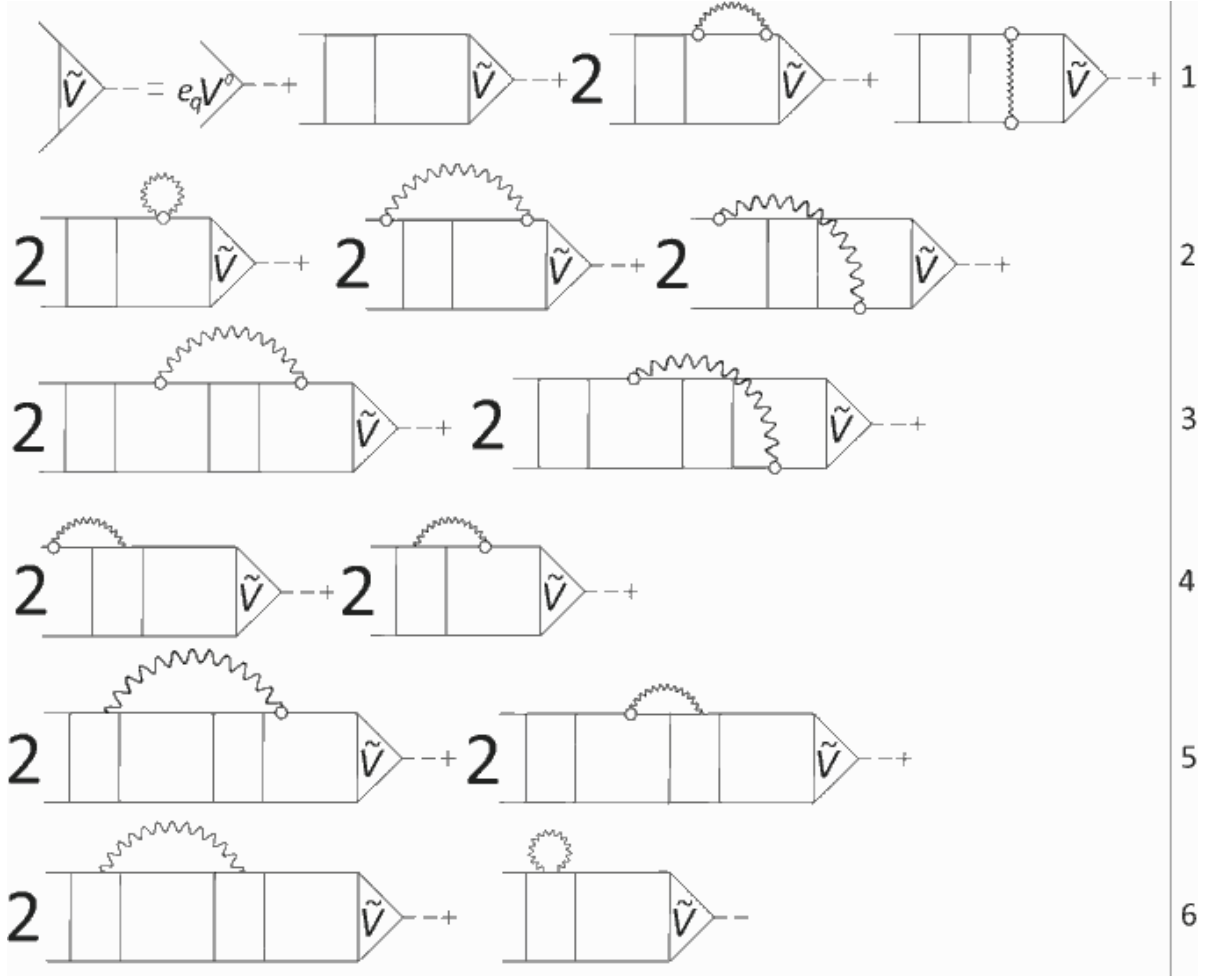


Рисунок 3.4 — Уравнение (3.6) для новой вершины  $\tilde{V}$  с учетом КФВ в диаграммном представлении. Нумерация линий совпадает с расположением соответствующих членов в уравнении (3.6). Прямоугольники — эффективное взаимодействие  $F$ .

Оно показано на рис. 3.4. Линии в формуле (3.6) и рис. (3.4) соответствуют друг другу. В связи с символической формой записи уравнения (3.6), его члены с цифрой 4 соответствуют двум различным видам графиков. Как видно из рис. 3.4 все члены уравнения(3.6) содержат только сложные  $1p1h \otimes$  фонон-конфигурации в магических ядрах.

Таким образом, мы получили следующие результаты: все слагаемые в первой строке уравнения (3.6), рис. 3.4, соответствуют предыдущему подходу для уравнения  $V'$ , который использует только  $ph$ -пропагатор с КФВ [20; 21; 89] или МХРД пропагатор [83], как показано на рис. 3.1. Остальные строки содержат новые вклады, отличающиеся от этого подхода: (1) эффекта тэдпола который вошел в стандартную схему  $ph$ -пропагатора (первый член второй строки), (2) два новых индуцированные взаимодействия (за счет обмена обычным частично-дырочным фононом) во втором частично-дырочном канале и в канале частица-частица (второй и третьей линии) и 3) первая и вторая вариации эффективного взаимодействия в фононном поле (четвертая, пятая и шестая линии).

Для удобства обсуждения пронумеруем члены уравнения (3.6) в соответствии с номером строки, в которой они находятся на рис.(3.4).

$$\tilde{V} = \tilde{V}^1 + \tilde{V}^{tad} + \tilde{V}^2 + \tilde{V}^3 + \tilde{V}^4 + \tilde{V}^5 + \tilde{V}^6 \quad (3.7)$$

1. Первый член,  $\tilde{V}^1$ , соответствует предыдущим подходам [20; 21; 83; 89], в которых используется  $ph$ -пропагатор с КФВ, показанный в первой строке рис. 3.4.

2. Во вторых строках уравнения (3.6), рис. 3.4, мы получили вклад тэдпола  $\tilde{V}^{tad}$  и четыре графика с общей структурой, похожей на графики КФВ первой строки в том смысле, что все они содержат четыре ФГ  $G$ , однофононную ФГ  $D$  и амплитуды рождения фонона  $g$ .

3. В третьей строке находятся достаточно сложные графики с двумя амплитудами эффективного взаимодействия  $F$ , шестью ФГ  $G$ , однофононной ФГ  $D$  и амплитудой рождения фонона  $g$ . Все остальные: четвертая, пятая и шестая строки содержат вариации эффективного взаимодействия  $\delta F$  первого и второго порядка.

4. В четвертой строке достаточно простые графики с тремя ФГ  $G$ , однофононной ФГ  $D$ , и амплитудой рождения фонона  $g$  и вариацией  $\delta F$ .

5. В пятой строке у нас довольно сложные графики, которые содержат одновременно эффективное взаимодействие  $F$ , его вариации  $\delta F$  и амплитуду рождения одного фонона  $g$ .

6. Наконец, в последней, шестой, строке можно видеть одну ФГ  $D$ , две вариации первого порядка от эффективного взаимодействия  $F$ , четыре ФГ  $G$

(первый график) и вариация второго порядка  $\delta^{(2)}F$  с двумя ФГ  $G$  и одной ФГ  $D$  (второй график).

В разделе 3.4 мы кратко опишем схему расчетов наблюдаемых характеристик в рамках нашего подхода. Это также может быть полезно для расчетов и анализа отдельных слагаемых уравнения (3.6), рис. 3.4.

### 3.3 Микроскопическая модель учета сложных $1p1h \otimes$ фонон и двухфононных конфигураций

В разделе 3.2, был рассмотрен новый подход в теории ПДР и ГМР, основанный на последовательном включении эффектов КФВ в ТКФС с целью ее обобщения в область энергий ПДР и ГМР для магических ядер. Однако, учитывались только сложные конфигурации с фононами вида  $1p1h \otimes$  фонон. Несмотря на ограниченность такого подхода, например, отсутствие двухфононных конфигураций, см. [94], удалось получить ряд новых эффектов: динамический эффект тэдпола, фонон-обменное эффективное взаимодействие, обусловленное обменом фононами в различных каналах, первая и вторая вариации эффективного взаимодействия в поле фонона. При выводе уравнений (3.6) использовалось существенное предположение для первой  $\delta^{(1)}V$  и второй  $\delta^{(2)}V$  вариаций вершины в поле фононов т.е. учитывались лишь свободные члены уравнений для этих вариаций вершин. Это приближение привело к учету только сложных конфигураций  $1p1h \otimes$  фонон. В этой главе мы отказываемся от этого приближения, т.е. получаем и используем точные выражения для  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  и с их помощью получаем новые уравнения для вершины.

В разделе 3.2 был получен в некотором смысле неожиданный результат: благодаря одной из двух использованных  $g^2$ -поправок к вершине, которая содержала амплитуду рождения фонона  $g$ , новая вершина зависела от энергетической переменной  $\epsilon_1$ , т.е. зависела от  $\epsilon_1$  не на массовой поверхности  $\epsilon_1 = \epsilon_{\lambda_1}$ . Такая зависимость интересна сама по себе и явно не содержится в главных наблюдаемых характеристиках – энергиях и вероятностях переходов. Однако представляется полезным упростить задачу и изучить модель, в которой эта зависимость отсутствует. Это есть "модельность" нашей модели, т.е. использование только главной поправки к вершине.

$$\Delta V = \delta^{(2)}VD, \quad (3.8)$$

показанный на рис. 3.5.

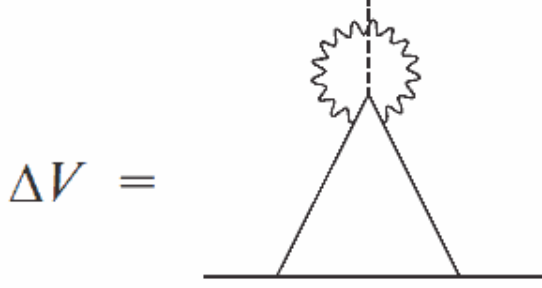


Рисунок 3.5 — Диаграммное представление основной  $g^2$  поправки (3.8) для вершины.

Как мы увидим, такой подход позволяет прояснить ситуацию с учетом КФВ, по крайней мере, в широких рамках обобщения стандартной ТКФС. В этом разделе, будут рассмотрены только  $1p1h \otimes$  фонон- и двухфононные конфигурации в магических ядрах.

Поскольку в уравнение для  $\delta^{(2)}V$  входит  $\delta V$  необходимо рассматривать систему уравнений для обеих вариаций вершины

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}V &= \delta^{(1)}FAV + F\delta^{(1)}AV + FA\delta^{(1)}V, \\ \delta^{(2)}V &= \delta^{(1)}\delta^{(1)}V = F\delta^{(2)}AV + \\ &\quad 2\delta^{(1)}F\delta^{(1)}AV + 2\delta^{(1)}FA\delta^{(1)}V + 2F\delta^{(1)}A\delta^{(1)}V + \\ &\quad \delta^{(2)}FAV + FA\delta^{(2)}V. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Перепишем уравнения (3.9) для  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} (1 - FA)\delta^{(1)}V &= (\delta^{(1)}V)_0, \\ (1 - FA)\delta^{(2)}V &= (\delta^{(2)}V)_0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $(\delta^{(1)}V)_0$  и  $(\delta^{(2)}V)_0$  – свободные члены уравнений (3.9). Или в другой форме:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}V &= (1 - FA)^{-1}(\delta^{(1)}V)_0, \\ \delta^{(2)}V &= (1 - FA)^{-1}(\delta^{(2)}V)_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Полная амплитуда частично-дырочного взаимодействия  $\Gamma$  удовлетворяет уравнению

$$\Gamma = F + F A \Gamma. \quad (3.12)$$

Следуя [44], введем величину  $d\Gamma$  (чтобы избежать смешивания с обычной вариацией для  $\Gamma$ , мы переопределили ее вместо  $\delta\Gamma$  в [44]):

$$d\Gamma = \delta^{(1)}F + F A d\Gamma. \quad (3.13)$$

Далее используем следующие символические выражения, полученные из уравнений (3.12) и (3.13):

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1 - FA)^{-1}F, \\ d\Gamma &= (1 - FA)^{-1}\delta^{(1)}F. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя свободные члены  $(\delta^{(1)}V)_0$  и  $(\delta^{(2)}V)_0$  уравнений (3.9) в (3.11) и используя (3.14), получаем точные выражения для  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$ :

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}V &= d\Gamma AV + \Gamma \delta AV, \\ \delta^{(2)}V &= \Gamma \delta^{(2)}AV + 2d\Gamma \delta AV + 2d\Gamma A \delta^{(1)}V + \\ &\quad 2\Gamma \delta A \delta^{(1)}V + d^{(2)}\Gamma AV, \end{aligned} \quad (3.15)$$

которые содержат уже  $\Gamma$  и  $d\Gamma$  вместо  $F$  и  $\delta F$ . Мы ввели новую величину

$$d^{(2)}\Gamma = \delta^{(2)}F + F A d^{(2)}\Gamma, \quad (3.16)$$

или

$$d^{(2)}\Gamma = (1 - FA)^{-1}\delta^{(2)}F. \quad (3.17)$$

Полученные точные выражения для  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  показаны на рис. 3.6.

Теперь обратим внимание на исходную формулу для вершины (3.3). Можно видеть что выражение (3.3) есть первая итерация следующего уравнения (если  $V$  (3.2) является нулевой итерацией):

$$\tilde{V} = V + \Delta V(g, \tilde{V}), \quad (3.18)$$

где  $\Delta V(g, \tilde{V})$  содержит уже новую вершину  $\tilde{V}$  в величинах  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  из (3.15). Тогда, используя (3.2) и (3.8), можно получить

$$\tilde{V} = V^0 + F A \tilde{V} + (1 - FA)\Delta V(g, \tilde{V}). \quad (3.19)$$



$$\delta V = \text{[Vertex]} = \text{[Box } d\Gamma \text{]} + 2 \text{[Box } \Gamma \text{]}$$

$$\delta^{(2)} V = 2 \text{[Box } \Gamma \text{]} + \text{[Box } \Gamma \text{]} + 2 \text{[Box } \Gamma \text{]} + 2 \text{[Box } d\Gamma \text{]} + 2 \text{[Box } d\Gamma \text{]} + 2 \text{[Box } d\Gamma \text{]} + 2 \text{[Box } d^{(2)}\Gamma \text{]}$$

Рисунок 3.6 — Точные выражения для вариаций  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  вершины в поле фонона. Прямоугольники с  $\Gamma$  и  $d\Gamma$  и  $d^{(2)}\Gamma$  обозначают соответствующие величины  $\Gamma$ (3.12) и  $d\Gamma$ (3.13) и  $d^{(2)}\Gamma$ (3.16)

Подставим в (3.19) точные выражения  $\delta^{(1)}V$  и  $\delta^{(2)}V$  (3.15) (которые уже содержат  $\tilde{V}$ ) и используем соотношения (3.14) и (3.16). В результате получаем новое уравнение для  $\tilde{V}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{V} = e_q V^0 + F A \tilde{V} + 2 F G g D G g G G \tilde{V} + F G g G D G g G \tilde{V} + \\ 2 F G g_{\tilde{i}\tilde{i}} D G G \tilde{V} + \\ 4 F G G g G \Gamma G D g G G \tilde{V} + \\ 2 F G g G G D d \Gamma G G \tilde{V} + 2 \delta F D G g G G \tilde{V} + \\ 2 \delta F D G G \Gamma G g G G \tilde{V} + \\ \delta F D G G d \Gamma G G \tilde{V} + \delta^{(2)} F G G \tilde{V}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Это уравнение содержит 10 интегральных слагаемых вместо 12 в уравнении (3.6) раздел 3.2. Однако для нашей цели включения двухфононных конфигураций лучше использовать не величину  $d\Gamma$  в уравнении (3.20), а амплитуду  $\Gamma$ . Поэтому преобразуем уравнение для  $d\Gamma$  (3.14) в выражение для него:

$$d\Gamma = \delta F + \Gamma A \delta F = \delta F + \Gamma G G \delta F. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в (3.20), получаем уравнение для  $\tilde{V}$ , которое теперь содержит только  $\delta F$  и  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \tilde{V} = & e_q V^0 + F A \tilde{V} + 2FGgDGgGG\tilde{V} + FGgGDGgG\tilde{V} + \\ & 2FGg_{i\bar{i}}DGG\tilde{V} + \\ & 4FGGg\Gamma GDgGG\tilde{V} + \\ & 2FGGgDG\delta FGG\tilde{V} + 2\delta FDGgGG\tilde{V} + \\ & 2FGGgDG\Gamma GG\delta FGG\tilde{V} + 2\delta FDGG\Gamma GgGG\tilde{V} + \\ & \delta FDGG\delta FGG\tilde{V} + \delta FDGG\Gamma GG\delta FGG\tilde{V} + \delta^{(2)}FGG\tilde{V}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Оно показано на рис. 3.7.

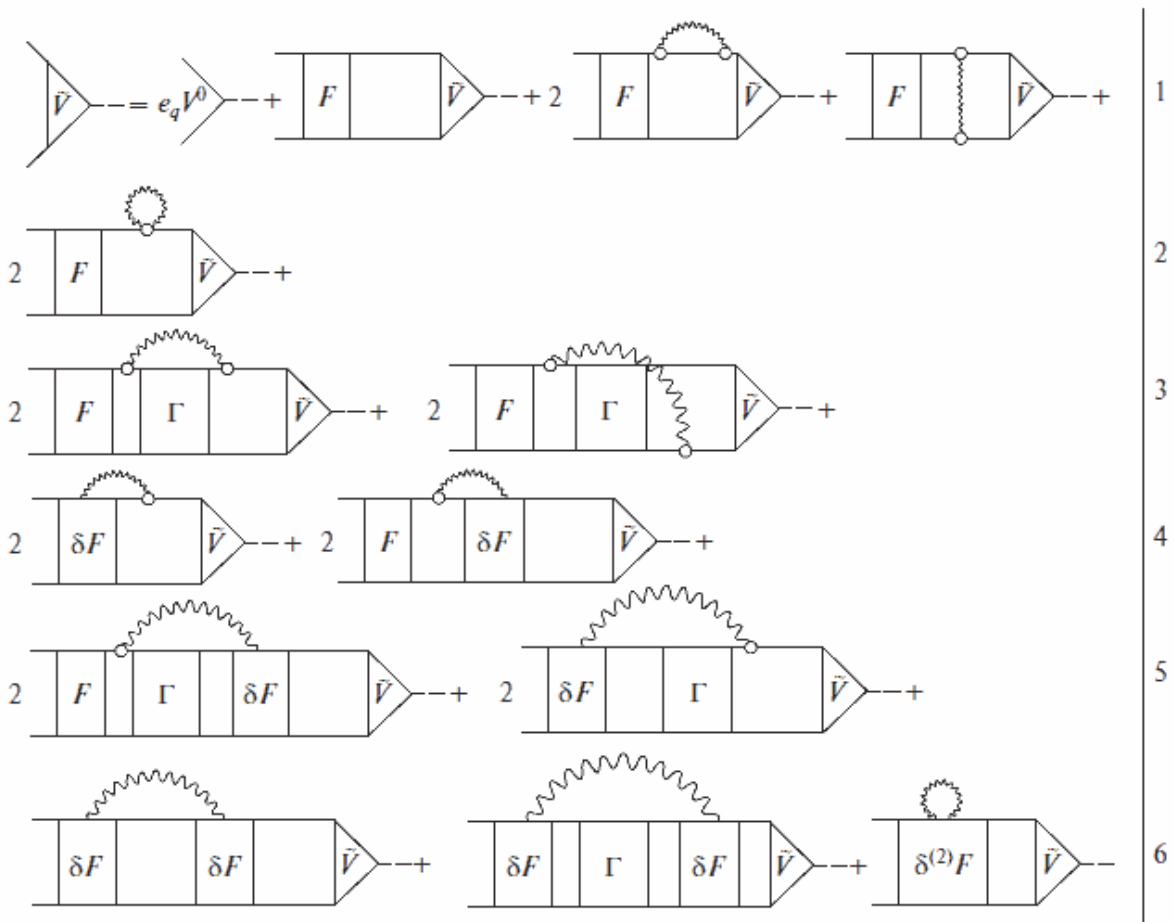


Рисунок 3.7 — Диаграммное представление уравнения для вершины(3.22).

Как и следовало ожидать, полученное выражение значительно отличается от формулы (3.6) рис. 3.4: слагаемые, которые содержат сначала амплитуду  $g$ , у нас не наблюдаются из-за отсутствия первой  $g^2$ -поправки к вершине вида  $gGD\delta^{(1)}V$ . Но кроме слагаемых, содержащих  $F$  и  $\delta F$ , у нас появилось

пять слагаемых, содержащих полную амплитуду взаимодействия  $\Gamma$ . Это дает возможность получить двухфононные конфигурации, если воспользоваться разложением амплитуды  $\Gamma$  по фононам:

$$\Gamma(\omega) = \sum_s \frac{g^s g^{s*}}{\omega - \omega_s}, \quad (3.23)$$

где  $g^s$  удовлетворяет уравнению (1.8). Это разложение годится именно для

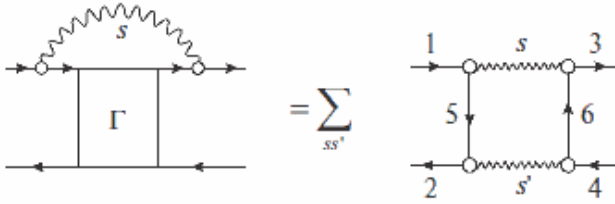


Рисунок 3.8 — Диаграммное представление соотношения (3.24).

расчетов ПДР и ГМР, поскольку в них, как правило, используется огромное количество фононов, так что разложение (3.23) исчерпывает почти всю амплитуду  $\Gamma$ . В принципе, следовало бы добавить регулярную часть амплитуды  $\Gamma$ . Однако такой подход приводит к значительным усложнениям, связанным с задачей нахождения регулярной части амплитуды, и является на данном этапе неконструктивным. Он будет рассмотрен в следующем разделе.

Подставляя разложение (3.23) в величину  $2gGD\Gamma Gg$ , которая играет роль фонон-обменного взаимодействия, имеем (символически):

$$gDG\Gamma Gg = gGgDDgGg, \quad (3.24)$$

что показано на рис. 3.8.

Для получения нового уравнения для вершины  $\tilde{V}$  необходимо подставить выражение (3.24) во все пять членов уравнения (3.22), рис. 3.7, которые содержат амплитуду  $\Gamma$ . Получаем результат, показанный на рис. 3.9.

$$\begin{aligned}
\tilde{V} = & e_q V^0 + F A \tilde{V} + 2 F G g D G g G G \tilde{V} + F G g G D G g G \tilde{V} + \\
& 2 F G g_{\bar{1}\bar{1}} D G G \tilde{V} + \\
& 4 F G G g G g D D g G g G G \tilde{V} + \\
& 2 F G G g D \delta F G G \tilde{V} + 2 \delta F D G g G G \tilde{V} + \\
& 2 \delta F D G G \delta F G G \tilde{V} + \delta^{(2)} F D G G \tilde{V} + \\
& \delta F G G g D D g G G \delta F G G \tilde{V} + \\
& 2 F G G g G g D D g G G \delta F G G \tilde{V} + \\
& 2 \delta F G G g D D g G g G G \tilde{V}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Линии уравнения (3.25) и рис. 3.9 соответствуют друг другу.

Рисунок 3.9, уравнение (3.25), есть первый главный результат данной модели. Используя стандартную диаграммную технику, можно видеть, что уравнение (3.25), рис. 3.9, содержит как  $1p1h \otimes$  фонон-конфигурации во всех линиях, кроме МХФ-части уравнения (3.2) в линии 1, так и двухфононные конфигурации в линиях 3, 6, 7, 8 уравнения (3.25). Это также можно понять, если мысленно сделать поперечные разрезы слагаемых на рис. 3.9

Пронумеруем слагаемые уравнения (3.25), рис. 3.9 в соответствии с их линиями:

$$\tilde{V} = \tilde{V}^1 + \tilde{V}^{\text{tad}} + \tilde{V}_{2\text{phon}}^3 + \tilde{V}^4 + \tilde{V}^5 + \tilde{V}_{2\text{phon}}^6 + \tilde{V}_{2\text{phon}}^7 + \tilde{V}_{2\text{phon}}^8, \tag{3.26}$$

где верхние индексы 1–8 означают только номер линии в уравнении (3.25), рис. 3.9. Нижние индексы 2phon означают, что эти слагаемые содержат двухфононные конфигурации. Некоторые члены в (3.25) включают два слагаемых.

1. Мы получили полное совпадение между уравнением (3.6), рис. 3.4, в разделе 3.2 и уравнением (3.25), рис. 3.9, в линии 1 и в линии 2 для слагаемых  $\tilde{V}^{\text{tad}}$ .

2. Четыре слагаемых в линиях 4 и 5 совпадают со слагаемыми в линиях 4 и 6 на рис. 3.4 см. раздел 3.2.

3. Слагаемые в линиях 6, 7, 8, т.е.  $\tilde{V}_{2\text{phon}}^6 + \tilde{V}_{2\text{phon}}^7 + \tilde{V}_{2\text{phon}}^8$ , содержат двухфононные конфигурации и величины  $(\delta F)^2 g^2$  и  $\delta F g^3$ .

Все слагаемые в линиях 4–8 содержат величины  $\delta F$ . Эта величина выражается через амплитуду трехквазичастичного эффективного взаимодействия [15]:

$$\delta_s F = W G g_s G. \tag{3.27}$$

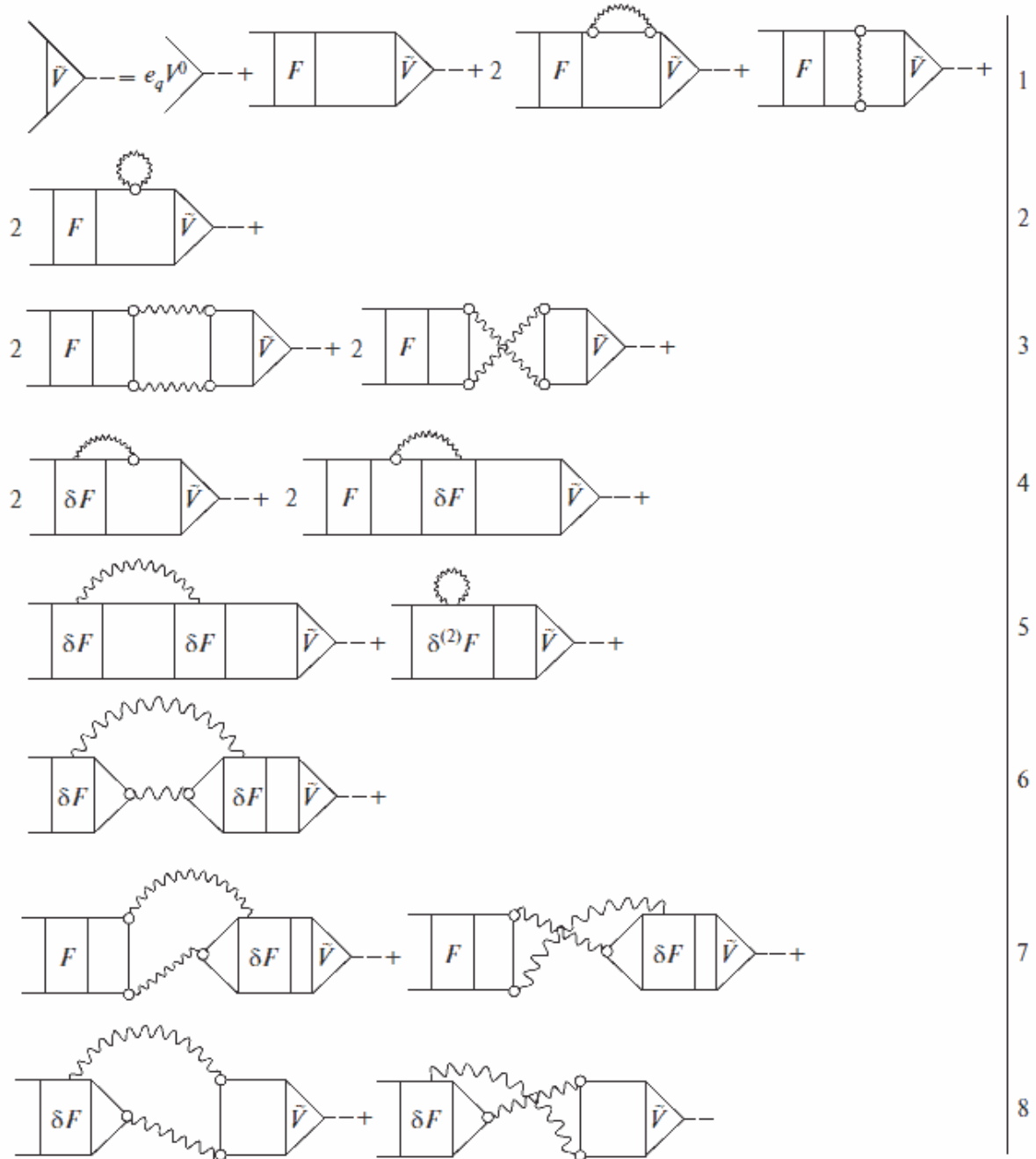


Рисунок 3.9 — Новейшее уравнение для вершины (3.25) с учетом сложных  $1p1h \otimes$  фонон- и двухфононных конфигураций в диаграммном представлении.

Как известно, роль этого взаимодействия в целом невелика. Поэтому можно думать, что количественный вклад этих слагаемых мал. Для задачи изучения статических характеристик это было показано прямым расчетом с использованием формулы

$$\delta F = \frac{\delta F}{\delta \rho} Ag. \quad (3.28)$$

в [67]. Поэтому мы не будем обсуждать эти слагаемые и далее рассмотрим только слагаемые с  $\tilde{V}_{2\text{phon}}^3$ . Мы получим общие формулы для них, но прежде всего и в более детальной форме рассмотрим новые двухфононные фонон-обменные взаимодействия, обусловленные обменом двух фононов, которые играют роль нового эффективного взаимодействия между нуклонами.

Двухфононные слагаемые в линии 3 имеют вид

$$\tilde{V}_{2\text{phon}}^3 = FGGF_{\text{ind}_1}^{2\text{phonon}}GG\tilde{V} + FGGF_{\text{ind}_2}^{2\text{phonon}}GG\tilde{V}. \quad (3.29)$$

Здесь мы ввели двухфононные фонон-обменные взаимодействия  $F_{\text{ind}_1}^{2\text{phonon}}$  и  $F_{\text{ind}_2}^{2\text{phonon}}$ . Для первого из двухфононных графиков на рис. 3.9:

$$(F_{\text{ind}}^{2\text{phonon}})_{1234\_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \omega) = \sum_{56ss'} g_{15}^s g_{63}^{s*} g_{52}^{s'} g_{46}^{s'*} I_{56ss'\_1} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3), \quad (3.30)$$

$$I_{56ss'\_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \int G_5(\varepsilon_1 - \omega_1) G_6(\varepsilon_3 - \omega_1) D_s(\omega_1) D_{s'}(\omega_1 - \omega) d\omega_1, \quad (3.31)$$

где мы ввели  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \omega$ . Результат интегрирования дается формулой (3.34).

Для второго  $F_{\text{ind}}^{2\text{phonon}}$ , который входит в "перекрестный" график на линии 3, рис. (3.9), соответствующий интеграл представлен формулой 3.35.

$$(F_{\text{ind}}^{2\text{phonon}})_{1234\_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_4, \omega) = \sum_{56ss'} g_{15}^s g_{46}^{s*} g_{52}^{s'} g_{63}^{s'*} I_{56ss'\_2} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3), \quad (3.32)$$

где

$$I_{56ss'\_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = \int G_5(\varepsilon_1 - \omega_1) G_6(\varepsilon_4 + \omega_1) D_s(\omega_1) D_{s'}(\omega_1 - \omega) d\omega_1, \quad (3.33)$$

Интеграл  $I_{56ss'\_1}$  содержит как  $1p1h \otimes$  фонон-, так и двухфононные конфигурации, и является весьма громоздким.

$$\begin{aligned}
I_{56ss'_-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \omega) &= \frac{1}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_{\lambda_5} - \varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_1)}. \\
&\left( \frac{1 - n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega - \omega'_s)} - \frac{n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega + \omega'_s)} \right)^+ \\
&\frac{(1 - n_{\lambda_5})n_6}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega + \omega'_s)} - \frac{n_{\lambda_5}(1 - n_6)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega - \omega'_s)} \Big)^+ \\
&\frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s)(\omega_s + \omega'_s + \omega)} + \\
&+ \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s)(\omega_s + \omega'_s - \omega)} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{56ss'_-2}(\varepsilon_1, \varepsilon_4, \omega) &= \frac{1}{(\varepsilon_4 + \varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_{\lambda_5})}. \\
&\left( \frac{1 - n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega - \omega'_s)} - \frac{n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega + \omega'_s)} \right)^- \\
&\frac{(1 - n_{\lambda_5})(1 - n_6)}{(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 + \omega_s)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 - \omega + \omega'_s)} + \frac{n_{\lambda_5}n_6}{(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 - \omega_s)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 - \omega - \omega'_s)} \Big)^+ \\
&\frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s)(\omega_s + \omega'_s + \omega)} + \\
&+ \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s)(\omega_s + \omega'_s - \omega)} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Мы видим, что двухфононные знаменатели  $[\omega \pm (\omega_s + \omega'_s)]^{-1}$  входят как в  $pp$  ( $n_{\lambda_5}n_{\lambda_6}$ ),  $hh$   $(1 - n_{\lambda_5})(1 - n_{\lambda_6})$ , так и в  $hp$   $((1 - n_{\lambda_5})n_{\lambda_6})$ ,  $ph$   $(n_{\lambda_5}(1 - n_{\lambda_6}))$ -члены, где  $pp(hh)$  соответствуют двум частицам (дыркам) выше (ниже) поверхности Ферми и  $hp(ph)$  соответствуют дырке и частице, находящимся по разную сторону от поверхности Ферми.

Двухфононные слагаемые в формулах (3.34) и (3.35) содержат сложные  $1p1h \otimes$ фонон- и двухфононные конфигурации. Эти конфигурации, включая те, которые соответствуют корреляции в основном состоянии (КОС), можно увидеть, если мысленно сделать поперечные сечения соответствующих графиков. Наши двухфононные конфигурации также содержат двухфононные КОС со знаменателями  $[\omega \pm (\omega_s + \omega'_s)]^{-1}$ . Здесь можно видеть значительное отличие от двухфононной версии работ с ПВБ [25; 60], которая содержит только члены с  $[\omega \pm (\omega_s + \omega'_s)]^{-1}$ .

С одной стороны, наш метод введения двухфононных конфигураций, рис. 3.9, дает более сложную зависимость от  $\omega$  и позволяет включить как  $1p1h \otimes$  фонон, так и двухфононные конфигурации. С другой стороны, в 3-й линии мы получили естественное для нашей модели усложнение графиков 1-й линии: график  $FGGgDg$  в линии 1 дополняется графиком  $FGGF_{\text{ind}}^{2\text{phon}}$ , т.е. обмен одним фононом дополняется обменом двумя фононами. Однако соответствующие формулы в линии 3, формула (3.29), будут очень громоздкими. Поэтому прежде чем переходить к численным расчетам необходимо рассмотреть другие модели включения  $1p1h \otimes$  фонон- и двухфононных конфигураций в уравнение для вершины, а также рассмотреть регулярную часть полной амплитуды взаимодействия  $\Gamma$  в дополнение к (3.23).

В заключение этого раздела кратко рассмотрим что дает результат учета полной поправки (3.4) в уравнении для вершины. При этом, поскольку из предыдущего уже ясно, что дает учет регулярной части  $\Gamma^r$ , для простоты мы не будем ее здесь рассматривать.

Повторяя вывод приведенный в начале этого раздела, мы используем полную поправку (3.4), точные выражения для вариации вершины (3.15) и выражение 3.21 после длительного вывода получаем полное новое уравнение для вершины  $\tilde{V}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{V} = & e_q V^0 + FA\tilde{V} + 2FGgDGgGG\tilde{V} + FGgGDGgG\tilde{V} + \\ & 2FGg_{\bar{i}\bar{i}}DGG\tilde{V} + 4gGD\Gamma GgGG\tilde{V} + \\ & 2gDG\delta FGG\tilde{V} + 2gDG\Gamma GG\delta FGG\tilde{V} + 2\delta FDGgGG\tilde{V} + \\ & 2\delta FDGG\Gamma GgGG\tilde{V} + \\ & \delta FDGG\delta FGG\tilde{V} + \delta FDGG\Gamma GG\delta FGG\tilde{V} + \delta^{(2)} FGG\tilde{V}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

Оно показано на рисунке 3.10. Чтобы получить окончательное новейшее уравнение для  $\tilde{V}$ , необходимо подставить выражение (3.23) во все пять членов уравнения (3.36), рис. 3.10, которые содержат амплитуду  $\Gamma$ . Результат имеет



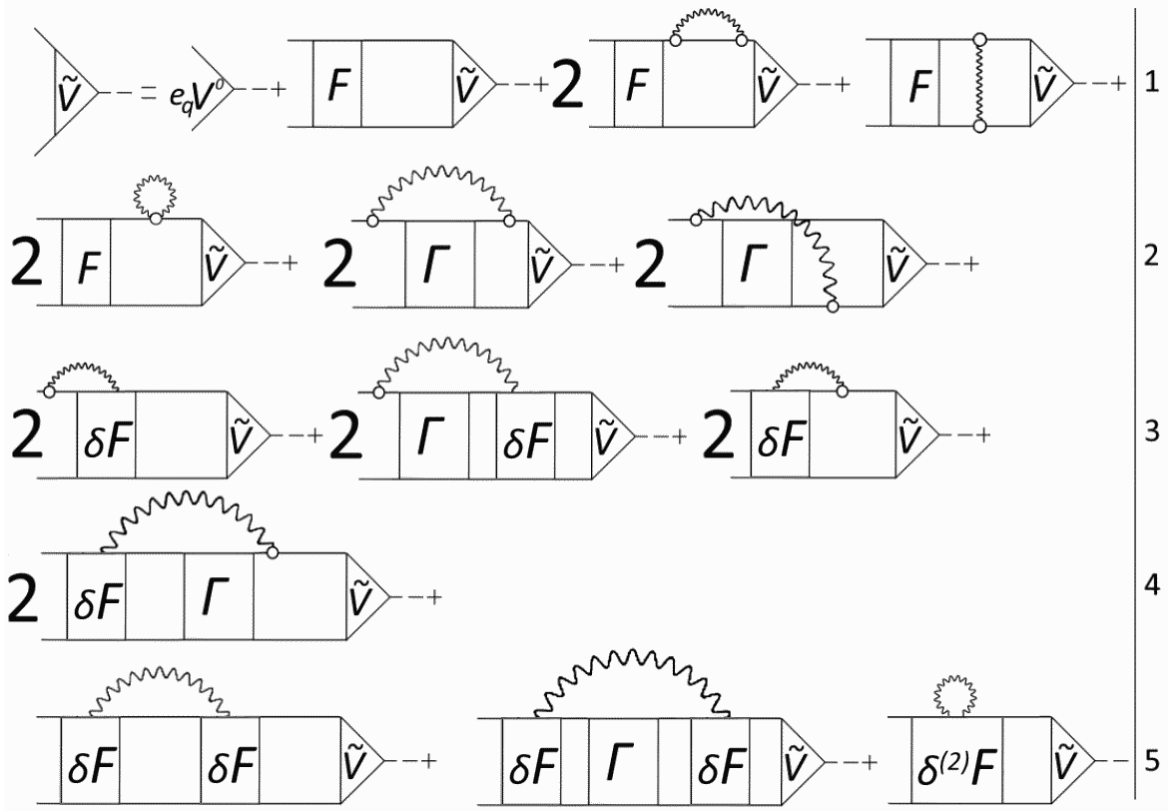


Рисунок 3.10 — Уравнение для вершины (3.36).

вид (3.37) и показан на рис. 3.11.

$$\begin{aligned}
\tilde{V} = & e_q V^0 + F A \tilde{V} + 2 F G g D G g G G \tilde{V} + F G g G D G g G \tilde{V} + \\
& 2 F G g_{i\bar{i}} D G G \tilde{V} + \\
& 4 g G g D D g G g G G \tilde{V} + \\
& 2 g \delta F D G G G \tilde{V} + 2 \delta F D G g G G \tilde{V} + \\
& 2 \delta F D G G \delta F G G \tilde{V} + \delta^{(2)} F D G G \tilde{V} + \\
& \delta F G G g D D g G G \delta F G G \tilde{V} + \\
& 2 g G g D D g G G \delta F G G \tilde{V} + \\
& 2 \delta F G G g D D g G g G G \tilde{V} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

на котором мы не показываем слагаемые с  $\delta F$ . Обсудим коротко эти результаты, которые можно записать в виде:

$$\tilde{V} = \tilde{V}' + \tilde{V}^{tad} + \tilde{V}_{2phon}^3 \quad (3.38)$$

с очевидными обозначениями. Слагаемые  $V'$  и  $V^{tad}$  уже обсуждались выше. Здесь мы получаем "чистые" двухфононные слагаемые

$$V_{2phon}^3 = F_{ind\_1}^{2phon} G G \tilde{V} + F_{ind\_2}^{2phon} G G \tilde{V}, \quad (3.39)$$

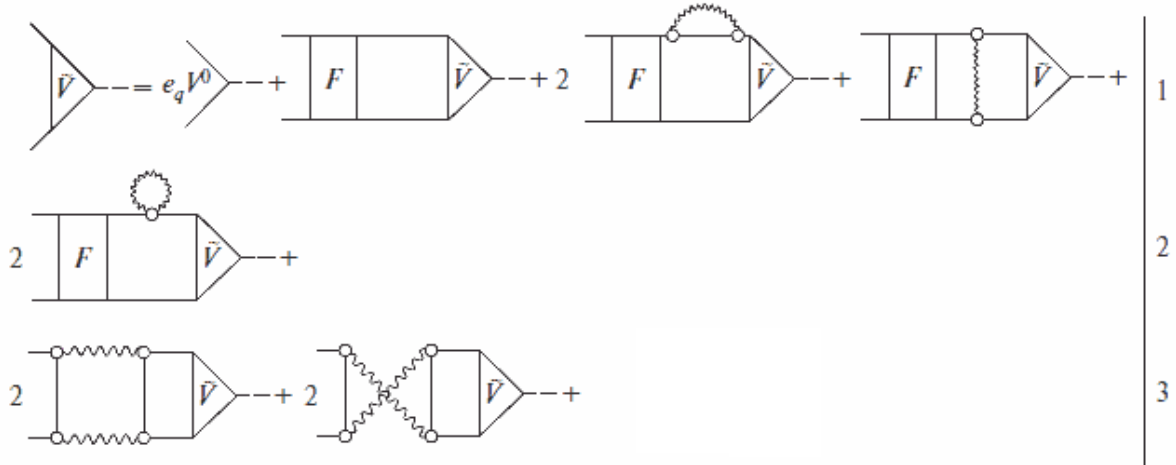


Рисунок 3.11 — Уравнение для вершины (3.37).

которые уже не содержат эффективное взаимодействие  $F$  как в (3.29). Выражения для обеих двухфононных амплитуд  $F^{2phon}$  приведены и обсуждаются выше. Однако здесь получены двухфононные конфигурации другого класса, чем в микроскопической модели учета сложных конфигураций. В этой модели такие конфигурации появились в задаче после предыдущего этапа рождения  $1p1h$ -пары благодаря эффективному взаимодействию  $F$ , так что соответствующая часть вершины зависела только от переданной энергии —  $\tilde{V}(\omega)$ . В нашем же случае новая часть вершины зависит от четвертой энергетической переменной —  $\tilde{V}(\epsilon, \omega)$ . Такая зависимость есть следствие второй поправки (3.4) для вершины и она появлялась в более простом варианте нашего подхода [32]. Как видим, она же появляется и в значительно более сложном настоящем варианте. Это обстоятельство требует специального рассмотрения, хотя можно надеяться, что оно принципиально не изменит результаты следующего раздела.

### 3.4 Учет регулярной части $\Gamma^r$ полной амплитуды $\Gamma$ . Характеристики ПДР и ГМР

Выше было получено новое уравнение для новой вершины  $\tilde{V}$ , которое содержало указанные сложные  $1p1h \otimes$  фонон- и двухфононных конфигурации, и указывалось на сложность полученных уравнений (3.25). Однако, конкретные формулы для описания наблюдаемых характеристик резонансов не рассматривались. В частности, представляет интерес получить уравнение для матрицы

плотности, которая необходима для получения поляризационного оператора. Такая процедура была реализована в стандартной ТКФС [2], т.е. в рамках МХФ, сформулированного на языке ФГ. Необходимо также получить формулы с учетом регулярной части амплитуды  $\Gamma^r$ , о которой было вскользь упомянуто в разделе 3.3. Все это является целью данного раздела.

В разделе 3.3, для вывода уравнения для новой вершины  $\tilde{V}$  использовалась только поправка (3.8) и было получено новое уравнение для вершины  $\tilde{V}$  (3.20). Оно показано в графическом виде на рис. 3.12.

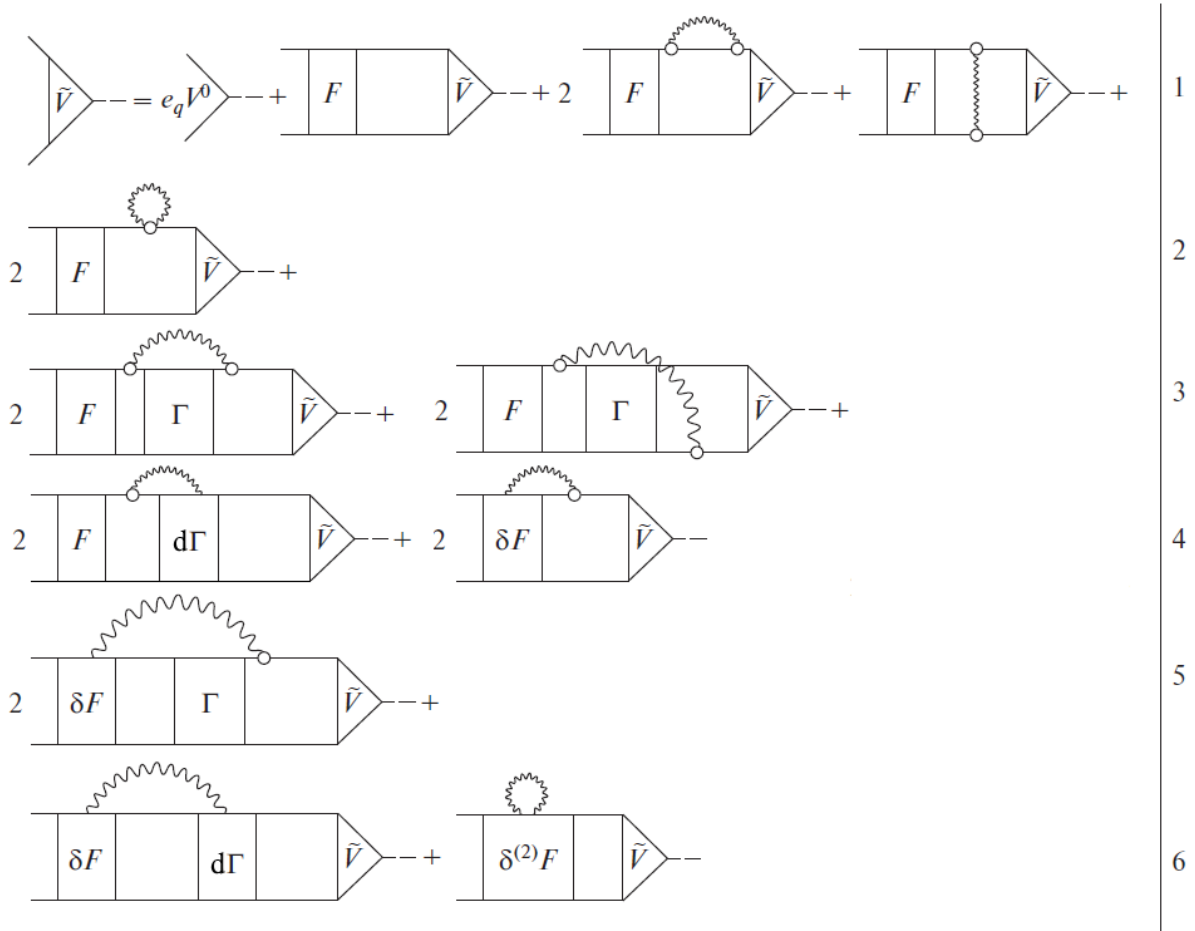


Рисунок 3.12 — Новейшее уравнение для вершины (3.20) с учетом сложных  $1p1h \otimes$  фонон- и двухфононных конфигураций в диаграммном представлении.

Как всегда, в его аналитической форме мы пишем цифру 4 в третьей линии уравнения (3.20) вместо цифр 2 для каждого из двух слагаемых в его графическом представлении. В отличие от уравнения (3.25), рис. 3.9 в разделе 3.3, здесь для краткости не используется уравнение для  $d\Gamma = \delta F + \Gamma G G \delta F$  через полную амплитуду  $\Gamma$ . Поэтому уравнение (3.20) для  $\tilde{V}$  содержит на два интегральных члена меньше, чем уравнение (3.25), рис. 3.9. Слагаемые с

$\delta F, d\Gamma, \delta^{(2)}F$  являются совершенно новыми. Они или их аналог не содержатся во всех известных нам подходах. Они содержат амплитуду  $W$  трех-квазичастичного эффективного взаимодействия:  $\delta_s F = WGg_s G$  [15], роль которого, по-видимому, в целом невелика. В дальнейшем мы не выписываем слагаемые с  $\delta F$ . Если понадобится, их легко дописать.

Полученное уравнение (3.20), рис. 3.12 содержит полную амплитуду взаимодействия  $\Gamma$ , удовлетворяющую уравнению ТКФС (3.12). Это позволяет получить двух-фононные конфигурации, если воспользоваться разложением амплитуды по фононам в ТКФС [1]:

$$\Gamma(\omega) = \Gamma^r + \frac{g^s g^{s*}}{\omega - \omega_s}, \quad (3.40)$$

где  $\Gamma^r$  регулярная часть амплитуды  $\Gamma$  и не зависит от  $\omega$  (мы опустили индекс  $s$  в  $\Gamma^r$ ).  $\Gamma^r$  удовлетворяет уравнению [1]:

$$\Gamma^r = F + F \frac{dA}{d\omega} g^s g^{s*} + F A_s \Gamma^r \quad (3.41)$$

Это интегральное уравнение с двумя свободными членами. Амплитуда рождения фонона  $g$  удовлетворяет уравнению (1.8).

Подставляя (3.40) в уравнение (3.20) получаем новое уравнение для  $\tilde{V}$ , которое содержит не только сложные  $1p1h \otimes phonon$ - и двухфононные конфигурации, как в [33], но и слагаемые с  $\Gamma^r$

$$\begin{aligned} \tilde{V} = e_q V^0 + F A \tilde{V} + 2FGgDGgGG\tilde{V} + FGgGDGgG\tilde{V} + \\ 2FGg_{\bar{1}\bar{1}}DGG\tilde{V} + \\ 4FGGgG\Gamma^rGDgGG\tilde{V} + \\ 4FGGgGgDDgGgGG\tilde{V} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Оно показано на рис. 3.13.

Как видно из (3.42), рис. 3.13, главное отличие нашей обобщенной модели от более простого варианта в главе 3.3 состоит в появлении слагаемых с  $\Gamma^r$ . Слагаемые с  $\Gamma$  на линии 3 в уравнении (3.20) с учетом (3.40) можно коротко записать по-другому - в более наглядном и единообразном виде:

$$4F[GG\Gamma^i GG]\tilde{V} = 4F[GG\Gamma^{ri} GG + GGF_{ind}^{2phon} GG]\tilde{V}, \quad (3.43)$$

где  $\Gamma^i = gG\Gamma Dg$  -фонон-обменное взаимодействие, обусловленное обменом фононом в двух рh и двух (рр и hh)-каналах, например, для первого из четырех слагаемых в (3.20), рис. 3.12

$$\Gamma_{1234}^i(\omega, \varepsilon_1, \varepsilon_3) = \sum_{56s} g_{15} g_{63}^* \Gamma_{5264}(\omega) I_{56s}(\omega, \varepsilon_1, \varepsilon_3) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3) \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} I_{56s}(\omega, \varepsilon_1, \varepsilon_3) = & \int G_5(\varepsilon_1 - \omega_1) G_6(\varepsilon_3 - \omega_1) D(\omega_1) d\omega_1 = \\ & - \frac{n_5 n_6}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s - i\gamma)} - \frac{(1 - n_5)(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s + i\gamma)} \\ & + \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{56} - i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)} + \frac{(n_5(1 - n_6))}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{56} + i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)} \\ & + \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{65} + i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)} + \frac{n_5(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{65} - i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

где  $\varepsilon_{65} = \varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_{\lambda_5}$ .

Величина  $\Gamma^{ri}$  по своей структуре совпадает с  $\Gamma^i$  (3.44), в которой вместо  $\Gamma_{5264}$  стоит взаимодействие  $\Gamma^r$ . Величина  $F_{ind}^{2phon}$  получена и обсуждалась в разделе 3.3.

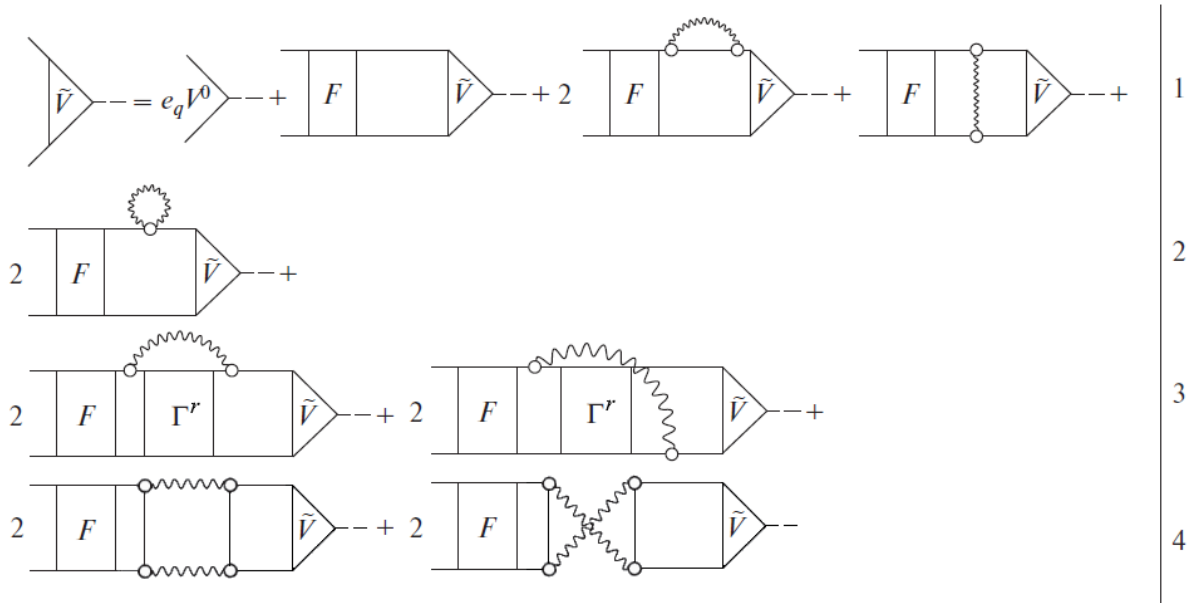


Рисунок 3.13 — Уравнение для вершины(3.42) в диаграммном виде. Члены с  $\delta F$  опущены, как предположительно незначительные (см. текст).

Как видно из структуры графиков с  $\Gamma^{ri}$  и  $F_{ind}^{2phon}$  на рис. 3.13, эти величины играют роль дополнительного по сравнению с  $F$  взаимодействия, обусловленного обменом фононом в двух рh и двух (рр и hh)-каналах. Такое взаимодействие появляется на следующем этапе взаимодействия частично-дырочной пары с ядром после предыдущего частично-дырочного взаимодействия  $F$  и создает дополнительный механизм взаимодействия, связанный с рождением фононов.

Используя (3.43) и, как говорилось, не выписывая слагаемые с  $\delta F$ , уравнение для  $\tilde{V}$  можно кратко записать, если ввести обобщенный пропагатор  $\bar{A}$ , в виде:

$$\tilde{V} = e_q V^0 + F \bar{A} \tilde{V}, \quad (3.46)$$

где

$$\bar{A}_{1234} = [A + A' + A^t + A^{ri} + A^{2phon}]_{1234} \quad (3.47)$$

Здесь  $\bar{A}$  содержит известные пропагаторы  $A$ ,  $A'$  и три новых пропагатора.  $A$  – пропагатор стандартной ТКФС,  $A'$  – пропагатор первой линии уравнения 3.20 показанного в разделе 3.3, которое соответствует методу, использованному в [20; 21],  $A^t$  – новый пропагатор в графике с тэдполом, который получен и обсуждался в разделе 3.2,  $A^i = A^{ri} + A^{2phon}$  имеет вид:

$$A^i = A^{ri} + A^{2phon} = \int GG[\Gamma^{ri} + F_{ind}^{2phon}]GGd\varepsilon_1 d\varepsilon_3, \quad (3.48)$$

Все это позволяет естественно ввести матрицу плотности:

$$\delta\rho_{12} = \bar{A}_{1234} \tilde{V}_{43}. \quad (3.49)$$

Уравнение для  $\delta\rho_{12}$  легко получить из уравнения (3.46) для  $\tilde{V}$

$$\delta\rho_{12} = \delta\rho_{12}^0 + \bar{A}_{1234} F_{3456} \delta\rho_{56}, \quad (3.50)$$

где  $\delta\rho_{12}^0 = \bar{A}_{1234} e_q V_{34}^0$ .

Теперь нетрудно получить выражение для поляризационного оператора:

$$\begin{aligned} \langle V^0 \rangle &= \sum V_{21}^0 \delta\rho_{12} = \sum V_{21}^0 \bar{A}_{1234} \tilde{V}_{43} = \\ &= \sum V_{21}^0 [A + A' + A^t + A^{ri} + A^{2phon}]_{1234} \tilde{V}_{43}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Это выражение показано на рис. 3.14

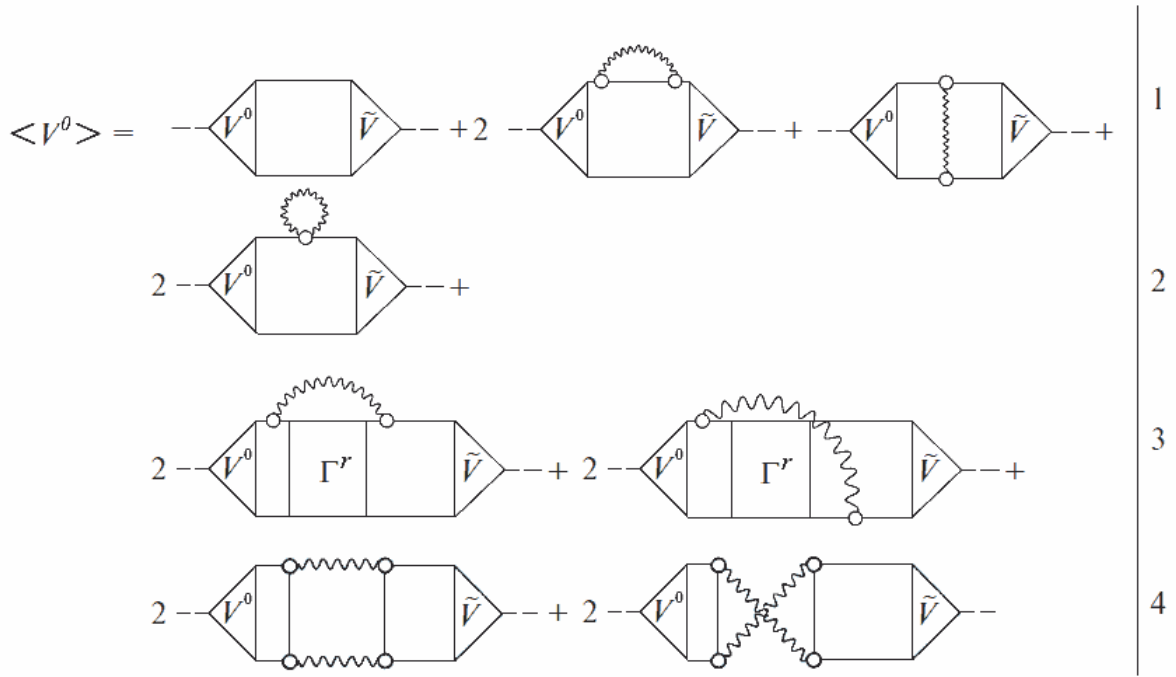


Рисунок 3.14 — Выражение для поляризационного оператора (3.51) без учета слагаемых с  $\delta F$ .

Новая величина  $A^{ri}$  имеет вид, например для первого из четырех слагаемых с  $\Gamma^{ri}$  на рис. 3.13

$$A_{1234}^{ri} = \int [GG\Gamma^{ri}GG]d\varepsilon_1d\varepsilon_3 = \sum_{56s} g_{15}^s g_{63}^{s*} \Gamma_{5264}^r I_{1256s34}(\omega), \quad (3.52)$$

где интеграл

$$I_{1256s34}(\omega) = \int G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 - \omega)I_{56s}(\omega, \varepsilon_1, \varepsilon_3)G_3(\varepsilon_3)G_4(\varepsilon_3 - \omega)d\varepsilon_1d\varepsilon_3 \quad (3.53)$$

Он получается с использованием (3.45), имеет сложный вид. Все интегралы для членов уравнения (3.42) приведены в Приложении Д.

Для получения формул для энергий и вероятностей переходов между основным и конкретным возбужденным состояниями, мы обобщаем метод стандартной ТКФС [1; 2]. В рассматриваемой нами области  $\omega = \omega_n$  вершина  $\tilde{V}$  имеет вид

$$\tilde{V} = \frac{\chi^n}{\omega - \omega_n} + \tilde{V}^R, \quad (3.54)$$

где  $\omega_n$  — энергия рассматриваемого возбужденного состояния,  $\chi^n$  — вычет в этом полюсе, а  $V^R$  — регулярная часть  $\tilde{V}$ . Тогда энергии переходов должны быть найдены из однородного уравнения

$$\chi^n = F\bar{A}\chi^n = F[A^0 + A' + A^t + A^{ri} + A^{2phon}]\chi^n. \quad (3.55)$$

Чтобы найти условие нормировки вычета  $\chi^n$ , сначала выведем уравнение для  $\tilde{V}^R$ :

$$\tilde{V}^R = e_q V^0 + F\bar{A}^n \tilde{V}^R + F \frac{d\bar{A}^n}{d\omega} \chi^n \quad (3.56)$$

и умножим его слева на  $\chi^n \bar{A}^n$ . В результате получаем условие нормировки вычета  $\chi^n$ :

$$\chi^n \bar{A}^n e_q V^0 = -\chi^n \frac{d\bar{A}^n}{d\omega} \chi^n. \quad (3.57)$$

Получим вероятности переходов между основным и возбужденным состояниями. Эта величина определяется через вычет поляризационного оператора:

$$W_{0n} = 2Im(e_q V^0 \rho)^n \quad (3.58)$$

с вычетом  $\eta^n$  матрицы плотности  $\rho$  в полюсе  $\omega_n$

$$\rho = \frac{\eta^n}{\omega - \omega_n} + \rho^R, \quad (3.59)$$

так что из уравнения (3.54) мы имеем

$$\rho = \bar{A} \left( \frac{\chi^n}{\omega - \omega_n} + V^R \right), \quad (3.60)$$

а для вычета  $\eta^n$  находим

$$\eta^n = \bar{A} \chi^n. \quad (3.61)$$

В итоге получаем:

$$W_{0n} = (e_q V^0 \bar{A} \chi^n)^n \quad (3.62)$$

или с учетом условия нормировки (3.57):

$$W_{0n} = \frac{(e_q V^0 \bar{A} \chi^n)^2}{(-\chi^n \frac{d\bar{A}}{d\omega} \chi^n)} \quad (3.63)$$

Для областей энергий, для которых невозможно исследовать конкретные собственные энергии состояний, необходимо использовать огибающую резонанса. Поэтому имеет смысл использовать параметр размытия  $\Delta$ , что значительно



снижает сложность вычислений, если, конечно, изучаемая функция имеет ширину существенно больше интервала усреднения энергии, см. [18]. В этом случае используется силовая функция

$$S(\omega, \Delta) = \frac{dB(EL)}{d\omega} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{12} e_q V_{12}^0 \rho_{21}(\omega + i\Delta). \quad (3.64)$$

Из формулы (3.64) можно получить вероятности перехода и энергетически взвешенные правила сумм, просуммированные по любому энергетическому интервалу, см. например, [18]. Что касается важной проблемы тонкой структуры, то характеристики тонкой структуры могут быть получены при малых значениях  $\Delta = 10$  или 1 кэВ. В [24] такие расчеты для PDR в  $^{208}\text{Pb}$  были выполнены в рамках самосогласованного ПВБ с использованием сил Скирма, и они показали, что невозможно получить разумное согласие с наблюдаемой тонкой структурой PDR. Можно надеяться, что расчеты в рамках нашего подхода должны улучшить ситуацию. Однако они довольно сложны, и находятся на ранних этапах реализации.

### 3.5 Выводы

В заключение главы 3 необходимо перечислить и качественно обсудить полученные новые эффекты:

- 1) динамические эффекты тэдпола;
- 2) два вида фонон-обменного взаимодействия, вызванного обменом фононов в четырех каналах ( $ph$ ,  $hp$ ,  $pp$ ,  $hh$ ):  $\Gamma^i$  (3.44) (которое в качестве частного случая содержит фонон-обменное взаимодействие с  $F$  на рис. 3.4 и фонон-обменное двухфононное взаимодействие  $F_{ind}^{2phon}$  (3.30), (3.32);
- 3) многочисленные эффекты трехквазичастичных и четырехквазичастичных корреляций в основном состоянии (КОС);
- 4) эффекты, связанные с изменением эффективного взаимодействия в поле фонона –  $\delta F$  и  $\delta^{(2)}F$ .

Простой и доступный нам способ анализа этих эффектов, основанный на формулах для соответствующих уравнений для  $\tilde{V}$ , приведенных в Приложении Д, показывает, что эффекты тэдпола будут уменьшать эффекты графиков

со вставками и тем самым уравновешивать количественную роль графиков с "поперечным" фононом. Новые и многочисленные слагаемые с КОС, видимо, должны быть существенны. Количественную роль графиков с  $\delta F$  предсказать сейчас трудно, так как надо считать эффективные трехквазичастичные силы. Анализ фонон-обменных взаимодействий требует анализа неожиданного эффекта зависимости вершины  $\tilde{V}$  от четвертой переменной  $\tilde{V}(\varepsilon, \omega)$ . Чтобы понять объем предстоящей работы, достаточно сравнить графики для нашей "старой" вершины  $V'$  (уравнение (3.1), рис. 3.1) с новым уравнением для  $\tilde{V}$  (3.25), рис. 3.9. Подчеркнем, что во всех рассмотренных в главе 3 вариантах содержится как частный случай уравнение для этой вершины  $V'$ . При этом в рамках предыдущих подходов, которые использовали  $V'$  или в значительно большей степени на близком по физике дела подходе, основанном на ПБВ, было уже опубликовано несколько десятков статей, часть из которых мы обсуждаем.

Вполне возможно, что часть эффектов скомпенсируют друг друга, особенно в расчетах с силовой функцией с параметром усреднения  $\Delta \geq 100$  КэВ. Однако для надежных расчетов тонкой структуры резонансов, видимо, будет необходимо учитывать все.

Громоздкость полученных формул и недостаточная разработка некоторых теоретических вопросов являются главной причиной отсутствия расчетов в главе 3. Поскольку задачи, в основном, уже сформулированы, мы планируем начать их численную реализацию в ближайшем будущем.

В настоящей главе рассмотрены шаг за шагом четыре варианта обобщения самосогласованной ТКФС на область энергий ПДР и ГМР с целью последовательного учета КФВ:

- включение сложных  $1p1h \otimes$  фонон конфигураций (раздел 3.2)
- включение сложных  $1p1h \otimes$  фонон и двухфононных конфигураций (раздел 3.3)
- включение сложных  $1p1h \otimes$  фонон и двухфононных конфигураций вместе с регулярной частью  $\Gamma^r$  полной амплитуды взаимодействия  $\Gamma$  (раздел 3.4)
- в конце раздела 3.4 схематически рассмотрено развитие предыдущего подхода

Все они реализованы в виде уравнения для новой вершины  $\tilde{V}$ , обобщающей исходное уравнение для вершины  $V$  в стандартной ТКФС.

В первом варианте использовались только свободные члены уравнений для вариаций (3.5). Здесь получено что в задачу входят только сложные  $1p1h$ -фонон конфигурации. Это оказалось недостаточно. При таком подходе уже обнаружены новые и неизученные ранее эффекты: динамический эффект тэдпола, слагаемые с  $\delta F$ , зависимость  $V(\epsilon)$ .

Во втором варианте, названном микроскопической моделью учета сложных конфигураций, добавлен вклад двухфононных конфигураций. Он содержит на совершенно новом уровне те же новые эффекты, что и первый, кроме зависимости  $V(\epsilon)$ , который требует дальнейшего изучения.

Третий вариант обобщает предыдущие и содержит существенно новый эффект с регулярной частью  $\Gamma^r$  полной амплитуды  $\Gamma$ , который нигде ранее не изучался.

Естественное продолжение этого варианта учитывает новую зависимость вершины от четвертой (энергетической) переменной. Это обстоятельство, хотя и не является непреодолимой трудностью, требует, по нашему мнению, дальнейшего развития и более подробного изучения.

Таким образом, на базе стандартной ТКФС, т.е. с использованием понятия вершины и МХФ фононов, получено существенное обобщение ТКФС, которое можно считать началом третьего этапа развития ТКФС. При этом озвучена идея поисковой работы о выходе за пределы МХФ-описания фононов. Описанный подход имеет своим ограничением исходные положения стандартной ТКФС. Это существенно ограничивает дальнейшее развитие, например, в сторону возможного учета новых эффектов тэдпола и новых конфигураций, более сложных чем двухфононные. Изученные здесь варианты показывают, во-первых, что дальнейшее последовательное развитие вполне возможно и, во-вторых, оно возможно только на базе полученного здесь опыта последовательного обобщения ТКФС.

Как указывалось в тексте и в [33], расчеты являются весьма сложными, если не использовать дополнительных приближений типа процедуры факторизации в [60]. Здесь мы надеемся, в частности, на развитие новых математических методов анализа и расчетов функций комплексного переменного и диаграмм, а также на последовательное решение уравнений, таких как уравнения для регулярной части  $\Gamma^r$  и для амплитуды рождения двух фононов.

## Заключение

В работе последовательно используется современный формализм ядерной теории многих тел и метод квантовых функций Грина. Исходной базой для развития была самосогласованная теория конечных ферми-систем и ее основное понятие – вершина (эффективное поле), которая описывает поляризуемость ядра по действию внешнего поля. Рассмотрены ангармонические эффекты второго и третьего порядков и обобщение уравнения для вершины на область энергий пигми- и гигантских мультипольных резонансов.

Перечислим основные результаты, полученные в рамках диссертационной работы:

1. Впервые показано что для задач о вероятностях  $E1$ - и  $E2$ -переходов между низколежащими однофононными состояниями в магических и в полу-магических ядрах нельзя объяснить экспериментальные данные без учета эффектов трехквaziчастичных корреляций в основном состоянии
2. Получена универсальная формула для приведенного матричного элемента перехода между низколежащими однофононными состояниями как для магических ядер, так и для ядер со спариванием, которая описывает и статические электромагнитные моменты фононов, и переходы между однофононными состояниями. Расчеты показали, что специфика вышеуказанной задачи в ядрах со спариванием состоит в том, что слагаемые с аномальными функциями Грина составляют около половины величины полной амплитуды перехода
3. Предсказано существование новых эффектов, в частности, четырехквaziчастичных корреляций в основном состоянии и совместного эффекта тэдпола и трехквaziчастичных КОС
4. Впервые в рамках метода функций Грина выполнено обобщение квантовой теории ангармонических эффектов 3-го порядка на ядра со спариванием, рассмотрен частный случай перехода между двух-фононным и одно-фононным состояниями, получены и проанализированы четырехквaziчастичные корреляции в основном состоянии
5. В области энергий пигми- и гигантских резонансов выведены и проанализированы новые уравнения для вершины, которые содержат

предыдущие частные случаи и новые эффекты: 1). Динамические эффекты тэдпола 2). Эффекты изменения эффективного взаимодействия в поле фонона. 3). Новые корреляции в основном состоянии 4). Двух-фононные- конфигурации

В заключение, хочу выразить глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору С. П. Камерджиеву за постановку задач, решенных в диссертационной работе, полезные советы и обсуждение результатов работ. Я благодарен С. В. Толоконникову, Д.А. Войтенкову за конструктивные обсуждения и помощь в работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта "Аспиранты" № 19-32-90186.

## Список сокращений и условных обозначений

- МХФ** - Метод хаотических фаз  
**КМХФ** - Квазичастичный метод хаотических фаз  
**ФГ** - Функции Грина  
**ПДР** - Пигми-дипольный резонанс  
**ГМР** - Гигантский мультипольный резонанс  
**ЭФП** - Энергетический функционал плотности  
**ТКФС** - Теория конечных ферми систем  
**КФВ** - Квазичастично-фононное взаимодействие  
**КОС** - Корреляции в основном состоянии  
**ЛМ** - Ландау-Мигдала  
**ХФ** - Хартри-Фока  
**БКШ** - Бардина-Купера-Шриффера  
**ХФБ** - Хартри-Фока-Боголюбова  
**КФМ** - Квазичастично-фононная модель  
**ПВБ** - Приближение временной блокировки  
**КПВБ** - Квазичастичное приближение временной блокировки  
**РКПВБ** - Релятивистское квазичастичное приближение временной блокировки  
**РСФ** - Радиационная силовая функция

## Список литературы

1. *Мигдал А. Б.* Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. — Москва: Наука, 1965. — 572 с.
2. *Мигдал А. Б.* Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. 2-е изд, перераб. доп. — Москва: Наука, 1983. — 432 с.
3. *Соловьев В. Г.* Теория сложных ядер. — Москва: Наука, 1971. — 560 с.
4. *Соловьев В. Г.* Теория атомного ядра: Ядерные модели. — Москва: Энергоатомиздат, 1981. — 296 с.
5. *Harakeh M. N, Woude A.* Giant Resonances: fundamental high-frequency modes of nuclear excitation. — Oxford University Press on Demand, 2001. — Vol. 24.
6. *Bracco A., Lanza E. G., Tamii A.* Isoscalar and isovector dipole excitations: Nuclear properties from low-lying states and from the isovector giant dipole resonance // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 2019. — Vol. 106. — Pp. 360–433.
7. *Tamii A., Poltoratska I., von Neumann-Cosel P. et al.* Complete Electric Dipole Response and the Neutron Skin in  $^{208}\text{Pb}$  // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Aug. — Vol. 107. — P. 062502.
8. *Larsen A. C., Midtbø J. E., Guttormsen M. et al.* Enhanced low-energy  $\gamma$ -decay strength of  $^{70}\text{Ni}$  and its robustness within the shell model // *Phys. Rev. C.* — 2018. — May. — Vol. 97. — P. 054329.
9. *Paar N., Vretenar D., Khan E., Colò G.* Exotic modes of excitation in atomic nuclei far from stability // *Reports on Progress in Physics.* — 2007. — may. — Vol. 70, no. 5. — P. R02.
10. *Vretenar D., Afanasjev A. V., Lalazissis G. A., Ring P.* Relativistic Hartree–Bogoliubov theory: static and dynamic aspects of exotic nuclear structure // *Physics Reports.* — 2005. — Vol. 409, no. 3-4. — Pp. 101–259.
11. *Goriely S., Khan E.* Large-scale QRPA calculation of E1-strength and its impact on the neutron capture cross section // *Nuclear Physics A.* — 2002. — 07. — Vol. 706. — Pp. 217–232.

12. Klüpfel P., Reinhard P.-G., Bürvenich T. J., Maruhn J. A. Variations on a theme by Skyrme: A systematic study of adjustments of model parameters // *Phys. Rev. C*. — 2009. — Mar. — Vol. 79. — P. 034310.
13. Смирнов А. В., Толоконников С. В., Фаянс С. А. Метод энергетического функционала со спариванием в координатном пространстве // *Ядерная физика*. — 1988. — № 48. — С. 1661.
14. Толоконников С. В., Саперштейн Э. Е. Описание сверхтяжелых ядер с использованием модифицированного функционала энергии *DF3* // *Ядерная физика*. — 2010. — Т. 10, № 70. — С. 1731–1746.
15. Khodel V. A., Saperstein E. E. Finite Fermi systems theory and self-consistency relations // *Physics Reports*. — 1982. — Vol. 92, no. 5. — Pp. 183–337.
16. Reinhard P.-G., Nazarewicz W. Toward a global description of nuclear charge radii: Exploring the Fayans energy density functional // *Physical Review C*. — 2017. — Vol. 95, no. 6. — P. 064328.
17. Ryezayeva N., Hartmann T., Kalmykov Y. et al. Nature of Low-Energy Dipole Strength in Nuclei: The Case of a Resonance at Particle Threshold in  $^{208}\text{Pb}$  // *Physical review letters*. — 2002. — Vol. 89, no. 27. — P. 272502.
18. Kamerdzhiev S., Speth J., Tertychny G. Extended theory of finite Fermi systems: collective vibrations in closed shell nuclei // *Physics Reports*. — 2004. — Vol. 393, no. 1. — Pp. 1–86.
19. Саперштейн Э. Е., Толоконников С. В. Самосогласованная теория конечных ферми-систем и метод скирма-хартри-фока // *Ядерная физика*. — 2016. — Т. 79. — С. 703–739.
20. Камерджиев С. П. Микроскопическая модель учета  $22h$  конфигураций в магических ядрах // *Ядерная физика*. — 1983. — Т. 38. — С. 316.
21. Целяев В. И. Учет сложных конфигураций в магических ядрах методом хронологического расщепления диаграмм // *Ядерная физика*. — 1989. — Т. 50. — С. 1252.



22. *Van Giai N., Stoyanov Ch., Voronov V. V.* Finite rank approximation for random phase approximation calculations with Skyrme interactions: An application to Ar isotopes // *Phys. Rev. C.* — 1998. — Mar. — Vol. 57. — Pp. 1204–1209.
23. *Severyukhin A. P., Voronov V. V., Van Giai N.* Effects of phonon-phonon coupling on low-lying states in neutron-rich Sn isotopes // *The European Physical Journal A-Hadrons and Nuclei.* — 2004. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 397–403.
24. *Люторович Н. А., Целяев В. И., Ачаковский О. И., Камерджиев С. П.* Тонкая структура и коллективность уровней пигми-дипольного резонанса в  $^{208}\text{Pb}$  в самосогласованной модели // *Письма в ЖЭТФ.* — 2018. — Т. 107. — С. 699–704.
25. *Tselyaev V. I.* Quasiparticle time blocking approximation within the framework of generalized Green function formalism // *Physical Review C.* — 2007. — Vol. 75, no. 2. — P. 024306.
26. *Audeenkov A., Goriely S., Kamerdzhiiev S., Krewald S.* Self-consistent calculations of the strength function and radiative neutron capture cross section for stable and unstable tin isotopes // *Physical Review C.* — 2011. — Vol. 83, no. 6. — P. 064316.
27. *Камерджиев С. П., Войтенков Д. А., Саперштейн Э. Е. и др.* Самосогласованное описание  $EL$ -переходов между однофононными состояниями в магических ядрах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2017. — Т. 106, № 3. — С. 132–137.
28. *Шитов М. И., Войтенков Д. А., Камерджиев С. П., Толоконников С. В.* Самосогласованные расчеты вероятностей перехода между однофононными  $3-$  и  $2+$  состояниями в изотопах Sn // *Ядерная физика.* — 2022. — Т. 85, № 1. — С. 1–8.
29. *Камерджиев С. П., Ачаковский О. И., Толоконников С. В., Шитов М. И.* Результаты микроскопической самосогласованной теории квазичастично-фононного взаимодействия в ядрах // *Ядерная физика.* — 2019. — Т. 82, № 4. — С. 320–338.
30. *Камерджиев С. П., Шитов М. И.* Ангармонические эффекты второго и третьего порядков в рамках квантовой теории многих тел // *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* — 2019. — Т. 50, № 5. — С. 515–626.

31. Камерджиев С. П., Шитов М. И. Ангармонические эффекты 3-го порядка в ядерной квантовой теории многих тел // *Письма в ЖЭТФ*. — 2019. — Т. 109, № 1. — С. 65–71.
32. Kamerdzhiev S. P., Shitov M. I. Microscopic theory of pygmy- and giant resonances: accounting for complex  $1p1h \otimes \text{phonon}$  configurations // *EPJA*. — 2020. — Vol. 56. — Pp. 265–275.
33. Kamerdzhiev S. P., Shitov M. I. Microscopic Model for Taking into Account Complex Configurations for Pygmy and Giant Resonances // *Physics of Atomic Nuclei*,. — 2021. — Vol. 84, no. 5. — Pp. 649–659.
34. Kamerdzhiev S. P., Shitov M. I. New Equation for the Vertex of Theory of Finite Fermi-Systems: Accounting for Phonon Coupling // *Physics of Atomic Nuclei*,. — 2021. — Vol. 84, no. 6. — Pp. 804–816.
35. Камерджиев С. П., Шитов М. И. Ангармонические эффекты в теории конечных ферми-систем // *Ядерная физика*. — 2020. — Т. 83, № 1. — С. 47–53.
36. Kamerdzhiev S., Achakovskiy O., Saperstein E. et al. Results of the microscopic self-consistent theory of quasiparticle-phonon interaction in nuclei // Book of abstracts: LXVIII International conference «NUCLEUS-2018». — 2018.
37. Shitov M., Achakovskiy O., Kamerdzhiev S. et al. Self-consistent calculations of transitions between the first one-phonon  $2+$  and  $3-$  states in Sn isotopes // Book of abstracts: LXX International conference «NUCLEUS-2020». — 2020.
38. Kamerdzhiev S., Shitov M. On the microscopic pygmy- and giant resonances theory accounting for complex  $1p1h \otimes \text{phonon}$  configurations // Book of abstracts: LXX International conference «NUCLEUS-2020». — 2020.
39. Kamerdzhiev S., Shitov M. Microscopic theory of pygmy- and giant resonances: accounting for complex  $1p1h \otimes \text{phonon}$  and two-phonon configurations // Book of abstracts: LXXI International conference «NUCLEUS-2021». — 2021.
40. Shitov M., Achakovskiy O., Kamerdzhiev S. et al. The role of spin-spin forces in calculations of transition probabilities between the first one-phonon states // Book of abstracts: LXXI International conference «NUCLEUS-2021». — 2021.

41. *Камерджиев С. П.* Об эффективном квадрупольном заряде в ядрах // *Ядерная физика*. — 1965. — Т. 2. — С. 415–422.
42. *Бор О., Моттельсон Б.* Структура атомного ядра т. 2. — Москва: Мир, 1977. — 663 с.
43. *Kamerdzhiev S. P., Saperstein E. E.* Interaction of the single-particle and collective degrees of freedom in non-magic nuclei: The role of phonon tadpole terms // *The European Physical Journal A*. — 2008. — Vol. 37, no. 3. — Pp. 333–341.
44. *Ходель В. А.* Описание сверхтяжелых ядер с использованием модифицированного функционала энергии *DF3* // *Ядерная физика*. — 1976. — Т. 24. — С. 367.
45. *Fayans S. A., Platonov A. P., Graw G., Hofer D.* Microscopic description of low lying one and two phonon states and application to Zr-96 // *Nucl. Phys. A*. — 1994. — Vol. 577. — Pp. 557–584.
46. *Hohenberg P., Kohn W.* Density functional theory (DFT) // *Phys. Rev.* — 1964. — Vol. 136. — P. B864.
47. *Horen D. J., Satchler G. R., Fayans S. A., Trykov E. L.* Microscopic description of the excitation of some states in the 90, 92, 94, 96 Zr isotopes // *Nuclear Physics A*. — 1996. — Vol. 600, no. 2. — Pp. 193–235.
48. *Borzov I. N., Fayans S. A., Krömer E., Zawischa D.* Ground state properties and  $\beta$ -decay half-lives near  $^{132}\text{Sn}$  in a self-consistent theory // *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*. — 1996. — Vol. 355, no. 1. — Pp. 117–127.
49. *Fayans S. A., Tolokonnikov S. V., Trykov E. L., Zawischa D.* Nuclear isotope shifts within the local energy-density functional approach // *Nuclear Physics A*. — 2000. — Vol. 676, no. 1-4. — Pp. 49–119.
50. *Khodel V. A., Saperstein E. E., Zverev M. V.* Effects of mass operator energy dependence in atomic nuclei: Quasiparticle lagrangian versus quasiparticle hamiltonian // *Nuclear Physics A*. — 1987. — Vol. 465, no. 3. — Pp. 397–412.
51. *Саперштейн Э. Е., Троицкий М. А.* Разность масс околوماгических ядер // *Ядерная физика*. — 1965. — Т. 1. — С. 400–406.

52. Зверев М. В., Саперштейн Э. Е. Некоторые вопросы самосогласованной теории спаривания в атомных ядрах. Область свинца и ядра "дваждымагические±2 нуклона- // *Ядерная физика*. — 1985. — Т. 42. — С. 1082–1092.
53. Goriely S., Hilaire S., Girod M., Péru S. First gogny-hartree-fock-bogoliubov nuclear mass model // *Physical review letters*. — 2009. — Vol. 102, no. 24. — P. 242501.
54. Fayans S. A. Towards a universal nuclear density functional // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. — 1998. — Vol. 68, no. 3. — Pp. 169–174.
55. Rosenfeld L. Nuclear forces. — Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1948.
56. Thouless D. J. Vibrational states of nuclei in the random phase approximation // *Nuclear Physics*. — 1961. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 78–95.
57. Brown GE, Evans JA, Thouless DJ. Vibrations of spherical nuclei // *Nuclear Physics*. — 1961. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 1–17.
58. Brown G. E. United theory of nuclear models, 2nd edition. — Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1967.
59. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра т. 1. — Москва: Мир, 1971. — 456 с.
60. Litvinova E., Ring P., Tselyaev V. Relativistic two-phonon model for the low-energy nuclear response // *Physical Review C*. — 2013. — Vol. 88, no. 4. — P. 044320.
61. Litvinova E., Schuck P. Toward an accurate strongly coupled many-body theory within the equation-of-motion framework // *Physical Review C*. — 2019. — Vol. 100, no. 6. — P. 064320.
62. Ponomarev V. Yu., Stoyanov Ch., Tsoneva N., Grinberg M. Boson forbidden low-energy E1-transitions in spherical nuclei // *Nuclear Physics A*. — 1998. — Vol. 635, no. 4. — Pp. 470–483.

63. *Arsenyev N. N., Severyukhin A. P., Voronov V. V., Van Giai N.* Influence of complex configurations on the properties of the pygmy dipole resonance in neutron-rich Ca isotopes // *Physical Review C*. — 2017. — Vol. 95, no. 5. — P. 054312.
64. *Severyukhin A. P., Arsenyev N. N., Pietralla N., Werner V.* Proton-neutron structure of first and second quadrupole excitations of  $^{90}\text{Sr}$  // *The European Physical Journal A*. — 2018. — Vol. 54, no. 1. — Pp. 1–8.
65. *Arsenyev N. N., Severyukhin A. P.* Origin of Low-and High-Energy Monopole Collectivity in  $^{132}\text{Sn}$  // *Universe*. — 2021. — Vol. 7, no. 5. — P. 145.
66. *Ring P, Speth J.* Nuclear structure calculations with a density-dependent force in  $^{208}\text{Pb}$  // *Nuclear Physics A*. — 1974. — Vol. 235, no. 2. — Pp. 315–351.
67. *Voitenkov D. A., Kamerdzhiev S. P., Krewald S. et al.* Self-consistent calculations of quadrupole moments of the first  $2+$  states in Sn and Pb isotopes // *Physical Review C*. — 2012. — Vol. 85, no. 5. — P. 054319.
68. *Камерджиев С. П., Войтенков Д. А., Саперштейн Э. Е., Толоконников С. В.* Самосогласованные расчеты квадрупольных моментов первых  $3^-$ -состояний в изотопах Sn и Pb // *Письма в ЖЭТФ*. — 2018. — Т. 108. — С. 155–160.
69. *Камерджиев С. П., Авдеенков А. В., Войтенков Д. А.* Квазичастично-фононное взаимодействие в теории конечных ферми-систем // *Ядерная физика*. — 2011. — Т. 74. — С. 1509.
70. ENSDF database. — URL: <https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>.
71. *Hamamoto I.* Octupole softness and electric-dipole transitions in yrast spectroscopy // *Nuclear Physics A*. — 1993. — Vol. 557. — Pp. 515–529.
72. *Камерджиев С.П.* E2-переходы и эффективные квадрупольные заряды в нечетных околомagicеских ядрах // *Ядерная физика*. — 1967. — Т. 5. — С. 971.
73. *Авдеенков А. В., Камерджиев С. П.* Описание возбуждений в нечетных немагических ядрах методом функций Грина // *Ядерная физика*. — 1999. — Т. 62. — С. 563.

74. *Spear R.* Reduced electric-octupole transition probabilities, B (E3;  $01+ \rightarrow 31-$ ), for even-even nuclides throughout the periodic table // *Atomic data and nuclear data tables.* — 1989. — Vol. 42, no. 1. — Pp. 55–104.
75. *Говор Л. И., Демидов А. М., Журавлев О. К. и др.* Измерение времени жизни возбужденных состояний  $Sn^{116} - Sn^{124}$  в  $(n, n'\gamma)$ -реакции // *Ядерная Физика.* — 1991. — Т. 54. — С. 330.
76. *Говор Л. И., Демидов А. М., Михайлов И. В.* Сравнение радиационных свойств полных систем уровней четных-четных изотопов  $^{114-124}Sn$  до энергии возбуждения 3,0 МэВ // *Ядерная физика.* — 1991. — Т. 53. — С. 3.
77. *Fayans S. A., Trykov E. L., Zawischa D.* Influence of effective spin-orbit interaction on the collective states of nuclei // *Nuclear Physics A.* — 1994. — Vol. 568, no. 3. — Pp. 523–543.
78. *Enders J., von Neumann-Cosel P., Ponomarev V. Yu., Richter A.* New experimental access to the two-phonon octupole vibration in  $^{208}Pb$  // *Nuclear Physics A.* — 1997. — Vol. 612, no. 2. — Pp. 239–248.
79. *Саперштейн Э. Е., Ачаковский О. И., Камерджиев С. П. и др.* Эффекты фононной связи в магнитных моментах магических и полумагических ядер // *Ядерная физика.* — 2014. — Т. 77. — С. 1089.
80. *Saperstein E. E., Kamerdzhiev S. P., Krepish D. S. et al.* The first self-consistent calculation of quadrupole moments of odd semi-magic nuclei accounting for phonon-induced corrections // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* — 2017. — Vol. 44, no. 6. — P. 065104.
81. *Khodel V. A., Platonov A. P., Saperstein E. E.* On the particle-vibration multiplets // *Journal of Physics G: Nuclear Physics.* — 1980. — Vol. 6, no. 10. — P. 1199.
82. *Goriely S., Khan E., Samyn M.* Microscopic HFB+ QRPA predictions of dipole strength for astrophysics applications // *Nuclear Physics A.* — 2004. — Vol. 739, no. 3-4. — Pp. 331–352.
83. *Tselyaev V., Lyutorovich N., Speth J. et al.* Application of an extended random-phase approximation to giant resonances in light-, medium-, and heavy-mass nuclei // *Physical Review C.* — 2016. — Vol. 94, no. 3. — P. 034306.

84. *Repko A., Nesterenko V. O., Kvasil J., Reinhard P-G.* Systematics of toroidal dipole modes in Ca, Ni, Zr, and Sn isotopes // *The European Physical Journal A*. — 2019. — Vol. 55, no. 12. — Pp. 1–15.
85. *Savran D., Aumann T., Zilges A.* Experimental studies of the pygmy dipole resonance // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. — 2013. — Vol. 70. — Pp. 210–245.
86. *Litvinova E., Ring P., Tselyaev V.* Relativistic quasiparticle time blocking approximation: Dipole response of open-shell nuclei // *Physical Review C*. — 2008. — Vol. 78, no. 1. — P. 014312.
87. *Kamerdzhiev S. P., Tertychnyĭ G. Ya., Tselyaev V. I.* The method of time-ordered graph decoupling and its application to the description of giant resonances in magic nuclei // *Physics of Particles and Nuclei*. — 1997. — Vol. 28, no. 2. — Pp. 134–158.
88. *Kamerdzhiev S. P., Tkachev V. N.* M1 resonance calculations in magic nuclei taking into account  $1p1h+$  phonon configurations // *Physics Letters B*. — 1984. — Vol. 142, no. 4. — Pp. 225–228.
89. *Kamerdzhiev S. P., Tkachev V. N.* A microscopic model taking into account  $2p2h$  configurations in magic nuclei. Calculations of M1 excitations // *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*. — 1989. — Vol. 334, no. 1. — Pp. 19–31.
90. *Bortignon P., Broglia R.* Role of the nuclear surface in a unified description of the damping of single-particle states and giant resonances // *Nuclear Physics A*. — 1981. — Vol. 371, no. 3. — Pp. 405–429.
91. *Bortignon P. F., Broglia R. A., Bertsch G. F., Pacheco J.* Damping of nuclear excitations at finite temperature // *Nuclear Physics A*. — 1986. — Vol. 460, no. 2. — Pp. 149–163.
92. *Tselyaev V., Lyutorovich N., Speth J., Reinhard P-G.* Self-consistency in the phonon space of the particle-phonon coupling model // *Physical Review C*. — 2018. — Vol. 97, no. 4. — P. 044308.
93. *Tselyaev V., Lyutorovich N., Speth J., Reinhard P-G.* M 1 resonance in Pb 208 within the self-consistent phonon-coupling model // *Physical Review C*. — 2020. — Vol. 102, no. 6. — P. 064319.

94. *Соловьев В. Т.* Теория атомного ядра: Квазичастицы и фононы. — Москва: Энергоатомиздат, 1989. — 304 с.
95. *Edmonds A. R.* Angular momentum in quantum mechanics. — Princeton: Princeton university press, 2016.
96. *Барабанов А. Л.* Симметрии и спин-угловые корреляции в реакциях и распадах. — Москва: Физматлит, 2010. — 520 с.



## Список рисунков

1.1	$g^2$ -поправки к массовому оператору в магических ядрах. Кружки с одной волнистой линией в первом слагаемом – амплитуды рождения фонона $g$ . Волнистые линии – ФГ фонона $D$ . Сплошные линии – одночастичные ФГ. Второе слагаемое – фононный тэдпол.	15
1.2	Уравнение 1.15 в диаграммном виде.	15
2.1	Матричный элемент амплитуды перехода для случая двух фононов $M_{ss'}$ в магическом ядре. $V$ – вершина, пунктир – внешнее поле с энергией $\omega$ , $s$ и $s'$ – фононы, стрелками обозначены одночастичные функции Грина.	23
2.2	Вершины $g_L^{(p,n)}(r)$ для состояния $3_1^-$ в ядре $^{208}Pb$ . Для сравнения изображены поверхностные члены (2.12) $\alpha_L^{(p,n)} dU^{(p,n)}/dr$ ( $\alpha_L^p = 0.334$ фм, $\alpha_L^n = 0.322$ фм)	27
2.3	. Вершины $V(r)$ для $E1$ (а) и $E2$ (б) переходов в $^{132}Sn$ и $^{208}Pb$ , рассчитанные в самосогласованной ТКФС (сплошные кривые) и с использованием оценок по формулам (2.14) (штрихи).	29
2.4	Диаграммы для амплитуды перехода $M_{ss'}$ в ядрах со спариванием. Двойные стрелки отвечают аномальным функциям Грина $F$ . Графики с аномальными функциями Грина отделены вертикальной штриховой линией.	31
2.5	Протонная и нейтронная составляющие амплитуды рождения фононов $g_s$ для $^{118}Sn$ . Выделены вклады «основной» компоненты $g_0$ и «спиновой» компоненты $g_1$ .	35
2.6	Протонная и нейтронная составляющие амплитуды рождения фононов $g_s$ для $^{124}Sn$ . Выделены вклады «основной» компоненты $g_0$ и «спиновой» компоненты $g_1$ .	36
2.7	Вершина $V(r)$ для $E1$ -перехода в $^{118}Sn$ , рассчитанная в самосогласованной ТКФС.	39
2.8	Вершина $V(r)$ для $E1$ -перехода в $^{124}Sn$ , рассчитанная в самосогласованной ТКФС.	39

2.9	Правая часть формулы (2.24) в диаграммном виде. Пунктир означает внешнее поле $V_0$ , кружки с одной волнистой линией обозначают амплитуду рождения фонона $g$ , кружки с двумя и тремя волнистыми линиями обозначают, соответственно, величины $g_{12}$ и $g_{123}$ , линии со стрелками – функции Грина. . . . .	41
2.10	Выражение для амплитуды с тремя фононами(2.26) . . . . .	42
2.11	Амплитуда перехода в ядрах со спариванием, полученная при учете только первого слагаемого в (2.26), рис. 2.10. Линии с двумя входящими и двумя выходящими стрелками обозначают ФГ $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ . . . . .	43
2.12	Диаграммы, определяющие $g^2$ -поправки к амплитуде рождения одного фонона. . . . .	49
3.1	Уравнение для вершины $V'$ . Последние две диаграммы содержат $g^2$ -поправки. . . . .	56
3.2	$g^2$ -поправка к вершине $V$ . . . . .	58
3.3	Первая и вторая вариации вершины $\delta^{(1)}V$ и $\delta^{(2)}V$ в поле фонона. Прямоугольники с одной и двумя волнистыми линиями обозначают эффективное взаимодействие $F$ и его вариации в поле фонона. . . . .	59
3.4	Уравнение (3.6) для новой вершины $\tilde{V}$ с учетом КФВ в диаграммном представлении. Нумерация линий совпадает с расположением соответствующих членов в уравнении (3.6). Прямоугольники – эффективное взаимодействие $F$ . . . . .	60
3.5	Диаграммное представление основной $g^2$ поправки (3.8) для вершины. . . . .	63
3.6	Точные выражения для вариаций $\delta^{(1)}V$ и $\delta^{(2)}V$ вершины в поле фонона. Прямоугольники с $\Gamma$ и $d\Gamma$ и $d^{(2)}\Gamma$ обозначают соответствующие величины $\Gamma(3.12)$ и $d\Gamma(3.13)$ и $d^{(2)}\Gamma(3.16)$ . . . . .	65
3.7	Диаграммное представление уравнения для вершины(3.22). . . . .	66
3.8	Диаграммное представление соотношения (3.24). . . . .	67
3.9	Новейшее уравнение для вершины (3.25) с учетом сложных $1p1h \otimes$ фонон- и двухфононных конфигураций в диаграммном представлении. . . . .	69
3.10	Уравнение для вершины (3.36). . . . .	73
3.11	Уравнение для вершины (3.37). . . . .	74

3.12	Новейшее уравнение для вершины (3.20) с учетом сложных $1p1h$ -фонон- и двухфононных конфигураций в диаграммном представлении. . . . .	75
3.13	Уравнение для вершины(3.42) в диаграммном виде. Члены с $\delta F$ опущены, как предположительно незначительные (см. текст). . . . .	77
3.14	Выражение для поляризационного оператора (3.51) без учета слагаемых с $\delta F$ . . . . .	79

## Список таблиц

1	Параметры функционала Фаянса DF3-а. . . . .	19
2	Характеристики однофононных состояний магических изотопов олова и свинца . . . . .	27
3	Приведенные вероятности переходов $(EL)$ , $e^2\text{фм}^{2L}$ (экспериментальные данные [70]). В колонке 4 приведены результаты расчетов без новых КОС и поляризуемости ядра, в колонке 5 - КОС $\neq 0$ и с оценкой поляризуемости по формулам (2.14), в колонке 6 – с КОС=0 и учетом поляризуемости через решение уравнения для вершины, окончательные результаты показаны в колонке 7 . . . . .	29
4	Характеристики фононов в изотопах Sn: энергии (МэВ) первых $3^-(\omega_3)$ -, $2^+(\omega_2)$ - состояний и приведенные вероятности переходов $B(EL) \uparrow (e^2b^L)$ (экспериментальные данные взяты из [70; 74]) . . . . .	34
5	Приведенные вероятности перехода между первыми $3^-$ и $2^+$ -фононами $B(E1)$ , $e^2\text{фм}^2$ для изотопов олова (в колонке 2 приведены результаты расчетов без учета поляризуемости и без КОС; в колонке 3 – с поляризуемостью, но без КОС; в колонке 4 – без поляризуемости, но с КОС; в колонке 5 – окончательные результаты с поляризуемостью и КОС; в колонке 6 – эксперимент [75; 76]) . . . . .	37
6	Влияние учета спиновых составляющих в амплитуде рождения фонона на величину приведенной вероятности перехода между первыми $3^-$ и $2^+$ -состояниями $B(E1)$ , $e^2\text{фм}^2$ . . . . .	38
7	Вклад отдельных групп графиков (рис. 2.4) в полную амплитуду перехода $M_{ss'}$ , см. формулу (2.11) ( $M^n$ , $M^p$ – нейтронная и протонная составляющие амплитуды $M_{ss'}$ , $e$ фм) . . . . .	40

## Приложение А

### Отделение угловых переменных и расчет интегралов для магических ядер

Для амплитуды перехода мы имеем выражение

$$M_{ss'}^{(1)} = \sum_{123} V_{12} g_{23}^{s'} (g_{31}^s)^* A_{123}^{(1)} \quad (\text{A.1})$$

где

$$V_{12}^{LM} = (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & L & j_2 \\ -m_1 & M & m_2 \end{pmatrix} \langle 1|V^L|2 \rangle \quad (\text{A.2})$$

и

$$g_{23}^{s'} = (-1)^{j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_2 & I_{s'} & j_3 \\ -m_2 & M_{s'} & m_3 \end{pmatrix} \langle 2|g^{s'}|3 \rangle \quad (\text{A.3})$$

а для  $(g_{31}^s)^*$  применяя свойство

$$(Y_{LM})^* = (-1)^M Y_{L-M} \quad (\text{A.4})$$

$$g_{31}^s = (-1)^{j_3 - m_3 + M_s} \begin{pmatrix} j_3 & I_s & j_1 \\ -m_3 & -M_s & m_1 \end{pmatrix} \langle 3|g^s|1 \rangle \quad (\text{A.5})$$

Угловые части преобразуются используя формулы симметрии и связи 3j и 6j символов [95]

$$\begin{aligned} Vgg \sim & (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & L & j_2 \\ -m_1 & M & m_2 \end{pmatrix} (-1)^{j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_2 & I_{s'} & j_3 \\ -m_2 & M_{s'} & m_3 \end{pmatrix} (-1)^{j_3 - m_3 + M_s} \\ & \begin{pmatrix} j_3 & I_s & j_1 \\ -m_3 & -M_s & m_1 \end{pmatrix} = (-1)_s^M \begin{pmatrix} I_s & I_{s'} & L \\ -M_s & M_{s'} & M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} I_s & I_{s'} & L \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Повторяя аналогичные действия для обратной амплитуды

$$M_{ss'}^{(2)} = \sum_{123} V_{12} g_{23}^s (g_{31}^{s'})^* A_{123}^{(2)} \quad (\text{A.7})$$

получаем

$$Vgg \sim = (-1)_s^M \begin{pmatrix} I_{s'} & I_s & L \\ M_{s'} & -M_s & M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} I_{s'} & I_s & L \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.8})$$

Найдем теперь интегралы от трех ФГ:

$$A_{123}^{(1)}(\omega_s) = \int G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 + \omega)G_1(\varepsilon_1 - \omega_s) = \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{n_1 n_2 (1 - n_3)}{(\varepsilon_{31} + \omega_s)(\varepsilon_{32} + \omega + \omega_s)} + \frac{(1 - n_1)(1 - n_2)n_3}{(\varepsilon_{31} + \omega_s)(\varepsilon_{32} + \omega + \omega_s)} \\ &+ \frac{(1 - n_1)n_2(1 - n_3)}{(\varepsilon_{21} - \omega)(\varepsilon_{23} - \omega - \omega_s)} - \frac{n_1(1 - n_2)n_3}{(\varepsilon_{21} - \omega)(\varepsilon_{23} - \omega - \omega_s)} \\ &+ \frac{n_1(1 - n_2)(1 - n_3)}{(\varepsilon_{12} + \omega)(\varepsilon_{13} - \omega_s)} - \frac{(1 - n_1)n_2 n_3}{(\varepsilon_{12} + \omega)(\varepsilon_{13} - \omega_s)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

для  $A_{123}^{(2)}$

$$A_{123}^{(2)}(\omega_{s'}) = \int G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 + \omega)G_1(\varepsilon_1 + \omega_{s'}) = \quad (\text{A.11})$$

$$A_{123}^{(2)}(\omega_s, \omega_{s'}) = A_{123}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s) \quad (\text{A.12})$$

Учитывая свойства симметрии и преобразования 3j и 6j символов [95], произведем замену  $2 \leftrightarrow 1$  в  $M_{ss'}^{(2)}$ , тогда угловые части в  $M_{ss'}^{(1)}$  и  $M_{ss'}^{(2)}$  будут одинаковы. Учтя

$$B(EL) = \sum | \langle I_s | M_L | I_{s'} \rangle | \quad (\text{A.13})$$

можем просуммировать 3j символы и получить окончательную формулу:

$$B(EL) = \frac{1}{2I_s + 1} | \langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle |^2, \quad (\text{A.14})$$

где

$$\langle I_s || M_L || I_{s'} \rangle = \Sigma_{123} \left\{ \begin{matrix} I_s & I_{s'} & L \\ j_2 & j_1 & j_3 \end{matrix} \right\} V_{12} g_{31}^s g_{23}^{s'} [A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) + A_{213}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s)], \quad (\text{A.15})$$

$$A_{123}^{(1)}(\omega_s, \omega_{s'}) + A_{213}^{(1)}(-\omega_{s'}, -\omega_s) = \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} &= [(1 - n_1)(1 - n_2)n_3 - n_1 n_2 (1 - n_3)] \times \frac{2(\varepsilon_{31}\varepsilon_{32} + \omega_{s'}\omega_s)}{(\varepsilon_{32}^2 - \omega_{s'}^2)(\varepsilon_{31}^2 - \omega_s^2)} \\ &+ [n_1(1 - n_2)(1 - n_3) - (1 - n_1)n_2 n_3] \times \frac{2(\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} + \omega\omega_s)}{(\varepsilon_{12}^2 - \omega^2)(\varepsilon_{13}^2 - \omega_s^2)} \\ &+ [(1 - n_1)n_2(1 - n_3) - n_1(1 - n_2)n_3] \times \frac{2(\varepsilon_{21}\varepsilon_{23} - \omega\omega_{s'})}{(\varepsilon_{21}^2 - \omega^2)(\varepsilon_{23}^2 - \omega_{s'}^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

## Приложение Б

### Пропагаторы для полумагических ядер

Для полумагических ядер мы используем тот же подход, что и для магических ядер. Отделение угловых переменных проводится полностью аналогичным способом, потому здесь мы приведем только интегралы от  $\Phi\Gamma$ , которые теперь включают в себя аномальные  $\Phi\Gamma$  (1.9).

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(1)} &= \int G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 + \omega)G_3(\varepsilon_1 - \omega_s) = \\
&= \frac{u_1^2 u_2^2 v_3^2}{(E_{31} + \omega_s)(E_{32} + \omega_{s'})} + \frac{v_1^2 v_2^2 u_3^2}{(E_{31} - \omega_s)(E_{32} - \omega_{s'})} \\
&- \frac{u_1^2 v_2^2 u_3^2}{(E_{21} - \omega)(E_{23} + \omega_{s'})} - \frac{v_1^2 u_2^2 v_3^2}{(E_{21} + \omega)(E_{23} - \omega_{s'})} \\
&+ \frac{v_1^2 u_2^2 u_3^2}{(E_{12} - \omega)(E_{13} + \omega_s)} + \frac{u_1^2 v_2^2 v_3^2}{(E_{12} + \omega)(E_{13} - \omega_s)}
\end{aligned} \tag{Б.1}$$

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(2)} &= \int G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 + \omega)G_3(\varepsilon_1 + \omega'_s) \\
A_{123}^{(2)}(\omega, \omega_s, \omega_{s'}) &= A_{213}^{(1)}(\omega, -\omega_{s'}, -\omega_s)
\end{aligned} \tag{Б.2}$$

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(3)} &= \int F_1(\varepsilon_1)F_2(\varepsilon_1 + \omega)G_3(-\varepsilon_1 + \omega_s) = \\
&= \frac{\Delta_1 \Delta_2}{4E_1 E_2} \left[ -\frac{v_3^2}{(E_{31} + \omega_s)(E_{32} + \omega_{s'})} - \frac{u_3^2}{(E_{31} - \omega_s)(E_{32} - \omega_{s'})} \right. \\
&+ \frac{v_3^2}{(E_{21} + \omega)(E_{23} + \omega_{s'})} + \frac{u_3^2}{(E_{21} - \omega)(E_{23} - \omega_{s'})} \\
&\left. + \frac{u_3^2}{(E_{12} + \omega)(E_{13} - \omega_s)} - \frac{v_3^2}{(E_{12} - \omega)(E_{13} + \omega_s)} \right]
\end{aligned} \tag{Б.3}$$

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(4)} &= \int F_1(\varepsilon_1)F_2(\varepsilon_1 + \omega)G_3(-\varepsilon_1 - \omega'_s) \\
A_{123}^{(4)}(\omega, \omega_s, \omega_{s'}) &= A_{213}^{(3)}(\omega, -\omega_{s'}, -\omega_s)
\end{aligned} \tag{Б.4}$$

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(5)} &= \int G_1(\varepsilon_1)F_2(\varepsilon_1 + \omega)F_3(\varepsilon_1 - \omega_s) = \\
&= \frac{\Delta_2\Delta_3}{4E_2E_3} \left[ -\frac{v_1^2}{(E_{31} + \omega_s)(E_{32} + \omega_{s'})} - \frac{u_1^2}{(E_{31} - \omega_s)(E_{32} - \omega_{s'})} \right. \\
&+ \frac{v_1^2}{(E_{21} - \omega)(E_{23} - \omega_{s'})} + \frac{u_1^2}{(E_{21} + \omega)(E_{23} + \omega_{s'})} \\
&\left. + \frac{u_1^2}{(E_{12} + \omega)(E_{13} - \omega_s)} + \frac{v_1^2}{(E_{12} - \omega)(E_{13} + \omega_s)} \right] \tag{B.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(8)} &= \int F_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 + \omega)F_3(\varepsilon_1 + \omega'_s) \\
A_{123}^{(8)}(\omega, \omega_s, \omega_{s'}) &= A_{213}^{(5)}(\omega, -\omega_{s'}, -\omega_s) \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(7)} &= \int F_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 + \omega)F_3(\varepsilon_1 - \omega_s) \\
A_{123}^{(7)}(\omega, \omega_s, \omega_{s'}) &= A_{123}^{(8)}(\omega, -\omega_{s'}, -\omega_s) \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{123}^{(6)} &= \int G_1(\varepsilon_1)F_2(\varepsilon_1 + \omega)F_3(\varepsilon_1 + \omega'_s) \\
A_{123}^{(6)}(\omega, \omega_s, \omega_{s'}) &= A_{213}^{(7)}(\omega, -\omega_{s'}, -\omega_s) \tag{B.8}
\end{aligned}$$



## Приложение В

### Отделение угловых переменных для амплитуды перехода между двухфононным и однофононным состояниями

Для начала проведем анализ только первых двух графиков на рис. 2.11, с учетом возможных перестановок фононов. Для того чтобы дополнить этот расчет для магических ядер учетом спаривания необходимо будет только учесть дополнительные пропагаторы от аномальных ФГ. Расчет же угловой части будет полностью совпадать. Так как для данной задачи нужно рассчитать 48 пропагаторов – интегралов от 4 ФГ, здесь будет приведена только их окончательная сумма.

Как видно из рисунка 2.11, у нас есть 3 возможных расположения фонона (на рисунке они отмечены пустым кругом). Так как мы изучаем переход  $[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4$ , будем иметь 2 принципиально отличающиеся по структуре группы графиков: в первой фонон 4 будет располагаться между фононами 1 и 2. Во второй группе он будет расположен сверху или снизу от группы фононов  $1 \times 2$ . Начнем анализ с группы графиков, в которой фонон 4 располагается между фононами 1 и 2. Для амплитуды перехода, соответствующей первому графику имеем:

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(1)} = \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1^*} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2^*} A_{1234}^{(1)} \quad (\text{B.1})$$

Где  $A_{1234}^{(1)}$  есть интеграл от 4 функций Грина:

$$A_{1234}^{(1)} = \int G_1(\varepsilon) G_2(\varepsilon - \omega) G_3(\varepsilon - \omega_1) G_4(\varepsilon - \omega + \omega_2) d\varepsilon \quad (\text{B.2})$$

с законом сохранения

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega + \omega_4 \quad (\text{B.3})$$

Проведем отделение угловых переменных:

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(1)} &= \sum_{1234} (-1)^{j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_2 & L & j_1 \\ -m_2 & M & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{j_1 - m_1 + M_1} \\
&\begin{pmatrix} j_1 & I_1 & j_3 \\ -m_1 & -M_1 & m_3 \end{pmatrix} (-1)^{j_3 - m_3} \begin{pmatrix} j_3 & I_4 & j_4 \\ -m_3 & M_4 & m_4 \end{pmatrix} (-1)^{j_4 - m_4 + M_2} \\
&\begin{pmatrix} j_4 & I_2 & j_2 \\ -m_4 & -M_2 & m_2 \end{pmatrix} V_{21} g_{13}^{s_1^*} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2^*} A_{1234}^{(1)} \quad (B.4)
\end{aligned}$$

воспользуемся формулой (A.165) [96]

$$\begin{aligned}
\sum_{ff'mm'} C_{FfQq}^{F'f'} C_{Ll\Lambda\lambda}^{L'm'} C_{F'f'L'm'}^{J'M'} C_{FfLm}^{JM} &= \sum_{Nn} \sqrt{(2N+1)(2J+1)(2F'+1)(2L'+1)} \\
&C_{Qq\Lambda\lambda}^{Nn} C_{JMn}^{J'M'} \cdot \begin{Bmatrix} J' & F' & L' \\ J & F & L \\ N & Q & \Lambda \end{Bmatrix} \quad (B.5)
\end{aligned}$$

переведем её на язык 3j, используя соотношение

$$C_{FfLm}^{JM} = \sqrt{2J+1} (-1)^{F-L+M} \begin{pmatrix} F & L & J \\ f & l & -M \end{pmatrix} \quad (B.6)$$

Получим следующий результат

$$\begin{aligned}
\sum_{ff'mm'} (-1)^{2F+F'-2Q-L'-J+f'+m'+M} &\begin{pmatrix} F & Q & F' \\ f & q & -f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \Lambda & L' \\ l & \lambda & -l' \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} F' & L' & J' \\ f' & l' & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & L & J \\ f & l & -M \end{pmatrix} &= \sum_{Nn} (-1)^{-N+n} (2N+1) \begin{pmatrix} Q & \Lambda & N \\ q & \lambda & -n \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} J & N & J' \\ M & n & -M' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J' & F' & L' \\ J & F & L \\ N & Q & \Lambda \end{Bmatrix} \quad (B.7)
\end{aligned}$$

Чтобы нагляднее воспользоваться этой формулой преобразуем соответствующую часть выражения 2 к подходящему виду

$$\sum_{-m_1-m_2m_3m_4} (-1)^{\sum j+m_1+m_2-m_3-m_4+M_1+M_2} \begin{pmatrix} j_1 & L & j_2 \\ -m_1 & -M & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & I_4 & j_4 \\ m_3 & -M_4 & -m_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & I_2 \\ -m_2 & m_4 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & I_1 \\ -m_1 & m_3 & -M_1 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{2(j_1+j_2+L)+(j_3+j_4+I_4)+(j_2+j_4+I_2)+(j_1+j_3+I_1)} \quad (\text{B.8})$$

Применяя к этому выражению преобразование (B.7) получим

$$\sum_{Jm} (-1)^{j_2+3j_3+4j_4+2L+2I_1+I_2+I_4+3M_2-M_1-J+m} \cdot (2J+1) \begin{pmatrix} L & I_4 & J \\ M & -M_4 & -m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_1 & J & I_2 \\ M_1 & m & M_2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} I_2 & j_2 & j_4 \\ I_1 & j_1 & j_3 \\ J & L & I_4 \end{matrix} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Переставляя элементы символов и учтя нормировку получаем

$$\sum_{I_3} (-1)^{I_3} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_3 \end{matrix} \right\} \quad (\text{B.10})$$

Таким образом для амплитуды переходя из двухфононного состояния в однофононное имеем:

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(1)} = \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} A_{1234}^{(1)} \sum_{I_3} (-1)^{I_3} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_3 \end{matrix} \right\} \quad (\text{B.11})$$

Рассчитаем теперь интеграл от четырех функций Грина  $A_{1234}^{(1)}$

$$A_{1234}^{(1)} = \int \left( \frac{u_1}{\varepsilon - E_1 + i\delta} + \frac{v_1}{\varepsilon + E_1 - i\delta} \right) \left( \frac{u_2}{\varepsilon - \omega - E_2 + i\delta} + \frac{v_2}{\varepsilon - \omega + E_2 - i\delta} \right) \\ \left( \frac{u_3}{\varepsilon - \omega_1 - E_3 + i\delta} + \frac{v_3}{\varepsilon - \omega_1 + E_3 - i\delta} \right) \\ \left( \frac{u_4}{\varepsilon - \omega + \omega_2 - E_4 + i\delta} + \frac{v_4}{\varepsilon - -\omega + \omega_2 + E_4 - i\delta} \right) \quad (\text{B.12})$$

Здесь содержится дополнительная часть, по сравнению с аналогичными результатами полученными в работе [62]. Перенесем ее в общий КОС член, и сосредоточимся на совпадающих частях формулы. В этом случае

$$\begin{aligned}
A_{1234}^{(1)} &= u_1 v_2 v_3 u_4 \\
&\left( \frac{1}{(\omega - E_{12})(\omega - \omega_1 - E_{23}^-)(\omega_2 - E_{42})} + \frac{1}{(\omega_1 - E_{13})(\omega_1 - \omega + E_{23}^-)(\omega_4 - E_{34})} \right) + \\
&+ v_1 u_2 u_3 v_4 \\
&\left( \frac{1}{(\omega + E_{12})(\omega_2 - \omega + E_{41}^-)(\omega_1 + E_{13})} + \frac{1}{(\omega_2 - E_{42})(\omega - \omega_2 - E_{41}^-)(\omega_4 + E_{34})} \right),
\end{aligned} \tag{B.13}$$

где  $E_{23}^- = E_2 - E_3$ . Упрощение этой части приводит к следующему результату

$$\begin{aligned}
A_{1234}^{(1)} &= u_1 v_2 v_3 u_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 - \omega_2}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) \\
&+ v_1 u_2 u_3 v_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 + \omega_2}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Полное выражение для первой амплитуды перехода:

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(1)} &= \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} \sum_{I_3} (-1)^{I_3} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_3 \end{array} \right\} \cdot \\
&\left[ u_1 v_2 v_3 u_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 - \omega_2}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) \right. \\
&\left. + v_1 u_2 u_3 v_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 + \omega_2}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Повторим анализ для второго графика на рис. 2.11. Разворот направления стрелок дает тот же результат, что и замена фонона 2 на фонон 1, так что

сразу можем написать

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(2)} &= \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_2} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_1} \sum_{I_3} (-1)^{I_3} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \right\} \cdot \\
&\left[ u_1 v_2 v_3 u_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 - \omega_2}{(\omega - E_{12})(\omega_2 - E_{13})(\omega_1 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) \right. \\
&\left. + v_1 u_2 u_3 v_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 + \omega_2}{(\omega + E_{12})(\omega_2 + E_{13})(\omega_1 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) \right] \quad (B.16)
\end{aligned}$$

А теперь заменим одночастичные индексы индексы  $1 \leftrightarrow 2$  и  $3 \leftrightarrow 4$ . При этом основная часть выражения придет в согласие с соответствующей частью в  $M^{(1)}$  (с учетом симметрии в 9j), а интеграл от 4 ФГ поменяет знаки (так как  $v_1 u_2 u_3 v_4$  превратится в  $u_1 v_2 v_3 u_4$ ). Получим:

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(2)} &= \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} \sum_{I_3} (-1)^{I_3} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_3 \end{array} \right\} \cdot \\
&\left[ u_1 v_2 v_3 u_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 + \omega_2}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) \right. \\
&\left. + v_1 u_2 u_3 v_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 - \omega_2}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) \right] \quad (B.17)
\end{aligned}$$

Получаем для первых двух графиков для случая когда фотон 4 находится между фотонами 1 и 2 (используя закон сохранения  $\omega_1 + \omega_2 = \omega + \omega_4$ ):

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(12)} &= \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} \sum_{I_3} (-1)^{I_3} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_3 \end{array} \right\} \cdot \\
&(u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4) \left[ \frac{(E_{12} - \omega) + (E_{34} - \omega_4)}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right. \\
&\left. \frac{(E_{12} + \omega) + (E_{34} + \omega_4)}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right] \quad (B.18)
\end{aligned}$$

Если теперь разделить дроби на части, мы получаем результат аналогичный первой части формулы (10) в работе [62] с дополнительной группой КОС-чле-

НОВ.

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(12)} = \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} \sum_{I_3} (-1)^{I_3} \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & I_3 \end{Bmatrix} \cdot \left( (u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4) \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{1}{(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} + \frac{1}{(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega - E_{12})} + \frac{1}{(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega + E_{12})} \right) \right] \right) \quad (\text{B.19})$$

Перейдем к анализу групп графиков, для случая когда фонон 4 находится рядом с группой фононов 1 и 2. В этом случае амплитуда перехода:

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(3)} = \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1*} g_{34}^{s_2*} g_{42}^{s_4} A_{1234}^{(3)} \quad (\text{B.20})$$

Где  $A_{1234}^{(3)}$  есть интеграл от 4 функций Грина:

$$A_{1234}^{(3)} = \int G_1(\varepsilon) G_2(\varepsilon - \omega) G_3(\varepsilon - \omega_1) G_4(\varepsilon - \omega - \omega_4) d\varepsilon \quad (\text{B.21})$$

с законом сохранения

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega + \omega_4 \quad (\text{B.22})$$

Проведем отделение угловых переменных:

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(3)} = \sum_{1234} (-1)^{j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_2 & L & j_1 \\ -m_2 & M & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{j_1 - m_1 + M_1} \\ \begin{pmatrix} j_1 & I_1 & j_3 \\ -m_1 & -M_1 & m_3 \end{pmatrix} (-1)^{j_3 - m_3} \begin{pmatrix} j_3 & I_2 & j_4 \\ -m_3 & -M_2 & m_4 \end{pmatrix} (-1)^{j_4 - m_4 + M_2} \\ \begin{pmatrix} j_4 & I_4 & j_2 \\ -m_4 & M_4 & m_2 \end{pmatrix} V_{21} g_{13}^{s_1*} g_{34}^{s_2*} g_{42}^{s_4} A_{1234}^{(3)} \quad (\text{B.23})$$

Преобразуем угловую часть используя формулы [95]:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} (-1)^{\sum j - \sum m + M_1 + M_2} \begin{pmatrix} j_2 & L & j_1 \\ -m_2 & M & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & j_3 & j_1 \\ -M_1 & m_3 & -m_1 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} j_3 & I_2 & j_4 \\ -m_3 & -M_2 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & I_4 & j_2 \\ -m_4 & M_4 & m_2 \end{pmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_4} \sum_{jm} (-1)^{\sum j - \sum m + M_1 + M_2 + 2I_2} \\
& \begin{Bmatrix} I_1 & j_1 & j_3 \\ j_4 & I_2 & j \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_1 & j \\ m_4 & -m_1 & m \end{pmatrix} (2j+1) \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & j \\ -M_1 & -M_2 & -m \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} j_2 & L & j_1 \\ -m_2 & M & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & I_4 & j_2 \\ -m_4 & M_4 & m_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Преобразовывая произведение трех  $3j$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_2 m_3 m_4} (-1)^{\sum j - \sum m} \begin{pmatrix} I_4 & j_2 & j_4 \\ M_4 & m_2 & -m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j & j_4 \\ -m_1 & m & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & M \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} I_4 & j & L \\ M_4 & m & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_4 & j & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Итого имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{jm} (-1)^{j-m} (2j+1) (-1)^{2j} \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & j \\ -M_1 & -M_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & I_4 & j \\ M & M_4 & m \end{pmatrix} \\
& \begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & j \\ L & I_4 & j_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_1 & I_1 \\ j & I_2 & j_4 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Избавляемся от  $3j$  условием ортогональности и применяем к  $6j$  преобразование (4.40) [95], получим

$$\sum_J (-1)^J (2J+1) \begin{Bmatrix} J & I_4 & I_1 \\ I_2 & j_4 & j_3 \\ L & j_2 & j_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & I_4 & I_1 \\ j & I_2 & L \end{Bmatrix} \tag{B.27}$$

Или же:

$$\sum_J (-1)^J (2J+1) \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_2 \\ I_4 & I_1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & I_4 & I_3 \\ I_1 & I_2 & J \end{Bmatrix} \tag{B.28}$$

Учитывая вид интеграла

$$\begin{aligned}
A_{1234}^{(3)} &= \int G_1(\varepsilon)G_2(\varepsilon - \omega)G_3(\varepsilon - \omega_1)G_4(\varepsilon - \omega - \omega_4)d\varepsilon = \\
&= u_1v_2v_3u_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 + \omega_4}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_4 + E_{24})(\omega_2 + E_{34})} \right) \\
&+ v_1u_2u_3v_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 - \omega_4}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_4 - E_{24})(\omega_2 - E_{34})} \right) \Big] \quad (B.29)
\end{aligned}$$

Произведем замену фонона 2 на фонон 4, в таком случае получим:

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(3)} &= \sum_{1234} V_{21}g_{13}^{s_1}g_{34}^{s_4}g_{42}^{s_2} \sum_J (-1)^J (2J+1) \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & I_2 & I_3 \\ I_1 & I_4 & J \end{Bmatrix} \cdot \\
&\left[ u_1v_2v_3u_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 + \omega_2}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) \right. \\
&\left. + v_1u_2u_3v_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 - \omega_2}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) \right] \quad (B.30)
\end{aligned}$$

для графика с обратным направлением стрелок имеем:

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(4)} &= \sum_{1234} V_{21}g_{13}^{s_4}g_{34}^{s_2}g_{42}^{s_1} \sum_J (-1)^J (2J+1) \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_2 \\ I_1 & I_4 & J \end{Bmatrix} \\
&\begin{Bmatrix} L & I_4 & I_3 \\ I_1 & I_2 & J \end{Bmatrix} A_{1234}^{(4)} \quad (B.31)
\end{aligned}$$

Где

$$A_{1234}^{(4)} = \int G_1(\varepsilon)G_2(\varepsilon - \omega)G_3(\varepsilon + \omega_4)G_4(\varepsilon - \omega + \omega_1)d\varepsilon \quad (B.32)$$

Произведя замену фонона 2 на фонон 4, так же как для  $M^{(3)}$ , получим:

$$\begin{aligned}
M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(4)} &= \sum_{1234} V_{21}g_{13}^{s_2}g_{34}^{s_4}g_{42}^{s_1} \sum_J (-1)^J (2J+1) \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_1 & I_2 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & I_2 & I_3 \\ I_1 & I_4 & J \end{Bmatrix} \cdot \\
&\left[ u_1v_2v_3u_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 + \omega_2}{(\omega - E_{12})(\omega_2 - E_{13})(\omega_1 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) \right. \\
&\left. + v_1u_2u_3v_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 - \omega_2}{(\omega + E_{12})(\omega_2 + E_{13})(\omega_1 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) \right] \quad (B.33)
\end{aligned}$$



Теперь произведем замену одночастичных индексов  $4 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 1$ , точно так же как для  $M^{(2)}$ . Получаем точно такое же преобразование интеграла от 4 ФГ:

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(4)} = \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} \sum_J (-1)^J (2J+1) \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & I_2 & I_3 \\ I_1 & I_4 & J \end{Bmatrix} \cdot \left[ u_1 v_2 v_3 u_4 \left( \frac{E_{1234} + \omega_1 - \omega_2}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) + v_1 u_2 u_3 v_4 \left( \frac{E_{1234} - \omega_1 + \omega_2}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) \right] \quad (\text{B.34})$$

Таким образом для суммы 3 и 4 графиков имеем:

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(34)} = \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} \sum_J (-1)^J (2J+1) \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & I_2 & I_3 \\ I_1 & I_4 & J \end{Bmatrix} \cdot (u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4) \left[ \left( \frac{(E_{12} + \omega) + (E_{34} - \omega_4)}{(\omega + E_{12})(\omega_1 + E_{13})(\omega_2 - E_{24})(\omega_4 - E_{34})} \right) + \left( \frac{(E_{12} - \omega) + (E_{34} + \omega_4)}{(\omega - E_{12})(\omega_1 - E_{13})(\omega_2 + E_{24})(\omega_4 + E_{34})} \right) \right] \quad (\text{B.35})$$

Или же если сократить дроби:

$$M_{[s_1 \times s_2]_{s_3} \rightarrow s_4}^{(34)} = \sum_{1234} V_{21} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_4} g_{42}^{s_2} \sum_J (-1)^J (2J+1) \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & I_2 & I_3 \\ I_1 & I_4 & J \end{Bmatrix} \cdot (u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4) \left[ \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} \right) + \left( \frac{1}{(E_{12} - \omega)(E_{13} - \omega_1)(E_{24} + \omega_2)} + \frac{1}{(E_{12} + \omega)(E_{13} + \omega_1)(E_{24} - \omega_2)} \right) \right] \quad (\text{B.36})$$

Мы получаем вторую часть формулы (10) из работы [62], с дополнительным КОС-членом. Полное выражение для всех четырех графиков:

$$\begin{aligned}
& \langle [s_1 \times s_2]_{I_3} \parallel M^{(3)} \parallel s_4 \rangle = \sum_{1234} V_{12} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_2} g_{42}^{s_3} \times \\
& \quad \sum_J (-1)^J (u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234}) \cdot \\
& \quad \left[ \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} \right) \times \delta_{I_3 J} \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times (2J + 1) \cdot \begin{Bmatrix} L & I_4 & I_3 \\ I_1 & I_2 & J \end{Bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & J \end{Bmatrix} + [GSC] + [uvvv],
\end{aligned}
\tag{B.37}$$

Полное выражение для КОС при первом члене этой формулы приведено ниже (B.38).

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{12} + \omega)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{12} - \omega)} \right) \\
& \quad \cdot \left[ u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{34} - \omega_4)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{12} + \omega)} + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{12} - \omega)} \right) \\
& \quad \cdot \left[ u_1^2 v_2^2 u_3^2 v_4^2 + v_1^2 u_2^2 v_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{24} + \omega_2)} + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{24} - \omega_2)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{13} - \omega_1)} + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{13} + \omega_1)} \right) \\
& \quad \cdot \left[ u_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + v_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{12} + \omega)(E_{13} + \omega_1)} + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{12} - \omega)(E_{13} - \omega_1)} \right) \\
& \quad \cdot \left[ u_1^2 v_2^2 v_3^2 v_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{12} + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{24} + \omega_2)} + \frac{1}{(E_{12} - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{24} - \omega_2)} \right) \\
& \quad \cdot \left[ v_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + u_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{34} - \omega_4)} \right) \\
& \quad \cdot \left[ v_1^2 v_2^2 u_3^2 v_4^2 + u_1^2 u_2^2 v_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
& \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} \right) \\
& \quad \cdot \left[ v_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + u_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234} \right]. \tag{B.38}
\end{aligned}$$

## Приложение Г

### Связь амплитуд рождения одного и двух фононов

Нам необходимо выполнить анализ двух последних слагаемых на рис. 2.12 с использованием имеющихся реалистических оценок амплитуды  $g_{12}$ . Эти оценки основаны на том, что в случае "духового"  $1^-$ -состояния точным решением уравнения для амплитуды  $g_1$  является  $\omega = 0$ ,  $g_1 = \alpha_1 \partial U / \partial r$  где  $U$  – среднее поле, что совпадает с результатами теории Бора-Мотельсона [42]. Тогда, поскольку  $\delta_1 g_1$  есть изменение  $g_1$  в поле дипольного "духового" фонона, которое вызвано сдвигом центра тяжести системы, то для этого случая можно получить из уравнения для  $g_{11}$  :

$$(\delta_1 g_1)_{ik} = C^2 \partial^2 U / \partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_k, \quad (\text{Г.1})$$

где  $C$  – нормировочная константа. Для произвольного  $L$ , то есть реального фонона, главная часть  $\delta_L g_L$  пропорциональна  $\delta_1 g_1$  и, как показали расчеты [81], объемная квантовая поправка не велика по сравнению с поверхностной классической компонентой  $\delta_1 g_1$ . Поэтому можно использовать оценкой (5) положив коэффициент пропорциональности равным коэффициенту динамической деформации  $\alpha_L$ .

Ранее рассматривался только частный случай  $g_{LL}$  соответствующий  $L_1 = L_2$  (случай тэдпола), поэтому для простоты рассмотрим этот же случай для нашей задачи анализа величины  $\Delta g_{\lambda_1 \lambda_2}^{new}$  (два графика на рис. 2.12). Величина  $g_{LL}$  в координатном представлении имеет вид [81]:

$$g_{LL}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{K\Omega} a_{LL}^{K\Omega} Y_{K\Omega}(\vec{\mathbf{n}}) M_{LL}^K(r), \quad (\text{Г.2})$$

где

$$a_{LL}^{K\Omega} = (-1)^{M'+\Omega} \begin{pmatrix} L & L & K \\ M & -M' & -\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & L & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2L+1) \left( \frac{2K+1}{4\pi} \right)^{1/2}, \quad (\text{Г.3})$$

$K=0,2$  и аналогично для свободных членов в уравнении для  $g_{LL}$ . Тогда, решая уравнение для радиальной части  $M_{11}^K(r)$  с учетом похожести решений уравне-

ний для  $g_{11}$  и  $g_{LL}$  можно записать:

$$\begin{aligned} M_{LL}^0(r) &= \alpha_L^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \\ M_{LL}^2(r) &= \alpha_L^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

где  $U$  – самосогласованный потенциал ядра.

Общая формула, которая в (2.32) обозначается, как  $\Delta g_{\lambda_1 \lambda_2}^{new}$  для случая  $L_1 = L_2 = L$  имеет вид:

$$(\Delta g_{LL}^{new})_I = \sum_{\lambda_2 M} g_{13}^{LM} g_{32}^{L-MLM'} I_{\lambda_1 \lambda_3 L}, \quad (\Gamma.5)$$

где

$$g_{13}^{LM} = (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & L & j_3 \\ -m_1 & M & m_3 \end{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1 \| g^L \| \mathbf{v}_3 \rangle, \quad (\Gamma.6)$$

$$I_{\lambda_1 \lambda_3 L} = \int G_{\lambda_3}(\varepsilon_{\lambda_1} + \omega) D_L(\omega) \frac{d\omega}{2\Pi i} = \frac{-n_{\lambda_3}}{\varepsilon_{\lambda_1} - \varepsilon_{\lambda_3} + \omega_L} + \frac{-(1-n)_{\lambda_3}}{\varepsilon_{\lambda_1} - \varepsilon_{\lambda_3} - \omega_L}. \quad (\Gamma.7)$$

Здесь и ниже индексы 1,2,3 означают набор одночастичных квантовых чисел  $1 \equiv \lambda_1 \equiv (n_1, j_1, l_1, m_1) \equiv (\mathbf{v}_1, m_1)$  (сферические ядра).

Подставляя (Г.2), (Г.3) в (Г.5), находим

$$(\Delta g_{LL}^{new})_I = (\Delta g_{LL}^{new})_{\lambda_1 \lambda_2 LM'} = (-1)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ -m_1 & m_2 & M' \end{pmatrix} (\Delta g_{LL}^{new})_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 L}, \quad (\Gamma.8)$$

$$\begin{aligned} (\Delta g_{LL}^{new})_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 L} &= (-1)^{(L-m_2-m_3)} (2L+1) \sum_{\mathbf{v}_3 K} \left( \frac{2K+1}{4\Pi} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} L & L & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ K & L & j_3 \end{matrix} \right\} \\ &\quad \cdot \langle \mathbf{v}_3 \| Y_K \| \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_1 \| g^L \| \mathbf{v}_3 \rangle I_{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 L} (M_{LL}^K)_{\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2}, \end{aligned} \quad (\Gamma.9)$$

где

$$(M_{LL}^K)_{\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2} = \int R_{\mathbf{v}_3}^* M_{LL}^K(r) R_{\mathbf{v}_2} r^2 dr, \quad (\Gamma.10)$$

$R_{\mathbf{v}_3}, R_{\mathbf{v}_2}$  – одночастичные радиальные волновые функции и приведенные матричные элементы рассчитываются по обычной схеме.

## Приложение Д

### Новое уравнение для вершины

Мы получили новое уравнение для вершины, если воспользоваться разложением амплитуды по фононам в ТКФС [1]:

$$\Gamma(\omega) = \Gamma^r + \frac{g^s g^{s*}}{\omega - \omega_s}, \quad (\text{Д.1})$$

где  $\Gamma^r$  регулярная часть амплитуды  $\Gamma$  и не зависит от  $\omega$  (мы опустили индекс  $s$  в  $\Gamma^r$ ).  $\Gamma^r$  удовлетворяет уравнению [1]:

$$\Gamma^r = F + F \frac{dA}{d\omega} g^s g^{s*} + F A_s \Gamma^r \quad (\text{Д.2})$$

Это интегральное уравнение с двумя свободными членами.

Новое уравнение для  $\tilde{V}$  содержит не только сложные  $1p1h \otimes phonon$ - и двухфононные конфигурации, как в "микроскопической модели" 3.3, но и слагаемые с  $\Gamma^r$  (напомним, что мы не выписываем слагаемые с  $\delta F$  и  $d\Gamma$  так как их структура, не отличается принципиально, и выражения для этой группы графиков могут быть легко получены. Кроме того, численная доля этих графиков вероятно мала.)

$$\begin{aligned} \tilde{V} = e_q V^0 + F A \tilde{V} + 2 F G g D G g G \tilde{V} + F G g G D G g \tilde{V} + \\ 2 F G g_{\bar{1}\bar{1}} D G G \tilde{V} + \\ 4 F G G g \Gamma^r G D g G \tilde{V} + \\ 4 F G G g G g D D g G g G \tilde{V} \end{aligned} \quad (\text{Д.3})$$

Оно показано на рис. 3.13.

Приведем краткий анализ этих графиков.

В первой строке содержится набор графиков, полностью соответствующий модели ТКФС+КФВ. Эта часть обсуждалась ранее во множестве работ [21; 89]:

$$\tilde{V}^{1(2)} = \sum_{3465,s} F_{1263} g_{34} g_{45} \tilde{V}_{56} I_{3456,s}^{(1)}(\omega), \quad (\text{Д.4})$$

где

$$\begin{aligned}
I_{3456,s}^{(1)}(\omega) &= \int G_3(\varepsilon)G_5(\varepsilon)G_6(\varepsilon - \omega) \times G_4(\varepsilon - \omega_1)D_s(\omega_1)d\varepsilon d\omega_1 \\
&= \frac{1}{(\varepsilon_{63} + \omega)\varepsilon_{53}} \cdot \left( \frac{n_6(1 - n_4)}{\varepsilon_{46} + \omega_s - \omega} - \frac{n_4(1 - n_6)}{\varepsilon_{46} - \omega_s - \omega} + \frac{n_4(1 - n_3)}{\varepsilon_{43} - \omega_s} - \frac{n_3(1 - n_4)}{\varepsilon_{43} + \omega_s} \right) \\
&\quad - \frac{1}{(\varepsilon_{65} + \omega)\varepsilon_{53}} \cdot \left( \frac{n_6(1 - n_4)}{\varepsilon_{46} + \omega_s - \omega} - \frac{n_4(1 - n_6)}{\varepsilon_{46} - \omega_s - \omega} + \frac{n_4(1 - n_5)}{\varepsilon_{45} - \omega_s} - \frac{n_5(1 - n_4)}{\varepsilon_{45} + \omega_s} \right)
\end{aligned} \tag{Д.5}$$

Во второй строке содержится динамический "тэдпол"эффект. Он имеет достаточно простую структуру.

$$\tilde{V}_{12}^{tad} = \Sigma F_{1234} \tilde{V}_{54} K_{35}^{ph} I_{354}(\omega) \tag{Д.6}$$

$$\begin{aligned}
I_{354}(\omega) &= \int G_3(\varepsilon)G_5(\varepsilon)G_4(\varepsilon - \omega)d\varepsilon = \\
&\quad \frac{n_3 - n_4}{(\varepsilon_{34} - \omega)(\varepsilon_{54} + \omega)} + (1 - \delta_{35}) \frac{n_3 - n_5}{\varepsilon_{35}(\varepsilon_{54} + \omega)}
\end{aligned} \tag{Д.7}$$

Слагаемые с  $\Gamma$  на линиях 3 и 4 в уравнении (Д.3) можно коротко записать по-другому - в более наглядном и единообразном виде:

$$4F[GG\Gamma^i GG\tilde{V}] = 4F[GG\Gamma^{ri} GG + GGF_{ind}^{2phon} GG]\tilde{V}, \tag{Д.8}$$

где  $\Gamma^i = gGDg$  -фонон-обменное взаимодействие, обусловленное обменом фононом в двух ph и двух (pp и hh)-каналах.

$$\Gamma_{1234}^i(\omega, \varepsilon_1, \varepsilon_3) = \sum_{56s} g_{15}g_{63}^* \Gamma_{5264}(\omega) I_{56s}(\omega, \varepsilon_1, \varepsilon_3) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3) \tag{Д.9}$$

Величина  $\Gamma^{ri}$  по своей структуре совпадает с  $\Gamma^i$  (Д.9), в которой вместо  $\Gamma_{5264}$  стоит взаимодействие  $\Gamma^{ri}$ . Полные интегралы  $I_1, I_2, I_3, I_4$  для этих четырех графиков приведены ниже.

$$I_1 = \int G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 - \omega)I_{56}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)G_3(\varepsilon_3)G_4(\varepsilon_3 - \omega)d\varepsilon_1d\varepsilon_3$$

$$I_1 = \int [G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 - \omega)I_{56}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)d\varepsilon_1] \frac{G_3(\varepsilon_3) - G_4(\varepsilon_3 - \omega)}{(\varepsilon_3 - \omega)} d\varepsilon_3$$

$$I_{56}(2)(\varepsilon_3, \varepsilon_1) = \int G_5(\varepsilon_1 - \omega_1)G_6(\varepsilon_3 - \omega_1)D_s(\omega_1)d\omega_1$$

$$I_{56}^{(2)}(\varepsilon_3, \varepsilon_1) =$$

$$-\frac{n_5 n_6}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s - i\gamma)} - \frac{(1 - n_5)(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s + i\gamma)}$$

$$+ \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{56} - i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)} + \frac{n_5(1 - n_6)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{56} + i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)}$$

$$+ \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{65} + i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)} + \frac{n_5(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{65} - i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)}$$

(Д.10)

Тут  $\varepsilon_{56} = \varepsilon_{\lambda_5} - \varepsilon_{\lambda_6}$  и наоборот  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \omega$



$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{1}{\varepsilon_{34} - \omega} \left[ \frac{n_1(1-n_2)(1-n_3)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{56})} + \frac{n_1(1-n_2)(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{63} - \omega_s)} \right. \\
& + \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{63} + \omega_s)} + \frac{(1-n_1)n_2n_3n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{56})} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{63} + \omega_s)} + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{63} - \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{23} + \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)} + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{23} + \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{63} - \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)n_2n_3(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{63} + \omega_s)} + \frac{n_1(1-n_2)n_3n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{23} + \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)} \\
& + \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{23} + \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{63} + \omega_s)} + \frac{n_1(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{63} - \omega_s)} \\
& + \frac{n_1n_2n_3(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{63} + \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)} + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{63} - \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_3n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{23} + \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{63} + \omega_s)} - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{23} + \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{63} - \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{63} - \omega_s)} - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{63} + \omega_s)} \\
& - \frac{n_1(1-n_2)(1-n_4)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega - \varepsilon_{56})} - \frac{n_1(1-n_2)(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{14} - \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)} \\
& - \frac{n_1(1-n_2)n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)} - \frac{(1-n_1)n_2n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega - \varepsilon_{56})} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{14} - \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)} - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{24} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)} - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{24} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)} - \frac{n_1(1-n_2)n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{24} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)} \\
& - \frac{n_1(1-n_2)n_4(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{24} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)} - \frac{n_1(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)} - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{14} - \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{24} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)} + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{14} - \omega - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{24} - \varepsilon_{56})(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)} + \frac{n_1n_2n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)} \left. \right] \\
& \quad \quad \quad (\text{D.11})
\end{aligned}$$

$$I_{56}^{(3)}(\varepsilon_3, \varepsilon_1) = \int G_5(\varepsilon_3 - \omega_1) G_6(\varepsilon_1 - \omega_1) D_s(\omega_1) d\omega_1$$

$$I_{56}^{(3)}(\varepsilon_3, \varepsilon_1) = I_{56}^{(2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$$

$$I_{56}^{(3)}(\varepsilon_3, \varepsilon_1) =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{n_5 n_6}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s - i\gamma)} - \frac{(1 - n_5)(1 - n_6)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s + i\gamma)} \\ & + \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{56} - i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)} + \frac{n_5(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{56} + i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)} \\ & + \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{65} + i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)} + \frac{n_5(1 - n_6)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{65} - i\gamma)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$I_2 = \int [G_1(\varepsilon_1) G_2(\varepsilon_1 - \omega) I_{56}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) d\varepsilon_1] \frac{(G_3(\varepsilon_3) - G_4(\varepsilon_3 - \omega))}{(\varepsilon_{34} - \omega)} d\varepsilon_3 \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{\varepsilon_{34} - \omega} \left[ - \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{16} - \omega_s)(\varepsilon_{53} + \omega_s)} + \frac{n_1(1-n_2)n_3n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{35} + \omega_s)} \right. \\
& + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})} - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{16} + \omega_s)(\varepsilon_{53} - \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{35} - \omega_s)} + \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})} \\
& + \frac{(1-n_1)n_2n_3(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{26} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{53} + \omega_s)} + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{35} + \omega_s)(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} \\
& + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} + \frac{n_1(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{26} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{53} - \omega_s)} \\
& - \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{35} - \omega_s)(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} - \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} \\
& - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{16} + \omega_s)(\varepsilon_{26} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{53} - \omega_s)} - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{16} - \omega_s)(\varepsilon_{26} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{53} + \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_3(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{53} + \omega_s)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} + \frac{n_1n_2(1-n_3)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{53} - \omega_s)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} \\
& - \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_3(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{63} - \omega_s)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{63} + \omega_s)(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{56} + \omega)} \\
& + \frac{n_1(1-n_2)n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{16} - \omega_s)(\varepsilon_{54} + \omega_s - \omega)} - \frac{n_1(1-n_2)n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{45} + \omega + \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})} + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{16} + \omega_s)(\varepsilon_{54} - \omega - \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{45} + \omega - \omega_s)} - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{26} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{54} - \omega + \omega_s)} - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{45} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} - \frac{n_1(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{26} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{54} - \omega - \omega_s)} \\
& + \frac{n_1(1-n_2)n_4(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{45} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} + \frac{n_1(1-n_2)n_4(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} \\
& + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{16} + \omega_s)(\varepsilon_{26} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{54} - \omega - \omega_s)} + \frac{n_1n_2n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{16} - \omega_s)(\varepsilon_{26} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{54} - \omega + \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_4(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{54} - \omega + \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{54} - \omega - \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} \\
& \left. + \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_4(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{64} - \omega - \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} - \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{64} - \omega + \omega_s)(\varepsilon_{14} - \omega + \varepsilon_{56})(\varepsilon_{24} + \varepsilon_{56})} \right]
\end{aligned}$$

(D.14)

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 - \omega)I_{56}^{(4)}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)G_3(\varepsilon_4 + \omega)G_4(\varepsilon_4)d\varepsilon_1d\varepsilon_4 = \\
&\int [G_1(\varepsilon_1)G_2(\varepsilon_1 - \omega)I_{56}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)d\varepsilon_1] \frac{(G_3(\varepsilon_4 + \omega) - G_4(\varepsilon_4))}{(\varepsilon_{34} - \omega)} d\varepsilon_3 \\
I_{56}^{(4)}(\varepsilon_4, \varepsilon_1) &= \int G_5(\varepsilon_1 - \omega_1)G_6(\varepsilon_4 + \omega_1)D_s(\omega_1)d\omega_1 \\
I_{56}^{(4)}(\varepsilon_4, \varepsilon_1) &= \\
&\frac{(n_5n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^* - i\gamma)} + \frac{(1 - n_5)(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^* + i\gamma)} \\
&+ \frac{n_5n_6}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^* - i\gamma)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 - \omega_s + i\gamma)} + \frac{(1 - n_5)(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^* + i\gamma)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 + \omega_s - i\gamma)} \\
&+ \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{65} + i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s - i\gamma)} + \frac{n_5(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{65} - i\gamma)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + i\gamma)} \\
&\hspace{15em} (\text{Д.15})
\end{aligned}$$

$$\text{Tyr} \quad \varepsilon_{56}^* = \varepsilon_{\lambda_5} + \varepsilon_{\lambda_6} \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \omega$$

$$\begin{aligned}
I_3 = \frac{1}{\varepsilon_{34} - \omega} & \left[ \begin{aligned} & \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)} + \frac{n_1(1-n_2)n_3(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{63} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)} \\ & - \frac{n_1(1-n_2)(1-n_3)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{63} - \omega_s + \omega)} + \frac{(1-n_1)n_2n_3n_5n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{13} + \omega - \varepsilon_{56}^*)} \\ & - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5n_6}{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5n_6} + \frac{(1-n_1)n_2n_3n_5(1-n_6)}{(1-n_1)n_2n_3n_5(1-n_6)} \\ & + \frac{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{31}^* - \omega - \varepsilon_{56}^*)(\varepsilon_{63} + \omega - \omega_s)}{(1-n_1)n_2n_3(1-n_5)(1-n_6)} - \frac{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{63} + \omega + \omega_s)}{(1-n_1)n_2n_3(1-n_5)(1-n_6)} \\ & - \frac{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)}{(1-n_1)n_2(1-n_3)(1-n_5)n_6} - \frac{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{63} + \omega + \omega_s)}{n_1(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6} \\ & - \frac{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{63} - \omega_s + \omega)}{(1-n_1)n_2(1-n_3)n_5n_6} - \frac{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)}{n_1(1-n_2)n_3n_5(1-n_6)} \\ & + \frac{n_1(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{63} - \omega_s + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)} - \frac{n_1(1-n_2)n_3n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{63} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)} \\ & - \frac{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{63} + \omega + \omega_s)}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6} - \frac{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{63} - \omega - \omega_s)}{n_1n_2n_4(1-n_5)(1-n_6)} \\ & - \frac{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{63} + \omega - \omega_s)}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)n_5n_6} - \frac{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{63} + \omega + \omega_s)}{n_1n_2n_3(1-n_5)(1-n_6)} \\ & + \frac{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{63} + \omega - \omega_s)}{(1-n_1)(1-n_2)n_3n_5(1-n_6)} + \frac{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{31}^* + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{32}^*)(\varepsilon_{63} + \omega + \omega_s)}{n_1n_2(1-n_3)n_5n_6} \end{aligned} \right] \\
& + \frac{(\varepsilon_{51} - \omega_s)(\varepsilon_{52} - \omega - \omega_s)(\varepsilon_{36} - \omega - \omega_s)}{(\varepsilon_{51} + \omega_s)(\varepsilon_{52} - \omega + \omega_s)(\varepsilon_{36} - \omega + \omega_s)} \\
& - \frac{n_1(1-n_2)n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{41}^*)} - \frac{n_1(1-n_2)n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{64} - \omega_s)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{41}^*)} \\
& + \frac{n_1(1-n_2)(1-n_4)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} - \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega_s)} - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{14} - \varepsilon_{56}^*)} \\
& - \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{41}^* - \varepsilon_{56}^*)(\varepsilon_{64} - \omega_s)} + \frac{(1-n_1)n_2n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{12} - \omega)(\varepsilon_{15} + \omega_s)(\varepsilon_{64} + \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)n_2n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)} + \frac{(1-n_1)n_2n_4(1-n_5)(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)(\varepsilon_{64} + \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)n_2(1-n_4)(1-n_5)n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega - \omega_s)(\varepsilon_{64} - \omega_s)} + \frac{n_1(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)} \\
& - \frac{n_1(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{64} - \omega_s)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)} + \frac{n_1(1-n_2)n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{21} + \omega)(\varepsilon_{64} + \omega_s)(\varepsilon_{25} + \omega + \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{41}^*)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)(\varepsilon_{64} + \omega_s)} + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{41}^*)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)(\varepsilon_{64} - \omega_s)} \\
& + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{41}^*)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)(\varepsilon_{64} - \omega_s)} + \frac{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_4)n_5n_6}{(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{41}^*)(\varepsilon_{56}^* - \varepsilon_{42}^* - \omega)(\varepsilon_{64} + \omega_s)} \\
& - \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{51} - \omega_s)(\varepsilon_{52} - \omega - \omega_s)(\varepsilon_{46} - \omega_s)} - \frac{(1-n_1)(1-n_2)n_4n_5(1-n_6)}{(\varepsilon_{51} + \omega_s)(\varepsilon_{52} - \omega + \omega_s)(\varepsilon_{46} + \omega_s)} \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$I_{56}^{(5)}(\varepsilon_4, \varepsilon_1) = \int G_5(\varepsilon_4 + \omega_1) G_6(\varepsilon_1 - \omega_1) D_s(\omega_1) d\omega_1$$

$$I_{56}^{(5)}(\varepsilon_4, \varepsilon_1) = I_{56}^{(4)}(\varepsilon_1, \varepsilon_4 + \omega)$$

$$I_{56}^{(5)}(\varepsilon_4, \varepsilon_1) =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{n_5 n_6}{(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s + \omega)(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^*)} + \frac{(1 - n_5)(1 - n_6)}{(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + \omega + i\gamma)(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^* - i\gamma)} \\ & - \frac{n_5 n_6}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^* - i\gamma)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_1 - \omega_s + \omega + i\gamma)} - \frac{(1 - n_5)(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{56}^* + i\gamma)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_1 + \omega_s + \omega - i\gamma)} \\ & - \frac{(1 - n_5)n_6}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_6 + \omega_s - \omega - i\gamma)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + \omega + i\gamma)} - \frac{n_5(1 - n_6)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_6 - \omega_s - \omega + i\gamma)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s + \omega - i\gamma)} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$



Двухфононные слагаемые в линии 4 на рис. 3.13 имеют вид

$$\tilde{V}_{2\text{phon}}^3 = FGGF_{\text{ind}_1}^{2\text{phonon}}GG\tilde{V} + FGGF_{\text{ind}_2}^{2\text{phonon}}GG\tilde{V}. \quad (\text{Д.19})$$

Здесь мы ввели двухфононные фонон-обменные взаимодействия  $F_{\text{ind}_1}^{2\text{phonon}}$  и  $F_{\text{ind}_2}^{2\text{phonon}}$ . Для первого из двухфононных графиков на 4-той линии рис. 3.13:

$$\begin{aligned} (F_{\text{ind}}^{2\text{phonon}})_{1234\_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \omega) = \\ \sum_{56ss'} g_{15}^s g_{63}^{s*} g_{52}^{s'} g_{46}^{s'*} I_{56ss'\_1} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3), \end{aligned} \quad (\text{Д.20})$$

$$\begin{aligned} I_{56ss'\_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \\ \int G_5(\varepsilon_1 - \omega_1) G_6(\varepsilon_3 - \omega_1) D_s(\omega_1) D_{s'}(\omega_1 - \omega) d\omega_1, \end{aligned} \quad (\text{Д.21})$$

где мы ввели  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \omega$ .

Для второго  $F_{\text{ind}}^{2\text{phonon}}$ , который входит в "перекрестный" график на линии 4, рис. (3.13):

$$\begin{aligned} (F_{\text{ind}}^{2\text{phonon}})_{1234\_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_4, \omega) = \\ \sum_{56ss'} g_{15}^s g_{46}^{s*} g_{52}^{s'} g_{63}^{s'*} I_{56ss'\_2} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3), \end{aligned} \quad (\text{Д.22})$$

где

$$\begin{aligned} I_{56ss'\_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = \\ \int G_5(\varepsilon_1 - \omega_1) G_6(\varepsilon_4 + \omega_1) D_s(\omega_1) D_{s'}(\omega_1 - \omega) d\omega_1, \end{aligned} \quad (\text{Д.23})$$

Результат интегрирования дается формулами (Д.24), (Д.25).



$$\begin{aligned}
I_{56ss'_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \omega) &= \frac{1}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_{\lambda_5} - \varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_1)}. \\
&\left( \frac{1 - n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega - \omega'_s)} - \frac{n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega + \omega'_s)} \right)^+ \\
&\frac{(1 - n_{\lambda_5})n_6}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega + \omega'_s)} - \frac{n_{\lambda_5}(1 - n_6)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega - \omega'_s)} \Big)^+ \\
&\frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s)(\omega_s + \omega'_s + \omega)} + \\
&\frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s)(\omega_s + \omega'_s - \omega)}, \tag{D.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{56ss'_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_4, \omega) &= \frac{1}{(\varepsilon_4 + \varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_{\lambda_5})}. \\
&\left( \frac{1 - n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega - \omega'_s)} - \frac{n_{\lambda_5}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega + \omega'_s)} \right)^- \\
&\frac{(1 - n_{\lambda_5})(1 - n_6)}{(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 + \omega_s)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 - \omega + \omega'_s)} + \frac{n_{\lambda_5}n_6}{(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 - \omega_s)(\varepsilon_{\lambda_6} - \varepsilon_4 - \omega - \omega'_s)} \Big)^+ \\
&\frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} + \omega_s)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_6} - \omega_s)(\omega_s + \omega'_s + \omega)} + \\
&\frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\lambda_5} - \omega_s)(\varepsilon_4 - \varepsilon_{\lambda_6} + \omega_s)(\omega_s + \omega'_s - \omega)}. \tag{D.25}
\end{aligned}$$