

Федеральное государственное бюджетное учреждение
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

На правах рукописи



Чукашев Николай Викторович

**ЭВОЛЮЦИЯ РАВНОВЕСИЯ ВЫТЯНУТОЙ ПЛАЗМЫ
В ТОКАМАКЕ С РЕЗИСТИВНОЙ СТЕНКОЙ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

1.3.9. — Физика плазмы

Научный руководитель

Пустовитов Владимир Дмитриевич
доктор физико-математических наук
главный научный сотрудник ОТП ККТЭиПТ

Москва 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список обозначений	4
Введение	7
1. Аналитическое решение внешней задачи равновесия вытянутой плазмы в токамаке	20
1.1. Модель и постановка задачи	21
1.2. Полоидальное магнитное поле на эллиптической границе плазмы .	25
1.3. Преобразование тороидальной функции Грина (1.18)	29
1.4. Полоидальные потоки ψ^{pl} и ψ^{ext} вне вытянутой тороидальной плазмы	33
1.5. Обсуждение результатов	36
1.6. Выводы главы 1	38
2. Магнитное поле вне вытянутой тороидальной плазмы с учётом динамической реакции резистивной стенки вакуумной камеры	40
2.1. Основные уравнения	41
2.2. Решение внешней задачи равновесия цилиндрической плазмы и выбор константы ψ_b	44
2.3. О неопределённости константы ψ_b в рамках «принципа виртуального кожуха»	53
2.4. Вычисление полоидального потока, создаваемого токами в вытянутой стенке	59
2.5. Нахождение константы ψ_b в тороидальной геометрии	63
2.6. Обсуждение результатов	65
2.7. Выводы главы 2	68
3. Собственные моды тороидального тока индукции в вакуумной камере токамака с некруглым сечением	70
3.1. Интегральная формулировка уравнения динамики токов индукции в стенке	72
3.2. Учёт сингулярности на контуре интегрирования S_w в уравнении (3.6)	74

3.3. Решение уравнения (3.6) с помощью теоремы Гильберта-Шмидта .	76
3.4. Аналитическое нахождение собственных мод тока в стенке с эллиптическим сечением	79
3.5. Обсуждение результатов	82
3.6. Выводы главы 3	91
4. Аналитическая оценка времени развития вертикальной неустойчивости (VDE) в токамаке с резистивной стенкой	93
4.1. Обзор и сравнение существующих аналитических моделей VDE и оценок τ_{VDE}	94
4.2. Общее дисперсионное соотношение для VDE в токамаке резистивной стенкой	98
4.3. Преобразование формулы для τ_{VDE} при эллиптическом сечении плазмы	103
4.4. Вычисление τ_{VDE} для плазмы в вакуумной камере с круглым сечением	105
4.5. Обсуждение результатов	107
4.6. Выводы главы 4	113
Заключение	115
Благодарности	119
Приложение. Вычисление τ_{VDE} с учётом вытянутости стенки	120
Список литературы	124

Список обозначений

Физические величины		Размерность
$\mathbf{A}$	вектор-потенциал	[Тл·м]
$\mathbf{B}$	магнитная индукция	[Тл]
$\mathbf{B}_p$	полоидальная компонента поля $\mathbf{B}$	[Тл]
B_J	поле на границе «круглой» плазмы $\mu_0 J / (2\pi b)$	[Тл]
$B_{\perp}^K$	величина вертикального магнитного поля	[Тл]
B_q	величина квадрупольного магнитного поля	[Тл]
β_p	полоидальная бета $2\mu_0 \bar{p} / B_J^2$	—
γ	инкремент неустойчивости	[с ⁻¹]
$\mathbf{E}$	напряжённость электрического поля	[В/м]
I	полный полоидальный ток	[А]
$\mathbf{i}$	поверхностная плотность тока	[А/м]
i_m	амплитуда m -й собственной моды тока	[А/м]
$\mathbf{j}$	плотность тока	[А/м ²]
J	полный тороидальный ток	[А]
L	коэффициент индукции	[Гн]
ℓ_i	внутренняя индуктивность плазмы $\bar{\mathbf{B}}_p^2 / B_J^2$	—
p	давление	[Па]
ρ_m	массовая плотность	[кг/м ³]
σ	проводимость стенки вакуумной камеры	[См/м]
t	время	[с]
τ_w	резистивное время стенки $\mu_0 \sigma b_w d_w$	[с]
τ_{VDE}	характерное время развития VDE	[с]
τ_m	время затухания m -й моды тока в стенке	[с]
$\mathbf{v}$	скорость плазмы	[м/с]
ψ	полоидальный поток магнитного поля	[Тл·м ²]
ψ_J	нормировочный поток $\mu_0 J R_{pl}$	[Тл·м ²]
Геометрические величины		
a	малый радиус магнитной поверхности	
b	малый радиус плазмы	
b_w	малый радиус стенки	
c_b	фокальное расстояние границы плазмы $b\sqrt{K_b^2 - 1}$	
c_w	фокальное расстояние сечения стенки $b_w\sqrt{K_w^2 - 1}$	
D	якобиан отображения $(r, z) \rightarrow (a, \theta)$	

Геометрические величины

d_w	толщина стенки
$d(a)$	градиент вытянутости магнитной поверхности $aK'/2K$
$\Delta(a)$	шафрановское смещение магнитной поверхности
Δ_b	радиальное смещение границы плазмы $R_{pl} - R_w$
e_w	эксцентриситет сечения стенки $\sqrt{1 - 1/K_w^2}$
$\mathbf{e}_r$	радиальный орт ∇r
$\mathbf{e}_\zeta$	тороидальный орт $r\nabla\zeta$
$\mathbf{e}_z$	вертикальный орт ∇z
ϵ_b	отношение $(K_b^2 - 1)/(K_b^2 + 1)$
ε_w	обратное аспектное отношение b_w/R_w
η	отношение $b(K_b + 1)/(a(K + 1))$
$\tilde{\eta}$	отношение $\eta(K_b - 1)/(K_b + 1)$
$K(a)$	вытянутость магнитной поверхности
K_b	вытянутость плазмы $K(b)$
K_w	вытянутость стенки
$\kappa(a_w)$	вытянутость координатной поверхности $a_w = \text{const}$
ℓ	длина дуги полоидального сечения стенки S_w
$\mathbf{n}_{pl}$	внешняя нормаль к тороидальной поверхности плазмы
$\mathbf{n}_w$	внешняя нормаль к тороидальной поверхности стенки
ξ	вертикальное смещение плазмы
P_w	полная длина полоидального сечения стенки S_w
R	большой радиус тороидальной поверхности
$\mathbf{r}$	радиус-вектор точки наблюдения
$\mathbf{r}_v$	переменная интегрирования
s	комплексная координата $x + iz$
$\boldsymbol{\tau}$	полоидальный касательный вектор $\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{n}$
x	локальная координата $R - r$
ω	комплексная переменная $\mu + i\theta$

Системы координат

(a, θ)	поверхностные магнитные координаты плазмы
(a_w, ϑ)	поверхностные конформные координаты стенки
(l, α)	полярные координаты, связанные с центром плазмы
(ρ, u)	полярные координаты, связанные с центром стенки
(μ, θ)	эллиптические координаты, связанные с центром плазмы
(ν, ϑ)	эллиптические координаты, связанные с центром стенки

Системы координат

(r, ζ, z)	цилиндрические координаты
(x, z)	декартовы координаты в поперечном сечении плазмы

Математические обозначения и операторы

$\delta(\mathbf{r})$	дельта-функция Дирака
$K(k)$	полный эллиптический интеграл первого рода
$E(k)$	полный эллиптический интеграл второго рода
$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_v)$	функция Грина оператора Грэда–Шафранова
$G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_v)$	цилиндрическое приближение функции Грина
i	мнимая единица
$\mathcal{L}[\dots]$	преобразование Лапласа
$H(\mathbf{r})$	функция Хевисайда
Re, Im	действительная и мнимая части
$\text{Res}_{s_0} f(s)$	вычет функции $f(s)$ в точке $s = s_0$
$X_m(\ell)$	m -я собственная мода тока в стенке
$\Delta_\perp$	2-мерный оператор Лапласа $\partial_x^2 + \partial_z^2$
Δ^*	оператор Грэда–Шафранова $r^2 \text{div}(\nabla/r^2)$

Индексы

b	<i>boundary</i> (граница плазмы $a = b$)
ec	<i>external coils</i> (внешние полоидальные катушки)
ext	<i>external</i> (внешние источники)
in	<i>inside</i> S_{pl} (внутри плазмы)
out	<i>outside</i> S_{pl} (вне плазмы)
pl	<i>plasma</i> (плазма)
s	<i>source</i> (источник: плазма + внешние обмотки)
v	<i>volume</i> (объём интегрирования)
w	<i>wall</i> (стенка вакуумной камеры)

Сокращения

МГД	магнитная гидродинамика
CQ	C urrent Q uench (срыв тока)
RWM	R esistive W all M ode
TQ	T hermal Q uench (тепловой срыв)
VDE	V ertical D isplacement E vent

Введение

Актуальность темы исследования

За последние полвека в исследованиях на токамаках был достигнут существенный прогресс, позволивший вплотную подойти к области термоядерного зажигания плазмы. Значительную роль в этом сыграл переход к некруглым конфигурациям, в которых сечение плазменного шнура растянуто по вертикали (вдоль главной оси тора). Благодаря увеличенной длине границы по сравнению с окружностью, вытянутая плазма позволяет работать при более высоких β_p [1–3], а также снизить поток примесей в центр за счёт замыкания внешней магнитной поверхности на полоидальный дивертор. Такая конфигурация характерна для всех современных токамаков, включая ИТЭР [4–7], а в нашей стране она представлена на установках Глобус-М2 [8, 9], Т-15МД [10, 11] и планируется на ТРТ [12]. Значения вытянутости плазмы K_b , определенной как отношение большой и малой полуосей её сечения, для разных токамаков приведены на Табл. 1. Там же указаны большой радиус плазменного шнура R_{pl} , его малый радиус b и аспектное отношение $A = R_{pl}/b$.

Для создания вытянутой конфигурации в токамаке используется внешнее квадрупольное магнитное поле. В положении равновесия сила его взаимодействия с током плазмы скомпенсирована силой собственного стягивания шнура, однако при смещении плазмы вверх или вниз их баланс нарушается, и результирующая сила увеличивает смещение. Поэтому вертикальное положение некруглой плазмы без внешней стабилизации неустойчиво, а неконтролируемое развитие этой неустойчивости называется Vertical Displacement Event (VDE) [4, 6, 7].

В зависимости от сценария выделяют две разновидности VDE. Если вертикальная неустойчивость развивается при удержании плазмы с рабочими значениями тока и давления, говорят о «горячем» VDE [4, 6, 7, 34–41]. Это наиболее опасный сценарий, поскольку вынос такой плазмы на стенку гарантированно ведёт к срыву с выбросом запасённой в разряде магнитной и тепловой энергии на конструкционные элементы токамака¹. Если же VDE начинается после

¹При соответствующих токамаку ИТЭР параметрах плазмы $T = 15$ кэВ, $n \sim 10^{20}$ м⁻³ и её объёме $V = 830$ м³ [5] тепловую энергию можно оценить в $W_T \sim 230$ МДж, а энергия магнитного поля тока $J = 15$ МА составляет $W_B \sim 740$ МДж.

Установка	K_b	R_{pl} , м	b , м	$A \equiv R_{pl}/b$	Источник
Действующие					
ADITYA-U	≤ 1.2	0.75	0.25	3	[13]
WEST	~ 1.3	2.5	0.5	5	[14]
SST-1	≤ 1.8	1.1	0.20	5.5	[15]
ASDEX-U	≤ 1.8	1.65	0.5	3.3	[16]
HL-3	≤ 1.8	1.78	0.65	2.74	[17]
TCV	~ 1.8	0.88	0.25	3.5	[18]
COMPASS	1.8	0.56	0.23	2.43	[19]
T-15МД	1.7—1.9	1.48	0.67	2.2	[10, 11]
JT-60SA	1.95	3.0	1.2	2.5	[20, 21]
EAST	1.6—2.0	1.7	0.4	4.25	[22]
KSTAR	2.0	1.8	0.5	3.6	[23]
Глобус-М2	2.1	0.36	0.24	1.5	[8, 9]
DIII-D	1.25—2.25	1.66	0.65	2.55	[24]
Сооружаемые					
DTT	1.7	2.19	0.7	3.13	[25, 26]
ИТЭР	1.7—2.0	6.2	2.0	3.1	[5–7, 27]
BEST	1.7—1.9	3.6	1.1	3.27	[28]
SPARC	1.75—1.97	1.85	0.57	3.24	[29]
Проектируемые					
DEMO	1.59	9.1	2.9	3.14	[30]
COMPASS-U	≤ 1.8	0.84	0.28	3.0	[31]
ARC	1.84	3.3	1.13	2.9	[32]
TPT	1.85	2.15	0.57	3.77	[12]
CFETR	2.2	7.2	2.2	3.3	[33]
Недавно остановленные					
Alcator C-Mod	1.6	0.68	0.22	3.1	[4]
JET	1.5—1.8	2.96	1.0	3.0	[4, 6]

Таблица 1. Характерные размеры плазмы в некоторых современных токамаках. Здесь R_{pl} — большой радиус тора, b — малый радиус, K_b — вытянутость поперечного сечения плазмы, а $A \equiv R_{pl}/b$ — аспектное отношение.

теплового срыва (TQ), то вертикальное движение сопровождается срывом тока (CQ) в уже остывшей плазме, и VDE называется «холодным» [4, 7, 39, 41–44]. При этом возможна генерация пучков релятивистских (убегающих) электронов, способных прожечь стенку [44, 45]. Из-за тесной связи со срывами, представляющими главную угрозу для больших токамаков, моделирование VDE является актуальной задачей физики плазмы.

Правильное описание VDE требуется при проектировании системы управления равновесием, интерпретации магнитных измерений, при исследовании пределов вертикальной устойчивости плазмы и для оценки сил, возникающих в стенке вакуумной камеры при переходных процессах. Все эти аспекты так или иначе моделируются с помощью численных кодов, таких как CarMa0NL [46–52], M3D-C [35, 38, 43, 53], NIMROD [54–56], JOREK [40, 41, 44, 45, 57, 58], DINA [59–63] и TSC [36, 60, 64, 65]. Однако в ситуации, когда нужны простые физические оценки, исходящие из первых принципов и потому легко адаптируемые к любому токамаку, или отсутствует согласие между предсказаниями разных кодов, надёжным инструментом остаётся аналитическая теория.

В существующей аналитической теории вертикальное движение плазмы рассматривается с помощью двух моделей: т.н. «проволочной» (wire model) [39, 66–70] и цилиндрической [55, 71–78]. В первой из них реальная плазма заменяется тонким проводом, помещённым в квадрупольное магнитное поле. Такое представление ухватывает основной эффект — притяжение плазменного шнура к внешним токам, уводящее его из положения равновесия при VDE. Это позволяет качественно описывать динамику VDE даже в нелинейной стадии [69], в том числе при быстром CQ [39, 68]. С другой стороны, пренебрежение объёмом плазмы не позволяет учесть ряд важных элементов, таких как форма плазмы и ширина вакуумного промежутка между плазмой и стенкой, играющих важную роль в пассивной стабилизации VDE [55, 73, 75–78], или профиль тока, неоднородность которого увеличивает величину инкремента [79–81].

Равновесие объёмной тороидальной плазмы в токамаке впервые исследовалось ещё в 1960-е годы в работах В. Д. Шафранова (ИАЭ им. И. В. Курчатова) [82–85]. Его теория разрабатывалась для плазменного шнура круглого сечения с целью получения условий удержания разряда в заданном положении, а их

учёт позволил значительно продвинуться в область высоких температур [86,87]. При этом вертикальное смещение рассматривалось лишь как слабый эффект, связанный с небольшой вытянутостью ($K_b - 1 \ll 1$) магнитных поверхностей при учёте поправок второго порядка по $b/R_{pl} < 1$ [84, 85]. Как следствие, в линейном приближении по тороидальности предсказывалась устойчивость равновесия плазмы по вертикали [73,84,85,88–90], из-за чего в теории Шафранова проблема VDE не обсуждалась, см. также учебники [91–96].

Эффекты конечной вытянутости плазмы $K_b > 1$ рассматривались аналитически [55,74–78,97–102] только на основе цилиндрической модели равновесия Р. Гаевского, предложенной в 1972 году [97] в связи с началом исследования свойств некруглой конфигурации. В ней плазма представлена прямым цилиндром эллиптического сечения с током, однородным по сечению. Простота вычислений, сравнительная компактность полученных в [97] выражений для полоидального магнитного поля, а также трудность его полного описания даже для «круглой» тороидальной плазмы [85] сделали модель Гаевского [97] практически общепринятой в статических задачах для токамаков с $dJ/dt = 0$ [74,98–102], включая теорию «горячих» VDE [55,75–78]. Тем не менее, применение подхода [97] к анализу сценариев с $dJ/dt \neq 0$, вроде CQ или «холодных» VDE, строго говоря, невозможно, так как в цилиндрических подходах отсутствует уравнение, необходимое для нахождения константы интегрирования задачи равновесия. Эта константа несущественна при вычислении полоидального поля $\mathbf{B}_p$, но влияет на амплитуду токов индукции в стенке и, как следствие, её электромагнитную реакцию на VDE [103].

Включение электромагнитной реакции вакуумной камеры (стенки) вообще является ключевым элементом при рассмотрении переходных процессов в токамаке. В классической теории МГД-устойчивости [73, 91–96, 104–108], рассматривающей быстрые возмущения равновесия, стенка всегда считалась идеально проводящей, поскольку время затухания токов в ней $\tau_w \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ с [109] на много порядков превышает характерное (альфвеновское) время инерции плазмы $\tau_A \sim 10^{-7} - 10^{-6}$ с [110]. Однако в связи с достижением в современных токамаках длительных разрядов со временем жизни порядка или больше τ_w становятся существенны эффекты резистивной диссипации энергии

в стенке, качественно меняющие динамику плазмы. Дело в том, что по закону Ленца стенка обязана противодействовать изменению магнитного поля и, тем самым, параметров плазмы, от которых оно зависит — сила тока, форма и положение плазменного шнура. Это приводит к трансформации идеальных МГД-возмущений в сравнительно медленные неустойчивости с частичной стабилизацией стенкой, что в сочетании с пренебрежимой массой плазмы² позволяет пренебречь инерцией в уравнении движения

$$\rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, ρ_m и p — плотность и давление плазмы, $\mathbf{j}$ — плотность тока, а $\mathbf{B}$ — полное магнитное поле. При этом смещение плазменного шнура как по большому радиусу, так и по вертикали (VDE) будет развиваться за время, сравнимое с резистивным временем стенки τ_w . Такая замедленная эволюция плазмы фактически представляет собой последовательность равновесных состояний по аналогии с квазистатическим процессом в термодинамике.

Отметим, что теория равновесия и её методы применимы даже при моделировании сценариев со срывом (TQ и CQ), когда происходит полная потеря управления разрядом [46, 47, 50, 58, 62, 63, 103, 111–120, 126, 130, 131]. В таком случае все величины в уравнении силового баланса

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

считаются функциями времени, а полное магнитное поле $\mathbf{B}(t)$ содержит динамически изменяющееся поле токов в стенке $\mathbf{B}^w(t)$. Оно является важным неизвестным и определяется путём совместного решения уравнений Максвелла и закона Ома для токов в стенке с граничным условием на подвижной и деформируемой поверхности плазмы $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{pl} = 0$, где $\mathbf{n}_{pl}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности плазмы S_{pl} . Аналитическая реализация такого подхода была развита в работах В. Д. Пустовитова [119, 120] для покрытия сценариев с эволюцией равновесия плазмы по большому радиусу тора при срыве, что стало шагом от анализа Шафранова [82–85] с фиксированными параметрами разряда к динамической задаче с CQ.

²Для оценки, DT-плазма ИТЭР объёмом 830 м³ должна весить всего около 350 мг при $n \sim 10^{20}$ м⁻³ [5].

В работах [119, 120] одновременно сочетаются сразу два элемента, существенных при описании эволюции плазмы с $dJ/dt \neq 0$: это тороидальность системы и диссипация содержащейся в ней электромагнитной энергии в резистивной стенке. Включение в эту схему конечной вытянутости плазмы, как в [55, 74–78, 85, 97–102], позволило бы повысить точность предсказаний на основе теории [119, 120], а также охватить новый класс задач с вертикальным смещением плазмы (VDE). Соответствующее расширение теории [119, 120] производится в настоящей диссертации с целью создания аналитического подхода к описанию эволюции равновесия, покрывающего как «горячие» VDE, так и «холодные» VDE в сценариях с CQ. При этом возникают две связанные задачи. Первая — это решение внешней задачи равновесия тороидальной плазмы с эллиптическим сечением [121], и вторая — выделение во внешнем удерживающем поле вклада от токов, наводимых в стенке при изменении горизонтального и вертикального положения плазмы, её малого радиуса, профиля и силы тока и давления [103, 122]. Эти задачи эффективно разрешаются методом функции Грина, развитым для приложений в теории равновесия для токамаков [103, 119–121] и стеллараторов [123–125]. Данный метод удобен тем, что сразу учитывает все граничные условия и гарантирует правильную асимптотику решений для полоидального поля.

Последнее обстоятельство особенно удобно при решении динамических задач с включением эффектов резистивной стенки, так как в рамках метода функции Грина форма её сечения заведомо содержится в контурном интеграле, дающем полоидальное поле наводимых в стенке токов. Это позволяет рассматривать задачи с эволюцией равновесия плазмы и VDE в наиболее реалистичной постановке, учитывая геометрию стенки как независимый элемент модели. Подобная, казалось бы, сама собой разумеющаяся универсальность ранее оставалась далеко за пределами возможностей существующих аналитических подходов [55, 73, 75, 76, 78, 92] к проблеме VDE, основывающихся на модели прямого цилиндра [97]. Дело в том, что их неотъемлемым ограничением всегда являлось сильное ограничение

$$b^2(K_b^2 - 1) = b_w^2(K_w^2 - 1), \quad (3)$$

где b и b_w — малые радиусы плазмы и стенки, а K_b и K_w — вытянутости их

сечений. Условие (3) жёстко связывает эти параметры путём совмещения фокусов эллиптических сечений плазмы и стенки, из-за чего (3) можно называть условием конфокальности.

Впервые ограничение (3) появилось ещё в 1974 году в известной работе Г. Лавалья, Р. Пелла и Дж. Соула [71], где оно использовалось для упрощения расчётов интегралов энергии с граничным условием $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_w = 0$, на поверхности идеальной стенки с единичной внешней нормалью $\mathbf{n}_w$. С тех пор условие (3) заимствовалось во многих работах [55, 71–73, 75–79, 92], однако его применимость к реальным токамакам никогда не обсуждалась. Достаточно сказать, что подстановка в (3) параметров токамака ИТЭР $b = 2$ м, $K_b = 1.7$ даёт $b^2(K_b^2 - 1) = 7.56$ при $b_w^2(K_w^2 - 1) = 23.1$, получающемся для $b^w \simeq 3.5$ м и $K_w = 1.7$ [5, 6, 62]. Неравенство в (3) будет ещё более существенным для токамаков Т-15МД [10, 126] и ТРТ [12, 62], имеющих сильно вытянутые вакуумные камеры с $K_w > K_b$. Возникает вопрос, велика ли ошибка «конфокальной» оценки инкремента γ_{VDE} при столь серьёзном нарушении равенства в (3)? Для демонстрации величины ошибки, возникающей при вычислениях с (3), мы находим характерное время $\tau_{\text{VDE}} = 1/\gamma_{\text{VDE}}$ в «неконфокальной» конфигурации с вытянутой плазмой внутри стенки круглого сечения [127]. До сих пор в аналитической теории VDE не предпринималось попыток такого анализа из-за значительных математических трудностей, связанных с вычислением τ_{VDE} без (3). Разработанные в диссертации аналитические методы позволяют преодолеть данные трудности и представляют основу для более реалистичной постановки задачи нахождения τ_{VDE} по сравнению с традиционными моделями [55, 71–73, 75–79, 92].

Помимо нахождения инкремента, необходимого для интерпретации экспериментальных данных и проектирования системы управления равновесием плазмы в токамаке, актуальность исследования VDE и переходных процессов в целом связана с проблемой оценки сопутствующих электромеханических сил, действующих на стенку вакуумной камеры [40, 41, 47, 49–53, 128–131]. Амплитуда и направление сил определяются распределением и величиной тока в стенке, для описания которого в численных расчётах прибегают к вычислениям с дискретизацией стенки в стандартных подходах. В случае аксиальной симметрии элементами разбиения являются кольцевые проводники или т.н. фи-

ламенты, число которых может достигать нескольких десятков или даже сотен [36, 62, 111, 132] вплоть до 830 в [36]. Такое рассмотрение слишком сложно для аналитических приложений, поэтому мы развиваем другой подход, связанный с разложением тока по системе полоидальных собственных мод. Оказывается, что их явный вид, а также времена затухания, могут быть найдены аналитически для камеры вытянутого сечения уже упомянутым методом функции Грина, причём с хорошей точностью ток в стенке можно описывать с помощью всего нескольких мод [133]. Это полностью согласуется с численными расчетами [111], показавшими, что для описания реакции стенки токамака на VDE с деформацией плазмы достаточно всего трёх мод вместо многомерных векторов тока. Подобная редукция задачи представляет интерес для приложений к аналитической оценки сил, действующих на стенку при срывах [128], а также для решения различных приложений в теории равновесия и анализа устойчивости медленных винтовых возмущений границы плазмы или Resistive Wall Modes (RWM) [109, 134–136].

Цели и задачи работы

Первой целью диссертационной работы является расширение аналитической теории равновесия плазменного шнура в токамаке для единовременного учёта тороидальной неоднородности магнитного поля, конечной вертикальной вытянутости поперечного сечения плазмы, неоднородности профиля тока и динамической реакции резистивной стенки вакуумной камеры на изменения параметров плазмы. Такое сочетание эффектов, существенное для современных токамаков и значительно влияющее на динамику плазмы в переходных процессах, не описывается известными аналитическими моделями [55, 74–78, 82–85, 91, 92, 94–102]. Здесь можно говорить о существенном развитии модели путём включения в неё новых элементов и расширения области применимости теории равновесия.

Конечной целью работы является анализ переходных процессов в токамаке, включающий нахождение токов, наводимых в стенке вакуумной камеры, и инкремента неустойчивости вертикального положения плазмы (VDE). Для достижения этих целей в диссертации поставлены следующие задачи:

1. Обобщить алгоритм решения внешней задачи равновесия плазмы в то-

токамаке методом функции Грина к случаю вытянутой конфигурации для нахождения собственного магнитного поля плазмы в вакуумном промежутке «плазма-стенка» и внешнего удерживающего поля.

2. Выделить в выражении для внешнего удерживающего поля, необходимого для равновесия вытянутой тороидальной плазмы, вклад токов, наводимых в резистивной стенке вакуумной камеры токамака при переходных процессах.

3. Определить структуру собственных мод тороидального тока, наводимого в тонкой резистивной стенке вакуумной камеры токамака с некруглым поперечным сечением, и найти характерные времена их затухания.

4. Оценить характерное время развития вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке (VDE) с учётом её вытянутости и динамической реакции резистивной стенки вакуумной камеры.

Положения, выносимые на защиту

1. Аналитический метод решения внешней задачи равновесия вытянутой тороидальной плазмы токамака с выделением её собственного полоидального магнитного поля в вакуумном промежутке «плазма-стенка» и внешнего удерживающего поля.

2. Выражение для полоидального потока магнитного поля токов, наводимых в резистивной стенке вакуумной камеры токамака при изменении давления, полного тока и его профиля в вытянутой тороидальной плазме, её движении по большому радиусу тора и по вертикали (VDE).

3. Аналитическое решение задачи на собственные моды тока и характерные времена их резистивного затухания в тонкой осесимметричной тороидальной вакуумной камере токамака с эллиптическим сечением (без скин-эффекта).

4. Формула для характерного времени развития неустойчивости вертикального положения вытянутой плазмы (VDE) в токамаке с резистивной стенкой вакуумной камеры круглого сечения.

Научная новизна работы

1. Выражения для магнитного поля вне плазмы впервые получены с одновременным учётом трёх элементов: тороидальности плазмы, сильной вытянутости её сечения $K_b > 1$ и пространственной неоднородности вытянутости магнитных поверхностей вблизи границы $d_b = aK'(a)/(2K)|_{a=b}$ при произволь-

ном распределении тока.

2. Магнитное поле токов, наводимых в резистивной стенке токамака при переходных процессах, впервые вычислено аналитически с учётом вытянутости плазмы K_b и стенки K_w , горизонтального и вертикального смещений плазмы относительно центра вакуумной камеры, а также эволюции тока и давления плазмы.

3. Задача на собственные моды тока и характерные времена их затухания в тонкой резистивной стенке впервые решена аналитически с одновременным учётом тороидальности и вытянутости сечения вакуумной камеры $K_w > 1$.

4. Оценка характерного времени развития вертикальной неустойчивости плазмы (VDE) впервые получена без предположения о конфокальности эллиптических сечений плазмы и стенки, до сих пор служившего неотъемлемым элементом аналитической теории VDE и сильно сужавшего область её применимости.

Теоретическая и практическая значимость работы

1. Полученное решение внешней задачи равновесия даёт связь полоидального магнитного поля с параметрами вытянутой плазмы токамака: её размерами, силой тока J , смещением границы и неоднородной вытянутостью внутренних магнитных поверхностей d_b . Знание этой связи при произвольных профилях тока и давления необходимо для реалистического описания эволюции равновесия плазмы, исследования условий её вертикальной устойчивости и разработки систем активной стабилизации VDE. Кроме того, она требуется для интерпретации данных магнитной диагностики в современных токамаках с вытянутой плазмой, в частности, в установке Т-15МД.

2. Найденные выражения для полоидального магнитного поля токов, возбуждаемых в резистивной стенке вытянутой вакуумной камеры токамака, необходимы для включения эффектов её динамической реакции во внешнюю задачу равновесия в существенно более реалистичной, чем ранее, аналитической модели токамака с некруглыми сечениями плазмы и стенки. Эти результаты требуются для вывода уравнений движения плазменного шнура как по большому радиусу, так и по вертикали, в том числе и при срывах тока.

3. Знание собственных мод тока в резистивной стенке вакуумной камеры

и характерных времён их затухания позволяет радикально упростить описание тока в стенке по сравнению с подходами, принятыми в современных кодах с разбиением стенки на большое число конечных элементов – «филаментов». Такое упрощение необходимо для аналитического моделирования реакции стенки на переходные процессы и оценки возникающих в ней сил, а также для выделения динамического вклада токов в стенке в сигнал, регистрируемый магнитными зондами.

4. Предложенная оценка характерного времени развития вертикальной неустойчивости плазмы (VDE) в конфигурации с вытянутой плазмой и круглой резистивной стенкой показывает, что уже в этом случае результат существенно отличается от предсказаний на основе широко применяющейся модели с «конфокальной» стенкой. Это доказывает значимость нового подхода, предложенного в данной работе, покрывающего область параметров, недоступную предшествующим аналитическим моделям.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались на всероссийских и международных научных конференциях:

- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов. Аналитический расчёт равновесной магнитной конфигурации токамака с некруглой плазмой с бесконечным аспектным отношением, **63-я Всероссийская научная конференция МФТИ** (Москва, 2020)
- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов. Устойчивость равновесия плазмы с эллиптическим сечением по отношению к вертикальному движению в токамаке, **64-я Всероссийская научная конференция МФТИ** (Москва, 2021)
- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов. Применение аналитической теории равновесия плазмы с некруглым сечением к анализу переходных процессов в токамаке, **I Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу** (Звенигород, 2023)
- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов, Общий аналитический подход к вычислению тороидальных токов индукции в резистивной стенке токамака, **65-я**

Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, 2023)

- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов. Учёт реакции резистивной стенки на эволюцию положения плазменного шнура в токамаке, **65-я Всероссийская научная конференция МФТИ** (Москва, 2023)
- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов. Аналитические модели для вычисления инкремента неустойчивости вертикального положения плазмы токамака, **LI Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу** (Звенигород, 2024)
- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов. Об учете вытянутости вакуумной камеры при вычислении инкремента VDE в модели токамака с неконфокальной стенкой, **LII Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу** (Звенигород, 2025)
- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов, А. Портоне. Сравнение аналитических и численных расчётов собственных мод тороидального тока индукции в стенке вакуумной камеры токамака, **67-я Всероссийская научная конференция МФТИ** (Москва, 2025)
- Н. В. Чукашев, В. Д. Пустовитов. Аналитический подход к динамической задаче равновесия вытянутой плазмы в токамаке с резистивной стенкой, **XII Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии — ЛаПлаз-2026»** (Москва, 2026)

на тематических совещаниях группы ИТРА по МГД, срывам и управлению плазмой:

- 44th ITPA MDC Meeting (India, Gandhinagar, 22 – 25 October 2024)
- 45th ITPA MDC Meeting (USA, Princeton, 16 – 18 July 2025);

а также на семинарах «Теория магнитного удержания плазмы» и молодёжных семинарах ККТЭиПТ НИЦ «Курчатовский институт», на семинаре «Асимптотические методы математической физики» Лаборатории механики природных катастроф ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН, на семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической

физики» Кафедры общей математики ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, на семинаре «Будущее прикладной математики» Отдела №3 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН и на аспирантском семинаре Кафедры физики плазмы НИЯУ МИФИ.

Научные публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК:

1. В. Д. Пустовитов, Н. В. Чукашев. Аналитическое решение внешней задачи равновесия плазмы эллиптического сечения в токамаке // Физика Плазмы. 2021. Т. 47, № 10. С. 876.
2. V. D. Pustovitov, N. V. Chukashev. General Approach to the Evolving Plasma Equilibria with a Resistive Wall in Tokamaks // Mathematics. 2023. V. 11, №8. P. 1885.
3. V. D. Pustovitov, N. V. Chukashev. Toroidal vs cylindrical analytical description of the magnetic field outside the elongated evolving plasma in tokamaks // Physics of Plasmas. 2023. V. 30, №4. P. 042505.
4. N. V. Chukashev. Toroidal current eigenmodes in the vacuum vessel of an elliptical cross-section tokamak // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2025. V. 67, №3. P. 035007.
5. N. V. Chukashev, V. D. Pustovitov. Analytical estimates of the vertical displacement growth rate in tokamaks with a resistive wall // Physics of Plasmas. 2025. V. 32, №3. P. 032511.

Личный вклад автора

Постановка задач, построение теоретических моделей и интерпретация результатов проводились автором совместно с научным руководителем. Все представленные в диссертации аналитические расчёты, развитие математических методов и визуализация данных выполнены лично автором.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав с выводами, заключения, благодарностей, приложения и списка литературы. Работа изложена на 141 странице, содержит 3 таблицы, 21 рисунок, 326 формул, список обозначений и список цитируемой литературы из 202 наименований.

1. Аналитическое решение внешней задачи равновесия вытянутой плазмы в токамаке

Потребность в решении внешней задачи равновесия тороидальной плазмы всегда была связана с проблемой управления её положением и формой и вопросами магнитной диагностики [84, 85, 123–125, 132, 137–141]. Сегодня к этим классическим направлениям добавляется широкий круг исследований, в которых важным элементом становится электромагнитная реакция стенки вакуумной камеры на эволюцию равновесия [6, 39, 46, 47, 50, 62, 63, 65–70, 119, 120, 141]. К ним относятся моделирование динамики плазмы при VDE и срывах и оценка сил, действующих при этом на вакуумную камеру. Обычно сложность этих задач в аналитических построениях преодолевают, заменяя плазму жестким кольцом с током [39, 67–70] или прямолинейным цилиндром эллиптического сечения [55, 74–78, 85, 97–102]. Первый подход пренебрегает конечными размерами плазмы, обладающей способностью практически мгновенно деформироваться при изменении внешних условий, а также влиянием формы границы и профиля тока, тогда как второй полностью исключает возможность описания тороидальных эффектов, существенных во многих задачах для токамаков.

Целью первой главы является построение аналитической модели равновесия плазмы, применимой к современным токамакам с вытянутой плазмой. Для этого понадобится решить краевую задачу для уравнения Грэда-Шафранова вне плазмы, учитывая как тороидальность, так и вытянутость её сечения. Решение данного уравнения предлагалось в [82, 85] для тороидального шнура с «круглой» границей, однако формальная процедура достаточно сложна и задействует специальные биполярные координаты, допускающие разделение переменных. К тому же, не было чёткого алгоритма, позволяющего включить эффекты более сложной геометрии в общую схему. Последнего удаётся достичь, если пользоваться методом функции Грина, дающим математически точное решение внешней задачи в виде интегралов по границе плазмы [119, 120, 123–125]. Это гарантирует правильную асимптотику решений и позволяет сразу учесть граничные условия, а также отложить введение малых параметров, типичное для аналитической теории равновесия [82–85], на более позднюю стадию.

Ниже рассматривается задача равновесия тороидальной плазмы с эллиптическим сечением и приведены общие электромагнитные соотношения для магнитного поля, справедливые при любом аксиально-симметричном распределении тока в плазме [119, 120]. Достаточно подробное их обоснование можно найти в [119, 124, 125]. Затем мы вводим приближение $R_{pl}/b \gg 1$ и рассматриваем две промежуточные задачи: получаем выражение для полоидального поля на вытянутой границе плазмы и производим нужное преобразование функции Грина по схеме [119, 120], но теперь учитывая конечную вытянутость границы плазмы.

1.1. Модель и постановка задачи

Нас интересует модель, пригодная для реальных токамаков, поэтому будем рассматривать объёмную тороидальную плазму, полоидальное сечение которой задано уравнением эллипса

$$(r - R_{pl})^2 + \frac{z^2}{K_b^2} = b^2 \quad (1.1)$$

в цилиндрических координатах (r, ζ, z) , связанных с осью симметрии тора (Рис. 1). Здесь R_{pl} и b — большой и малый радиусы плазмы, а $K_b \geq 1$ — её вытянутость. Система считается осесимметричной, поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать зависимостью физических величин от тороидального угла ζ .

При анализе динамики плазмы с частичной стабилизацией резистивной стенкой можно не учитывать силы инерции в левой части уравнения движения (1) и пользоваться уравнением силового баланса (2). Входящее в него магнитное поле $\mathbf{B}$, подчиняющееся

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

удобно записать в виде

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал. Последнее при подстановке в закон Ампера в квазистационарной форме

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.4)$$

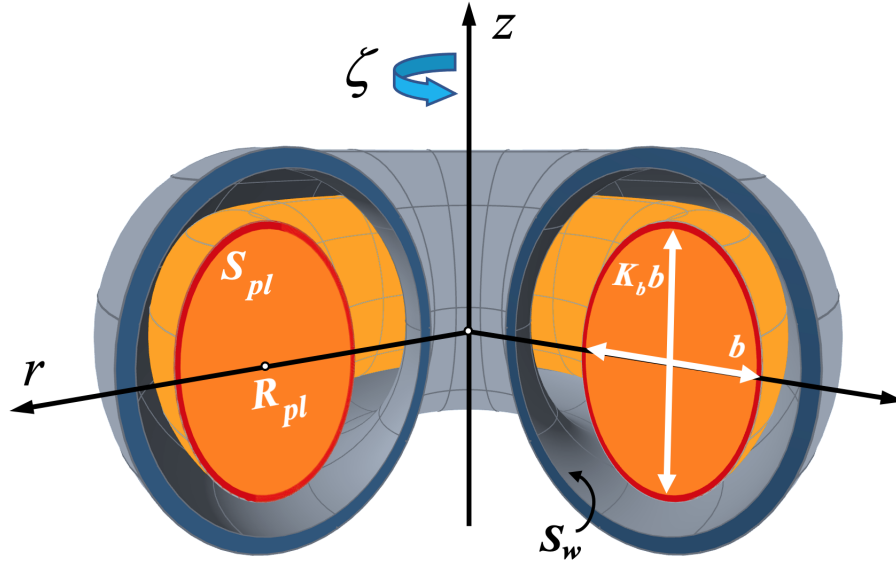


Рис. 1. Схематический вид токамака с вертикально вытянутой плазмой в цилиндрических координатах (r, ζ, z) . Большой радиус плазмы — R_{pl} , а малая и большая полуоси её сечения, соответственно, b и $K_b b$. Торoidalные поверхности плазмы и стенки обозначены как S_{pl} и S_w .

с введением кулоновской калибровки $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ приводит к уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (1.5)$$

В свободном пространстве его решение даётся объёмным потенциалом

$$\mathbf{A}^v(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_v|} d\mathbf{r}_v, \quad (1.6)$$

где интегрирование проводится по объёму v , содержащему ток. Таким объёмом в токамаке являются плазма (pl), стенка (w) или обмотки внешнего поля (ec).

Подстановка (1.6) в (1.3) даёт известную формулу Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{B}^v(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \mathbf{j}(\mathbf{r}_v) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_v|^3} d\mathbf{r}_v, \quad (1.7)$$

с помощью которой можно вычислить магнитное поле в системе, если заданы все протекающие в ней токи. На практике информация о них всегда является неполной, поскольку наперёд известны только токи во внешних обмотках, а токи в плазме и стенке представляют собой динамические величины и зависят от конкретного сценария. В то же время уравнение равновесия (2) требует, чтобы при любом сценарии выполнялось граничное условие

$$\mathbf{n}_{pl} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{n}_{pl}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности плазмы S_{pl} , а

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{pl} + \mathbf{B}^w + \mathbf{B}^{ec} \quad (1.9)$$

— полное магнитное поле, включающее собственное поле тока плазмы $\mathbf{B}^{pl}$, поле токов в стенке $\mathbf{B}^w$ и поле внешних катушек $\mathbf{B}^{ec}$. В задаче равновесия равенство (1.8) выступает фундаментальным ограничением: при самом общем распределении токов в системе создаваемые ими магнитные поля обязаны давать на границе плазмы S_{pl} нулевую нормальную компоненту $\mathbf{B}$.

С применением (1.8) формула (1.7) преобразуется к равенству [142]

$$\mathbf{B}^{pl}(\mathbf{r}) - H_{pl}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{pl} (\mathbf{n}_{pl} \times \mathbf{B}) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}|^3} dS_{pl}, \quad (1.10)$$

где интеграл берётся по замкнутой поверхности плазмы, а

$$H_{pl}(\mathbf{r}) \equiv \begin{cases} 1, & \text{внутри } S_{pl} \\ 0, & \text{вне } S_{pl} \end{cases} \quad (1.11)$$

— ступенчатая функция или функция Хевисайда. Это точное решение можно символически записать в форме кусочно-непрерывного магнитного поля

$$\mathbf{B}_i = \begin{cases} -\mathbf{B}^{ext}, & \text{внутри } S_{pl} \\ \mathbf{B}^{pl}, & \text{вне } S_{pl} \end{cases}, \quad (1.12)$$

создаваемого текущим по границе плазмы током с поверхностной плотностью

$$\mathbf{i} \equiv \mathbf{n}_{pl} \times \mathbf{B} / \mu_0, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{B}^{ext} = \mathbf{B}^w + \mathbf{B}^{ec}$ — суммарное внешнее поле. Такой прием вычисления $\mathbf{B}^{pl}$ и $\mathbf{B}^{ext}$ по заданному значению поля на S_{pl} хорошо известен в электродинамике и называется методом эквивалентных поверхностных токов [143, 144]. Также он упоминается в [145], а для токамаков был переформулирован в [146, 147] как «принцип виртуального кожуха», см. примеры его численной реализации в [58, 148–150].

Выражение (1.10) позволяет вычислить $\mathbf{B}^{pl}$ и $\mathbf{B}^{ext}$, не задаваясь конкретной зависимостью тока плазмы и внешними токами. Вся информация о них

неявно содержится в геометрии поверхности S_{pl} и распределении на ней полного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. С условием (1.8) речь идёт о двух его независимых компонентах, однако в рассматриваемом здесь случае аксиальной симметрии количество неизвестных в задаче уменьшается, исходя из следствия (1.3)

$$2\pi\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\zeta + \mu_0 I \nabla\zeta, \quad (1.14)$$

где

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv 2\pi \int_0^r \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z r dr = 2\pi r A_\zeta(\mathbf{r}) \quad (1.15)$$

— полоидальный поток магнитного поля, а I — определённый похожим равенством (с заменой $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{j}$) полоидальный ток. При соблюдении силового баланса (2) в плазме обе эти величины являются поверхностными функциями и могут быть выражены одна через другую, например, $I = I(\psi)$. Таким образом, для описания магнитного поля достаточно всего одной скалярной функции $\psi(\mathbf{r})$.

Подстановка (1.10) в (1.14) и интегрирование по тороидальному углу дают решение для ψ в виде потенциала простого слоя [119, 120, 123–125]

$$\psi^{pl} - H_{pl}(\psi - \psi_b) = 2\pi \oint_{pl} G\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl}. \quad (1.16)$$

Здесь

$$\psi = \psi^{pl} + \psi^w + \psi^{ec} \quad (1.17)$$

— полный полоидальный поток по аналогии с (1.9), $\psi_b \equiv \psi(t)|_{pl}$ — его значение на границе S_{pl} (в общем случае зависящее от времени), а интеграл берётся по контуру полоидального сечения S_{pl} с элементом длины $d\mathbf{l}_{pl} = \boldsymbol{\tau} d\ell_{pl}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор. Функция

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_v) \equiv \frac{rr_v}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\zeta - \zeta_v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_v|} d\zeta_v \quad (1.18)$$

называется тороидальной функцией Грина и имеет физический смысл полоидального потока, создаваемого в точке $\mathbf{r}$ элементарным кольцом с током, пересекающим точку $\mathbf{r}_v$. Косинус в числителе (1.18) возникает из скалярного произведения $\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_{\zeta_v} = \cos(\zeta - \zeta_v)$ аксиальных базисных векторов $\mathbf{e}_\zeta = r\nabla\zeta$.

В работах [119, 120, 123–125] показывается, что равенство (1.16) представляет точное решение известного уравнения Грэда-Шафранова во внешней по отношению к S_{pl} области, где ток плазмы $j_\zeta = 0$. При этом (1.16) обеспечивает выделение в полном решении ψ вкладов от плазмы ψ^{pl} и от внешних источников ψ^{ext} с самого начала вычислений. Действительно, вне плазмы $H_{pl} = 0$, и результатом интегрирования в (1.16) является ψ^{pl} в вакуумном промежутке «плазма-стенка». Внутри S_{pl} , где $H_{pl} = 1$, тот же интеграл даёт $\psi^{ext} - \psi_b$. Правильная асимптотика ψ^{pl} и ψ^{ext} в соответствующих областях гарантируется свойствами функции Грина $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_v)$, что избавляет от необходимости выделять регулярные решения и производить их сшивку на границе S_{pl} . Для получения результата требуется только удобное преобразование функции Грина, позволяющее аналитически вычислить интеграл в (1.16), и явное выражение для полоидальной компоненты $\mathbf{B}$ на S_{pl} .

Пример вычислений с (1.16) для плазмы с круглым сечением описан в [119, 120], а элементы техники представлены в [123–125] с расширениями и приложениями к стеллараторам. Здесь принципиальным отличием от прежних работ будет учет вертикальной вытянутости плазмы $K_b \geq 1$.

1.2. Полоидальное магнитное поле на эллиптической границе плазмы

Чтобы найти распределение $\mathbf{B}$ на границе плазмы с сечением S_{pl} , заданным уравнением (1.1), будем рассматривать близкие к ней магнитные поверхности как вложенные торы $a = \text{const}$ с параметризацией

$$r = R_w + \Delta(a) - a \cos \theta, \quad (1.19)$$

$$z = K(a)a \sin \theta, \quad (1.20)$$

где a — малая полуось сечения, $K(a)$ — вытянутость, а $\Delta(a)$ — горизонтальное смещение поверхности относительно центра вакуумной камеры $r = R_w$, называемое также шафрановским смещением (Рис. 2). При $K = 1$ это сводится к стандартной модели смещённых круглых магнитных поверхностей [83–85, 91, 95, 124, 125, 151]. Некоторые результаты аналитических расчетов для тороидальной

плазмы с $K \neq 1$ приводились в [85, 91, 95, 124, 125], метрические коэффициенты для прямой конфигурации с $\Delta = 0$ рассчитывались в [100].

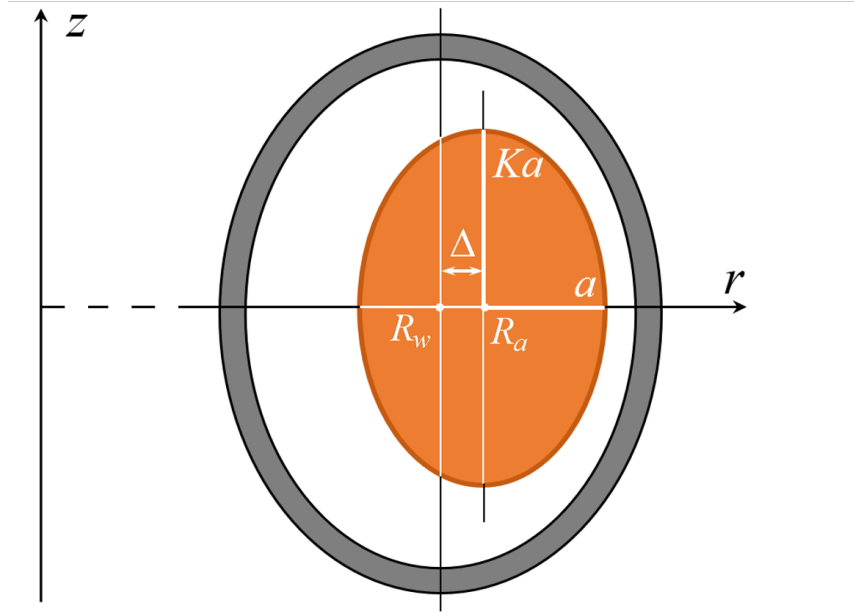


Рис. 2. Горизонтально смещенная магнитная поверхность $a = \text{const}$ эллиптического сечения. Здесь a и Ka — малая и большая полуоси эллипса, Δ — его сдвиг относительно центра вакуумной камеры R_w , а $R_a = R_w + \Delta(a)$ — большой радиус магнитной поверхности.

При $a = b$ уравнения (1.19) и (1.20) естественно описывают эллипс (1.1), соответствующий S_{pl} . Для интегрирования в (1.16) по такому контуру нужно удобным образом выразить функцию Грина и тангенциальную компоненту магнитного поля

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\frac{\nabla \psi \cdot \mathbf{n}}{2\pi r} = -\frac{\psi'(a)}{2\pi} \frac{|\nabla a|}{r}, \quad (1.21)$$

где $\mathbf{n} = \nabla a / |\nabla a|$ — единичная нормаль к магнитной поверхности $a = \text{const}$, а

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{n} \quad (1.22)$$

— полоидальный касательный вектор.

Из параметризации, заданной равенствами (1.19) и (1.20), получается связь между векторами контравариантного базиса

$$\mathbf{e}_r \equiv \nabla r = (\Delta' - \cos \theta) \nabla a + a \sin \theta \nabla \theta, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{e}_z \equiv \nabla z = K(1 + 2d) \sin \theta \nabla a + Ka \cos \theta \nabla \theta, \quad (1.24)$$

где

$$d(a) \equiv aK'/(2K), \quad (1.25)$$

а штрих обозначает производную по a . Решением этой системы является

$$D\nabla a = -\mathbf{e}_r K a \cos \theta + \mathbf{e}_z a \sin \theta, \quad (1.26)$$

$$D\nabla \theta = \mathbf{e}_r K(1 + 2d) \sin \theta + \mathbf{e}_z (\cos \theta - \Delta'). \quad (1.27)$$

Введённая здесь величина

$$D \equiv \frac{1}{|\nabla a \times \nabla \theta|} = K a (1 - \Delta' \cos \theta + 2d \sin^2 \theta) \quad (1.28)$$

имеет смысл якобиана отображения цилиндрических координат (r, z) в потоковые (1.19) и (1.20). Заметим, что в (1.24) исправлена опечатка, допущенная в формуле (23) в [121].

Таким образом, в нашей модели

$$|\nabla a|^2 = \frac{a^2}{D^2} [1 + (K^2 - 1) \cos^2 \theta], \quad (1.29)$$

откуда следует

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell = -\frac{\psi'(a)}{2\pi} \frac{a^2}{rD} [1 + (K^2 - 1) \cos^2 \theta] d\theta, \quad (1.30)$$

где мы воспользовались выражением элемента длины эллиптического контура

$$d\ell = a \sqrt{1 + (K^2 - 1) \cos^2 \theta} d\theta. \quad (1.31)$$

Производную ψ' можно связать с полным током плазмы с помощью теоремы о циркуляции:

$$\mu_0 J(a) = -\alpha_{22} \psi'(a), \quad (1.32)$$

где коэффициент

$$\alpha_{22} = \frac{a}{R_a} \frac{K^2 + 1}{2K} f_{22} \quad (1.33)$$

получается интегрированием (1.30) по замкнутому контуру, $R_a = R_w + \Delta(a)$ — большой радиус магнитной поверхности $a = \text{const}$, а

$$f_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + (K^2 - 1)/(K^2 + 1) \cos 2\theta}{(1 - a/R_a \cos \theta)(1 - \Delta' \cos \theta + 2d \sin^2 \theta)} d\theta \quad (1.34)$$

— величина порядка единицы [125]. С учётом этого (1.30) превращается в

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell = \frac{\mu_0 J}{2\pi f_{22}} \frac{R_a K a}{rD} \left(1 + \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \cos 2\theta \right) d\theta. \quad (1.35)$$

Знаменатель rD содержит сложную угловую зависимость, явно представленную в интеграле (1.34). Его можно упростить разложением по малым параметрам a/R_a , Δ' и d :

$$\frac{R_a K a}{rD} \simeq 1 + \left(\Delta' + \frac{a}{R_a} \right) \cos \theta - 2d \sin^2 \theta + 2g \cos^2 \theta, \quad (1.36)$$

где

$$2g \equiv \Delta'^2 + \frac{\Delta' a}{R_a} + \frac{a^2}{R_a^2}. \quad (1.37)$$

Подстановка этого выражения в (1.34) приводит к

$$f_{22} \simeq 1 - d + g + \frac{d + g}{2} \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}. \quad (1.38)$$

Отбрасывая последний член как малый по сравнению с $(-d + g)$, из (1.35) получаем

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 J(a) \left[1 + \left(\Delta' + \frac{a}{R_a} \right) \cos \theta + \left(d + g + \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \right) \cos 2\theta \right] \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (1.39)$$

Это равенство справедливо для произвольной магнитной поверхности. Здесь и далее поправки, связанные с d , учтены только в линейном приближении, а с a/R_a и Δ' — в квадратичном. Последние естественно возникают из rD в (1.36) при замене $(1 - x)^{-1}$ на $1 + x + x^2$ и собраны в слагаемом g .

При решении задачи равновесия для круглой плазмы в правой части (1.39) достаточно ограничиться первой гармоникой по полоидальному угловому параметру θ [82, 83, 85, 119, 120]. Такое приближение справедливо в пределе большого аспектного отношения $R_a/a \gg 1$ и при давлении плазмы несколько меньше равновесного предела [85, 125, 151]. Удержание слагаемого с $\cos \theta$ означает учёт тороиальности системы в основном приближении, что делалось ещё в работах В. Д. Шафранова [82–85]. В случае некруглой плазмы важной становится также и вторая гармоника, что прямо следует из (1.39).

Для сравнения укажем, что $(K^2 - 1)/(K^2 + 1) > 0.38$ при $K > 1.5$, тогда как $a/R_a < 0.4$ для токамаков с $R_w/b > 2.5$. В таком диапазоне параметров находятся практически все токамаки, приведённые в Табл. 1. Соответственно, основной вклад во вторую гармонику в (1.39) дают слагаемые с d и $(K^2 - 1)/(K^2 + 1)$ и при дальнейших расчётах тороидальными поправками второго порядка, содержащимися в g , можно пренебречь.

Заметим, что формула (1.39) получена при заданной параметризации (1.19), (1.20) только из общих векторных соотношений (1.21)–(1.24) и теоремы о циркуляции. Поэтому равенство (1.39) выполняется при любых распределениях тока в плазме.

1.3. Преобразование тороидальной функции Грина (1.18)

В стандартной аналитической теории равновесия плазмы в токамаках [82–85, 91, 95, 120, 124, 125] связанная с тороидальностью неоднородность магнитного поля по полоидальному углу учитывается в линейном по a/R_{pl} приближении, где R_{pl} — большой радиус плазмы. Чтобы вписаться в эту схему без потери точности, можно воспользоваться приближенным выражением для функции Грина [119, 120, 124, 125]

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_v) \simeq G_0 - \frac{x + x_v}{2R_v} \left(G_0 + \frac{R_v}{2\pi} \right), \quad (1.40)$$

в котором сохранена лишь линейная тороидальная поправка к цилиндрической аппроксимации

$$G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_v) \equiv \frac{R_v}{2\pi} \left[\ln \frac{8R_v}{\sqrt{(x - x_v)^2 + (z - z_v)^2}} - 2 \right], \quad (1.41)$$

где

$$x \equiv R - r \quad (1.42)$$

— локальная координата в сечении контура интегрирования.

В общем случае, выбор R_v в (1.40)–(1.42) произволен. Это может быть радиус центра вакуумной камеры R_w или радиус центра крайней магнитной поверхности (границы плазмы) $R_{pl} = R_w + \Delta_b$, где Δ_b — горизонтальное смещение плазменного шнура относительно точки $r = R_w$. Далее использование R в формулах будет указывать на их применимость в любом интересующем нас случае. Необходимость различать близкие значения R_w и R_{pl} возникает, когда требуется точный учёт положения плазмы относительно стенки ($\Delta_b \neq 0$).

Для интегрирования в (1.16) нужно выделить постоянную часть G_0 на контуре S_{pl} , а переменную представить в виде ряда Фурье, подобного (1.39).

Для круглой плазмы эта задача решалась в [119, 120, 124, 125] с использованием гармонического разложения [152]

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varsigma \cos \alpha + \varsigma^2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varsigma^m}{m} \cos m\alpha, \quad (1.43)$$

где $\varsigma = l_{\min}/l_{\max} < 1$. Оно применимо для G_0 и в нашем случае, если выполняется условие сходимости, но не совсем удобно, так как радиус $l = \sqrt{x^2 + z^2}$ на границе некруглой плазмы будет функцией углового параметра θ . В связи с этим возникает необходимость найти подходящее нашей геометрии преобразование знаменателя в (1.41), чтобы затем разложить G_0 по собственным гармоникам с коэффициентами, постоянными на S_{pl} .

Наиболее коротким путём к этому можно прийти, представив (1.41) в виде действительной части комплексного логарифма

$$\frac{2\pi}{R_v} G_0 = \operatorname{Re} \operatorname{Ln} \frac{8R_v}{s - s_v} - 2, \quad (1.44)$$

где

$$s \equiv x + iz, \quad (1.45)$$

а i — мнимая единица. В нашей задаче переменные $x_v = x_b$ и $z_v = z_b$ пробегают эллиптическую границу плазмы, которой в (1.19) и (1.20) соответствует $a = b$ и $K(b) = K_b$.

Координаты (a, θ) в (1.19) и (1.20) привязаны к магнитным поверхностям внутри плазмы и подчиняются там условию $\mathbf{B} \cdot \nabla a = 0$. Фактически они были нужны лишь вблизи S_{pl} для нахождения связи $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl}$ с внутренним решением для $\mathbf{B}$ (через Δ' и d в (1.39)). По другую сторону S_{pl} (в вакуумном промежутке плазма-стенка) определим (a, θ) подобными равенствами

$$r = R_v - a \cos \theta, \quad (1.46)$$

$$z = Ka \sin \theta, \quad (1.47)$$

задающими при $a \geq b$ семейство вложенных торов с эллиптическими сечениями безотносительно к поведению линий $\mathbf{B}$. Совпадение граничного тора $a = b$ с S_{pl} обеспечивается заданием $K(b) = K_b$ и $R_v = R_{pl} = R_w + \Delta_b$. В остальном выбор координатных поверхностей $a(\mathbf{r}) = \text{const}$ во внешней области произволен, что

позволит ниже вместо $\mathbf{B} \cdot \nabla a = 0$ ввести упрощающую связь (1.53). Таким образом, координаты (a, θ) являются магнитными только внутри S_{pl} .

Если пользоваться параметризацией (1.46) и (1.47), получим

$$s = a(\cos \theta + iK \sin \theta) = a \frac{K+1}{2} e^{i\theta} \left(1 - \frac{K-1}{K+1} e^{-2i\theta} \right), \quad (1.48)$$

аналогично и для s_b с заменой $\{a, \theta, K\} \rightarrow \{b, \theta_b, K_b\}$. Для входящей в (1.44) комбинации эти подстановки дают

$$(s - s_b) \frac{2e^{-i\theta}}{a(K+1)} = (1 - \eta e^{i\theta_-})(1 + \tilde{\eta} e^{-i\theta_+}) + \left(\eta \tilde{\eta} - \frac{K-1}{K+1} \right) e^{-2i\theta}, \quad (1.49)$$

где

$$\theta_- \equiv \theta_b - \theta, \quad \theta_+ \equiv \theta_b + \theta, \quad (1.50)$$

$$\eta \equiv \frac{b K_b + 1}{a K + 1} \quad (1.51)$$

— отношение «средних радиусов» эллипсов, а

$$\tilde{\eta} \equiv \frac{K_b - 1}{K_b + 1} \eta = \frac{b K_b - 1}{a K + 1}. \quad (1.52)$$

Ясно, что $a(K+1) = l_x + l_z$ — сумма полуосей эллипса $a = \text{const}$. Для системы вложенных координатных поверхностей во внешней области должно выполняться $a > b$ и $Ka > K_b b$, иначе нарушилось бы взаимно-однозначное соответствие (1.46), (1.47). При этих условиях получаем $\eta < 1$.

Равенства (1.48) и (1.49) справедливы для любых $K(a)$ в (1.47), гарантирующих взаимно-однозначное соответствие $(r, z) \leftrightarrow (a, \theta)$. Здесь совпадение координатной поверхности $a = \text{const}$ с магнитной требуется лишь на границе плазмы $a = b$ и достигается при $K(b) = K_b$. Оставшейся свободой выбора $K(a)$ воспользуемся, чтобы избавиться от слагаемого с $e^{-2i\theta}$ в (1.49). Оно исчезает при

$$(K+1)\eta\tilde{\eta} = K-1. \quad (1.53)$$

Тогда комплексный логарифм от правой части (1.49) разбивается на два слагаемых, каждое из которых разлагается в ряд Меркатора

$$\text{Ln}(1 - \varsigma) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varsigma^m}{m}, \quad |\varsigma| < 1, \quad (1.54)$$

поскольку при $a > b$ выполнены условия сходимости $\eta < 1$ и $\tilde{\eta} < 1$, см. (1.51) и (1.52).

С учётом этих операций получаем из (1.44):

$$\frac{2\pi}{R_{pl}}G_0 = \ln \frac{16R_{pl}}{a(K+1)} - 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^m}{m} \left[\cos m\theta_- + \left(\frac{1-K_b}{1+K_b} \right)^m \cos m\theta_+ \right]. \quad (1.55)$$

Этот ряд Фурье с переменной θ_b и коэффициентами, постоянными на границе эллипса $a = b$, годится для внешней области $a > b$, где $\eta < 1$. Связь (a, θ) с обычными цилиндрическими координатами (r, z) даётся равенствами (1.46) и (1.47), где

$$Ka = \sqrt{a^2 + b^2(K_b^2 - 1)}, \quad (1.56)$$

что является следствием (1.53).

Последнее, обращая в нуль слагаемое с $e^{-2i\theta}$ в (1.49), соответствует такому $\tilde{\eta}$, что

$$\tilde{\eta}^2 = \frac{K_b - 1}{K_b + 1} \frac{K - 1}{K + 1}. \quad (1.57)$$

Это обеспечивает $|\tilde{\eta}| < 1$ при любых $K(a) > 0$, поэтому при $a < b$ мы получили бы, разделив (1.49) на $\eta e^{i\theta_-}$,

$$(s - s_b) \frac{2e^{-i\theta_b}}{b(K_b + 1)} = - \left(1 - \frac{e^{-i\theta_-}}{\eta} \right) (1 + \tilde{\eta} e^{-i\theta_+}). \quad (1.58)$$

Подстановка этого выражения в (1.44) при $\eta > 1$ с разложением по формуле (1.54) привела бы к

$$\frac{2\pi}{R_{pl}}G_0 = \ln \frac{16R_{pl}}{b(K_b + 1)} - 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{-m}}{m} \left[\cos m\theta_- + \left(\frac{1-K}{1+K} \right)^m \cos m\theta_+ \right], \quad (1.59)$$

чем можно пользоваться внутри плазмы при $a < b$, если положить $R = R_{pl}$ и продолжить в эту область заданные (1.46) и (1.47) координаты a и θ с $K(a)$, удовлетворяющим (1.56).

Заметим, что это условие делает линии a и θ ортогональными: $\nabla a \cdot \nabla \theta = 0$. При этом преобразование координат (1.46), (1.47) становится конформным и фактически представляет эллиптические переменные $x = c_b \operatorname{sh} \mu \cos \theta$ и $z = c_b \operatorname{ch} \mu \sin \theta$, применявшиеся при решении внешней задачи равновесия прямого плазменного шнура эллиптического сечения [74, 85, 97–102], см. далее (2.15), (2.16). Координатные поверхности a и μ совпадают при таком выборе c_b , когда эллипс $\mu = \mu_b$ совмещается с границей плазмы.

В параметризации (1.46), (1.47) с учётом (1.56) точка $x = 0$ является выделенной. Это связано с занулением x при $a = 0$ и конечностью z , что приводит к вырождению «нулевой» поверхности в отрезок. При $a = 0$ вытянутость $K(a)$ имеет особенность, однако эта сингулярность не препятствует вычислениям внутри плазмы. Дело в том, что в разложение (1.59) функция $K(a)$ входит только в связке с малым радиусом a , образуя выражение (1.56), конечное при $a = 0$. Поэтому (1.59) в соглашении (1.56) можно применять и для вычисления поля внешних источников внутри плазмы.

Подстановка в (1.55) и (1.59) $K_b = 1$ воспроизводит формулу (44) из [119] для G_0 при круглой границе, см. также [120, 125]. Далее равенство (1.40) с G_0 в виде (1.55) при $a > b$ и (1.59) при $a < b$ будет использоваться для вычисления интеграла в (1.16). Он берётся по контуру плазмы, поэтому в формулах, задающих G , выбран большой радиус $R = R_{pl} = R_w + \Delta_b$. Тем самым мы совмещаем граничные поверхности двух систем координат — потоковых в (1.39) и геометрических в G .

1.4. Полоидальные потоки ψ^{pl} и ψ^{ext} вне вытянутой тороидальной плазмы

Для интегрирования в (1.16) по крайней магнитной поверхности (границе плазмы S_{pl}) выражение (1.39) удобно представить в компактной форме

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \left(1 - \frac{b}{R_{pl}} \Lambda \cos \theta_b + \Lambda_2 \cos 2\theta_b \right) d\theta_b, \quad (1.60)$$

где $d\mathbf{l}_{pl}$ — элемент длины дуги эллипса, см. (1.31), а

$$\Lambda \equiv -R_{pl} \frac{\Delta'(b)}{b} - 1, \quad (1.61)$$

$$\Lambda_2 \equiv d_b + \frac{K_b^2 - 1}{K_b^2 + 1} \quad (1.62)$$

— коэффициенты, постоянные на S_{pl} . В последнем мы пренебрегли квадратичными по b/R_{pl} и Δ' поправками, дающими g в (1.39). Здесь их присутствие было бы некорректно, поскольку другой сомножитель G в (1.16) вычислен в линейном приближении по тороидальности, см. (1.40).

Для плазмы с круглым сечением $d\ell_{pl} = b d\theta_b$, и (1.60) превращается в известное граничное условие Шафранова

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_{pl} = B_J \left(1 - \frac{b}{R_{pl}} \Lambda \cos \alpha \right), \quad (1.63)$$

эквивалентное уравнениям (6.7) в [83] и (26) в [84]. Здесь α — угол в полярных координатах (l, α) , связанных с геометрическим центром плазмы, см. уравнение (59) в [120], а B_J — нормировочная константа, введенная равенством

$$B_J \equiv \frac{\mu_0 J}{2\pi b}. \quad (1.64)$$

На поверхности круглого плазменного шнура она естественно совпадает с полоидальным полем его полного тока J .

Соединив (1.60) с (1.40) и подставив туда (1.55), из (1.16) получаем решение во внешней области при $a > b$:

$$\psi^{pl} = \psi_0^{pl} + \psi_1^{pl} + \psi_2^{pl}, \quad (1.65)$$

где

$$\psi_0^{pl}(a) \equiv \psi_J \left[\ln \frac{16R_{pl}}{a(K+1)} - 2 \right], \quad (1.66)$$

$$\psi_1^{pl}(a, \theta) \equiv \psi_J \left[\frac{B_{\perp}^K a}{B_J b} + \frac{\Delta^K(a)}{a} \right] \cos \theta, \quad (1.67)$$

$$\psi_2^{pl}(a, \theta) \equiv \psi_J \frac{\Lambda_2 b^2 (K_b^2 + 1)}{2 a^2 (K + 1)^2} \cos 2\theta \quad (1.68)$$

— полоидальные гармоники магнитного потока, а

$$B_{\perp}^K \equiv -B_J \frac{b}{2R_{pl}} \left[\ln \frac{16R_{pl}}{b(K_b + 1)} + \frac{2}{K_b + 1} \left(\Lambda - \frac{K_b}{2} \right) \right], \quad (1.69)$$

$$\Delta^K(a) \equiv \frac{a^2}{2R_{pl}} \left[\ln \frac{a(K+1)}{b(K_b + 1)} + \frac{2}{K_b + 1} \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{b^2(K_b + 1)}{a^2(K+1)} \right) \right]. \quad (1.70)$$

Укажем, что величина K , входящая в полученные выражения, является функцией координаты a и удовлетворяет равенству (1.56).

При $K = K_b = 1$ функции ψ_0^{pl} и ψ_1^{pl} превращаются в $\psi_J a_0$ и $\psi_J a_1 \cos \alpha$, введенные равенствами (63) и (64) в [120]. Для удобства сравнения также отметим, что в этом пределе (1.69) даёт

$$B_{\perp}^{eq} = -B_J \frac{b}{2R_{pl}} \left(\ln \frac{8R_{pl}}{b} + \Lambda - \frac{1}{2} \right), \quad (1.71)$$

а из (1.70) следует

$$\Delta(l) = \frac{l^2}{2R_{pl}} \left[\ln \frac{l}{b} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) \right]. \quad (1.72)$$

Формулы (1.71) и (1.72) являются классическими результатами В. Д. Шафранова [82–84]. Первая даёт величину внешнего вертикального поля, необходимого для поддержания тороидального равновесия круглой плазмы в токамаке. Вторая при $l = b_w$ даёт Δ_{iw} — величину её смещения относительно идеально проводящей круглой стенки радиуса b_w , когда $B_{\perp}^{eq}$ создаётся только токами, наведёнными в этой стенке, а её граница совпадает с магнитной поверхностью. Эти соотношения приводятся здесь в обозначениях [120], см. там (1), (65) и рис. 2.

При переходных процессах, наиболее ярким примером которых являются срывы или принудительное прерывание разряда с $dJ/dt \neq 0$, неизвестной становится величина $\mathbf{B}^{ext}$ из-за вклада в неё токов в стенке, см. [119]. Поэтому для описания эволюции плазмы необходимо также подобное (1.65) выражение для ψ^{ext} . Пользуясь (1.16), мы можем найти его внутри S_{pl} . Для нашего случая оно получается подстановкой теперь уже (1.59) в (1.40) и (1.60) в (1.16):

$$\psi^{ext} = \psi_b - \psi_0^{pl}(b) - \psi_J \left[\frac{B_{\perp}^K}{B_J} \frac{a}{b} \cos \theta + \frac{\Lambda_2}{2} \frac{a^2(K^2 + 1)}{b^2(K_b + 1)^2} \cos 2\theta \right], \quad (1.73)$$

где ψ_0^{pl} — функция (1.66).

Это равенство дополняет (1.65)–(1.68) тем, что обеспечивает $\psi^{pl} + \psi^{ext} = \psi_b$ на границе плазмы, как и должно быть вследствие (1.8). Полученное в собственных координатах плазмы (a, θ) , оно легко трансформируется к обычным переменным (r, z) . Действительно, так как (a, θ) связаны с (r, z) посредством (1.46) и (1.47) с $R_v = R_{pl}$, то

$$a \cos \theta = R_{pl} - r, \quad (1.74)$$

$$a^2(K^2 + 1) \cos 2\theta = b^2(K_b^2 - 1) + 2[(R_{pl} - r)^2 - z^2]. \quad (1.75)$$

Эти подстановки приводят (1.73) к виду

$$\psi^{ext} = \psi_0^{ext} + \psi_{\perp}^{ext} + \psi_q^{ext}, \quad (1.76)$$

где

$$\psi_0^{ext} \equiv \psi_b - \psi_J \left[\ln \frac{16R_{pl}}{b(K_b + 1)} - 2 \right] - \pi R_{pl} b B_q \frac{K_b^2 - 1}{2} \quad (1.77)$$

— не зависящая от координат функция времени,

$$\psi_{\perp}^{ext}(r) \equiv 2\pi R_{pl} B_{\perp}^K (r - R_{pl}), \quad (1.78)$$

$$\psi_q^{ext}(r, z) \equiv \pi \frac{R_{pl}}{b} B_q [z^2 - (R_{pl} - r)^2], \quad (1.79)$$

а множитель B_q задаётся как

$$B_q \equiv B_J \frac{2\Lambda_2}{(K_b + 1)^2}. \quad (1.80)$$

1.5. Обсуждение результатов

В силу принципа суперпозиции поток внешнего поля

$$\psi^{ext} = \psi^w + \psi^{ec} \quad (1.81)$$

включает в себя вклад ψ^w от токов в стенке вакуумной камеры и ψ^{ec} от токов во внешних обмотках. Если ψ^{ec} известно, как и должно быть при предписанных токах в полоидальных катушках, разность ψ^{ext} , найденного из условий равновесия плазмы, и ψ^{ec} даст нам ψ^w . Поэтому результат (1.73), (1.76) может быть полезен для задач магнитной диагностики, а в динамической задаче равновесия он становится ключевым элементом из-за сильного влияния электромагнитной реакции стенки на скорость переходных процессов [46, 47, 50, 58, 62, 63, 109, 111–120, 126, 130, 131, 153].

При использовании (1.73) в упомянутых задачах возникает закономерный вопрос о его применимости, поскольку магнитные зонды и стенка располагаются вне плазмы, тогда как процедура, основанная на равенстве (1.16), формально даёт ψ^{ext} только в её объёме. За его пределами функция ψ^{ext} обязана удовлетворять уравнению

$$\nabla \cdot \frac{\nabla \psi^{ext}}{r^2} = 0, \quad (1.82)$$

которое следует из (1.4) в проекции на тороидальное направление и (1.14). В общем случае, область применимости (1.73) вне S_{pl} зависит от расположения внешних проводников. Тем не менее, в обычной ситуации, когда ближайшим к S_{pl} токонесущим элементом является стенка вакуумной камеры S_w , а катушки полоидального поля находятся на некотором удалении от плазмы, аппроксимацию (1.73) можно продолжить вплоть до S_w . Математически это опирается на

тот факт, что решение уравнения (1.82) с заданными граничными условиями единственно. Поэтому совпадение двух решений внутри S_{pl} означает, что они должны быть одинаковы всюду. Следует только помнить, что (1.73) представляет собой три первых члена ряда Фурье. Точность этого разложения уменьшается при удалении от оси в область, где вклад от более высоких гармоник $\sim l^m \cos m\alpha$ возрастает. С этими оговорками можно рассматривать (1.73) как приближенное описание внешнего магнитного поля внутри вакуумной камеры.

Тогда с помощью (1.14) и явного выражения для функции ψ^{ext} можно вычислить полоидальное магнитное поле, создаваемое всеми токами, внешними по отношению к плазме:

$$2\pi \mathbf{B}_p^{ext} = \nabla \psi^{ext} \times \nabla \zeta, \quad (1.83)$$

что с подстановкой (1.76) даёт

$$\frac{r}{R_{pl}} \mathbf{B}_p^{ext} = B_{\perp}^K \mathbf{e}_z + B_q \frac{(R_{pl} - r) \mathbf{e}_z - z \mathbf{e}_r}{b}. \quad (1.84)$$

Здесь первое слагаемое определяет амплитуду вертикального поля, необходимого для удержания плазмы по большому радиусу. Сравнение (1.69) с (1.71) показывает его отличие от классического значения $B_{\perp}^{eq}$, с которым $B_{\perp}^K$ ожидается совпадает при $K_b = 1$. Второе слагаемое соответствует квадрупольному магнитному полю, необходимому для вытягивания сечения плазмы, а введённая (1.80) константа B_q даёт величину этого поля на расстоянии b от центра S_{pl} .

По определению $\mathbf{B}_p^{ext}$ описывает внешнее поле, необходимое для удержания плазмы в равновесии при заданных R_{pl} и K_b . Равенства (1.78) и (1.79) связывают их с $B_{\perp}^K$ и B_q , которые зависят от параметров плазмы через (1.69) и (1.80). Последнее при подстановке (1.62) даёт

$$B_q = B_J \frac{2}{(K_b + 1)^2} \left(d_b + \frac{K_b^2 - 1}{K_b^2 + 1} \right). \quad (1.85)$$

При однородной плотности тока в плазме, когда $d_b = 0$, это совпадает с результатом (44) в [84], (3.9) в [85], и (25) при $j_b = 0$ в [100]. Тогда при $K_b = 1.7$ из (1.85) получим $B_q = 0.1334 B_J$, а при $K_b = 2.2$ будет $B_q = 0.1284 B_J$. Это иллюстрирует слабую зависимость $B_q(K_b)$ в окрестности среднего для токамаков значения

$K_b = 1.9$, см. Табл. 1. Следовательно, даже небольшие колебания d_b могут сильнее повлиять на приращение δB_q , которое при заданном B_q^{ec} может быть создано только токами в стенке. Если же они недостаточны для поддержания B_q на уровне (1.85), то равновесие плазмы в заданном положении будет нарушено. На практике именно так и происходит при срывах, когда при изменении внутренних параметров плазмы начинается её вертикальное движение к стенке или VDE. Переход к VDE и сопутствующие явления при упомянутой слабой зависимости $B_q(K_b)$ должны наблюдаться и при TQ, как показывают расчёты с помощью кода DINA для токамаков ИТЭР [62], TPT [63] и T-15МД [154]. Возрастание K_b после TQ и потеря равновесия по вертикали указывают на необходимость учета d_b в (1.85) и его изменения при $\delta J = 0$.

1.6. Выводы главы 1

В первой главе предложен метод аналитического решения внешней задачи равновесия в токамаке с плазмой эллиптического сечения. Построения выполнены по схеме, ранее развитой для круглой плазмы [119, 120], но теперь допускаются конечные значения вытянутости её границы $K_b \geq 1$, типичные для большинства действующих и планирующихся токамаков, см. список в Табл. 1.

Получение аналитических выражений для $\mathbf{B}^{pl}$ вне плазмы всегда было сопряжено с большими трудностями [82, 84, 91, 93, 100, 140], даже если её сечение было круглым. Использование в качестве основы строгого электромагнитного равенства (1.16) со стандартной функцией Грина (1.18) сводит задачу к вычислению контурного интеграла. Равенство (1.60) подсказывает удобную параметризацию $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl}$, которой (с удержанием большего числа гармоник) можно пользоваться при любой форме плазмы. Для завершения вычислений остаётся преобразовать G к подобному виду. Эта довольно сложная математическая задача разрешается здесь с помощью перехода к конформным переменным (a, θ) , в которых вытянутость K координатных поверхностей $a = \text{const}$ подчиняется условию (1.56).

Итоговые выражения (1.65) и (1.73) связывают измеряемые магнитные величины с характеристиками плазмы. Обе функции ψ^{pl} и ψ^{ext} определяются

одним и тем же интегралом в (1.16), поэтому измерения полоидального магнитного поля в вакуумном зазоре плазма-стенка могут дать лишь те плазменные параметры, которыми задаётся $\mathbf{B}$ на S_{pl} . В нашем случае это входящие в (1.60) константы Λ и Λ_2 и, разумеется, полный ток J . Столь малый объём информации объясняется тем, что $\mathbf{B}^{pl}$ – интегральная величина, см. (7). Еще одна область, где потребуются приведенные соотношения для ψ^{pl} и ψ^{ext} , это анализ быстрых переходных процессов, при которых наводятся значительные токи в стенке вакуумной камеры. Начиная с [82], стандартная теория равновесия была нацелена на предсказание горизонтального смещения плазмы. Учёт второй гармоники в ψ^{pl} и ψ^{ext} открывает возможность анализа вертикального движения плазмы (VDE) в более реалистичной постановке, нежели в моделях с заменой плазмы тонким жестким проводником [39, 67–70] или цилиндром [55, 74–78, 98–102].

2. Магнитное поле вне вытянутой тороидальной плазмы с учётом динамической реакции резистивной стенки вакуумной камеры

В предыдущей главе были получены выражения (1.65) и (1.73), описывающие распределение ψ^{pl} и ψ^{ext} вне вытянутой тороидальной плазмы. В стандартном случае, когда ближайшим к плазме токонесущим элементом является стенка вакуумной камеры, эти результаты представляют аппроксимацию функции магнитного потока в пространстве между плазмой и стенкой. При переходных процессах величина этого промежутка меняется в связи с эволюцией равновесия плазмы по большому радиусу или её уходом по вертикали (VDE), поэтому возникает вопрос о возможности использования (1.65), (1.73) в таких сценариях.

Напомним, что исходной точкой при выводе (1.65), (1.73) было общее электромагнитное равенство (1.16), полученное в [119, 120, 123–125] с использованием только аксиальной симметрии системы и граничного условия (1.8). Здесь единственными допущениями на пути к (1.65), (1.73) были большое аспектное отношение $R_{pl}/b \geq 1$ и заданная эллиптическая форма границы плазмы (1.1). Её положение при этом никак не конкретизировалось, а интеграл в (1.16) вычислялся при помощи координат, связанных с S_{pl} . Таким образом, при смещении S_{pl} относительно центра вакуумной камеры решения (1.65), (1.73) остаются справедливы и дают распределение ψ^{pl} и ψ^{ext} в собственной системе отсчёта плазмы. Главное, чтобы сохранялся общий баланс сил на плазму (2), исключаяющий нормальную компоненту $\mathbf{B}$ на S_{pl} .

Возможность использования (2) и его следствий в нестационарных задачах обеспечивается динамической реакцией стенки, препятствующей инерционному движению плазмы. Её скорость $\mathbf{v}$ в таком случае должна быть найдена как результат относительно медленной эволюции с учётом токов, наводимых в металлическом окружении из-за $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ и дающих вклад ψ^w в (1.81). Функция ψ^w становится при этом главной неизвестной, которую нужно найти для замыкания динамической задачи равновесия с диссипацией энергии в резистивной стенке. Целью данной главы является разрешение этой проблемы с

абсолютной математической строгостью, но так, чтобы допускалось достаточно простое расширение существующей теории равновесия в новую область. Для этого мы выясняем, какие минимальные дополнения требуются к схеме с равенством (1.16) для покрытия эволюции плазмы, и показываем, что ещё нужно добавить к (1.65), (1.73) для вычисления ψ^w . На пути к этому рассматривается цилиндрический подход [97], ранее применявшийся в задачах с резистивной стенкой [55, 75, 76, 78], и устанавливаются пределы его применимости с конкретными предложениями по модификации прямой модели [97] для динамических задач. В конечном итоге мы вычисляем ψ^w в явной форме, учитывая тороидальность и вытянутость сечения камеры, а также горизонтальное и вертикальное смещения плазменного шнура относительно её центра.

2.1. Основные уравнения

Для рассмотрения эволюции плазмы с помощью стандартных методов теории равновесия уравнение (2) необходимо дополнить описанием электромагнитной реакции стенки на вызываемое плазмой магнитное возмущение $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$. Возбуждаемые при этом токи дают вклад $\mathbf{B}^w$ в полное поле $\mathbf{B}$ и стремятся обеспечить равенство в (2) даже в случае, когда статическое равновесие потеряно и имеется ненулевая скорость плазмы $\mathbf{v} \neq 0$.

Надёжность использования уравнения силового баланса (2) и его следствий при моделировании переходных процессов подтверждается численными расчётами сил на вакуумную камеру [47, 49, 50, 54, 62, 63, 112, 115, 117, 154]. Это побуждает к дальнейшему расширению теории равновесия, но обнаруживается либо её неполнота при $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ и наличии резистивной стенки, либо недостаточность отдельных результатов для покрытия динамических задач. Так, например, в работе [120] было установлено, что полученное В. Д. Шафрановым в [82] и приводимое в известных обзорах [84, 85] уравнение для эволюции тороидального смещения плазмы Δ_b , учитывающее эффект конечной проводимости стенки, применимо лишь при неизменном токе плазмы J . При этом ограничение $dJ/dt = 0$, существенно повлиявшее на результаты в работах [82, 84, 85], там явно не упоминалось.

Уравнение, пригодное для описания $\Delta_b(t)$ в сценариях с $dJ/dt \neq 0$, включая срывы тока (CQ), было получено в [120]. Подобное расширение стало возможным благодаря предложенному в [120] общему подходу к описанию эволюции равновесия плазмы в токамаке с резистивной стенкой и разбиению задачи на два связанных блока. Первый — это, собственно, решение внешней задачи равновесия с помощью метода функции Грина, когда выражения для ψ^{pl} и ψ^{ext} получаются путём редукции математически точного равенства (1.16) в нужной геометрии, см. главу 1. Второй блок — это вычисление поля $\mathbf{B}^w$ путём прямого интегрирования уравнений Максвелла и закона Ома в стенке. Полученное таким образом $\mathbf{B}^w$ должно быть приравнено к найденному из задачи равновесия

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{B}^{ext} - \mathbf{B}^{ec} \quad (2.1)$$

для согласования чисто электромагнитных расчётов $\mathbf{B}^w$ с граничным условием (1.8) на поверхности S_{pl} . Пошаговая реализация описанного алгоритма представлена в [119, 120] с приложениями к стандартной в теории равновесия круглой тороидальной плазмы. Здесь мы развиваем подход [119, 120] к анализу некруглой конфигурации, включая в рассмотрение также вертикальное смещение плазменного шнура $\xi(t)$.

Разделение $\mathbf{B}$ на $\mathbf{B}^{pl}$ и $\mathbf{B}^{ext}$ с помощью общего равенства (1.10), служащего математическим выражением «принципа виртуального кожуха», позволяет выразить $\mathbf{B}^w$ при заданном внешнем поле $\mathbf{B}^{ec}$, см. (2.1). В такой процедуре форма границы плазмы S_{pl} должна быть предписана, однако она является подвижной и деформируемой. Поэтому её положение и форма обязаны эволюционировать совместно с динамически изменяющимся полем $\mathbf{B}^w$, которое даётся интегралом по объёму стенки в (1.7), где ток подчиняется закону Ома

$$\mathbf{j}^w = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Здесь σ — проводимость стенки, которую в дальнейшем будем считать постоянной, а электрическое поле $\mathbf{E}$ описывается законом индукции Фарадея

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

При аксиальной симметрии электромагнитные уравнения для $(\mathbf{j}_p, B_\zeta, \mathbf{E}_p)$ и $(j_\zeta, \mathbf{B}_p, E_\zeta)$, где индексы p и ζ означают, соответственно, полоидальную и

тороидальную компоненту, становятся расцепленными. Описание $\mathbf{j}_p^w$ и полного полоидального тока I_w в стенке ранее приводилось с привязкой к расчётам действующих на неё сил [47, 154, 155] и проблеме диамагнитной диагностики в переходных процессах [126, 156]. Здесь нас интересует тороидальный ток j_ζ^w как источник полоидального потока ψ^w , входящего в (1.81) и содержащего эффект от резистивной стенки в задаче равновесия.

Из (1.14) и (2.3) следует, что

$$E_\zeta = -\frac{\dot{\psi}}{2\pi r}, \quad (2.4)$$

где точка означает частную производную по времени $\partial/\partial t$. В этом равенстве, необходимом для вычисления

$$j_\zeta^w = \sigma E_\zeta, \quad (2.5)$$

фигурирует суммарный магнитный поток (1.17), включающий вклад от плазмы, внешних полоидальных витков, центрального соленоида (индуктора) и самой стенки. Основное уравнение для наводимого в ней тока

$$j_\zeta^w = -\sigma \left. \frac{\dot{\psi}}{2\pi r} \right|_w \quad (2.6)$$

получается комбинацией (2.4) и (2.5), а индекс w справа подразумевает, что функция ψ берётся в металлическом объёме вакуумной камеры.

Равенство (2.6) показывает, что при описании реакции стенки на какое-либо возмущение требуется знание полного ψ , а не только $\nabla\psi$, определяющего $\mathbf{B}$. Это означает некоторую неполноту результатов (1.65) и (1.73), поскольку при их подстановке в (2.6) возникает ненулевой вклад от константы интегрирования ψ_b . Она присутствует в (1.73) как свободный параметр, соответствующий значению ψ на границе плазмы S_{pl} , но его конкретная величина в главе 1 не обсуждалась. Поскольку константа выпадает из $\nabla\psi$ и не влияет на $\mathbf{B}$, обычно ей либо пренебрегают, либо предписывают какое-то определённое значение. Так делается во многих исследованиях на основе прямой модели Гаевского [97], например, в расчётах формы магнитной сепаратрисы [97], при оценке числа возможных состояний равновесия с заданным удерживающим внешним полем [98, 99] и при определении его критической величины [85], выше которой равновесие плазмы невозможно при заданной силе тока; при исследовании

возможности стабилизации осесимметричной моды внешними токами [101], нахождении X-точки сепаратрисы [102] и анализе её влияния на инкремент VDE в системе с идеальной [74, 77] и резистивной [55, 76, 78] стенками. При этом выясняется, что все перечисленные задачи относятся к классу магнитостатических с фиксированным током плазмы $J = \text{const}$. Возникает вопрос о применимости предлагавшихся в [55, 74–77, 85, 97–102] выражений для ψ и значений константы ψ_b в динамических задачах с $dJ/dt \neq 0$. Его разрешение и нахождение недостающих связей — главные цели дальнейшего рассмотрения.

2.2. Решение внешней задачи равновесия цилиндрической плазмы и выбор константы ψ_b

Чтобы ответить на вопрос о пригодности результатов прямой модели с конкретным выбором ψ_b в задачах эволюции равновесия, нужно углубиться в математические операции, приводящие к ψ в [55, 74–77, 85, 97–102]. Для этого мы начинаем со стандартной постановки внешней задачи равновесия плазмы, затем производится её редукция в цилиндрическом приближении и описывается аналитическое решение для плазмы с эллиптическим сечением, предложенное в 1972 году Р. Гаевским [97]. Далее мы обсуждаем проблему выбора ψ_b в известных построениях с прямой моделью и приводим сравнение с оценкой ψ_b в модели кольцевого тока, дающей простейшее приближение собственного поля тороидальной плазмы токамака.

С математической точки зрения нахождение магнитного поля при заданном токе принадлежит к классу краевых задач для уравнения Пуассона (1.5). Оно описывает распределение вектор-потенциала $\mathbf{A}$ в пространстве, если поставлены условия, обеспечивающие сшивку внутренних и внешних решений на границе токонесущей области. Здесь нас интересует полоидальный поток ψ , связанный с тороидальной компонентой $\mathbf{A}$ равенством (1.15). Его подстановка в (1.5) в проекции на $\mathbf{e}_\zeta = r\nabla\zeta$ приводит к уравнению

$$\Delta^*\psi = -2\pi\mu_0 r j_\zeta \quad (2.7)$$

с эллиптическим оператором второго порядка (Грэда-Шафранова)

$$\Delta^* \equiv r^2 \nabla \cdot \frac{\nabla}{r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.8)$$

Это уравнение следует дополнить граничными условиями

$$\psi|_{in} = \psi|_{out} = \psi_b(t) \quad (2.9)$$

и

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{in} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{out} \quad (2.10)$$

на поверхности плазмы S_{pl} , где индексы *in* и *out* обозначают области внутри и вне её. Здесь первое означает постоянство ψ на S_{pl} , которого требует (1.8), а непрерывность $\psi(\mathbf{r})$ естественно следует из определения (1.15). Второе условие даёт сшивку нормальных производных $\partial\psi/\partial n \equiv \mathbf{n}_{pl} \cdot \nabla\psi$, что равносильно непрерывности тангенциальной компоненты $\mathbf{B}$ на S_{pl} или отсутствию на S_{pl} поверхностного тока.

Для полноты укажем, что уравнение равновесия (2) устанавливает дополнительную связь между полоидальным потоком и током плазмы

$$j_\zeta = 2\pi r p'(\psi) + \frac{\mu_0}{2\pi r} I(\psi) I'(\psi), \quad (2.11)$$

где $p = p(\psi)$ — давление, $I = I(\psi)$ — полоидальный ток, а штрих означает производную по ψ . Подстановка этого равенства превращает (2.7) в известное уравнение Грэда-Шафранова, которое при заданной форме границы и двух функциях $p(\psi)$ и $I(\psi)$ полностью определяет магнитную конфигурацию как внутри S_{pl} , так и снаружи.

Предметом внешней задачи равновесия является выражение для ψ вне плазмы, удовлетворяющее (2.7) с $j_\zeta = 0$ и условиями (2.9), (2.10) на S_{pl} . Если в уравнении (2.7) полностью пренебречь слагаемыми, связанными с тороидальностью, то в области, включающей плазму и вакуумный зазор, оно превращается в уравнение Пуассона

$$\Delta_\perp \psi = - \begin{cases} 2\pi\mu_0 R_{pl} j_\zeta, & \text{внутри } S_{pl} \\ 0, & \text{снаружи } S_{pl} \end{cases}, \quad (2.12)$$

в правой части которого r заменено на константу R_{pl} , а

$$\Delta_\perp \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.13)$$

— обычный оператор Лапласа с $x \equiv R_{pl} - r$. То же самое получилось бы для бесконечно длинной (прямой) системы в сочетании с

$$2\pi R_{pl} \mathbf{B} = \nabla \psi \times \mathbf{e}_\zeta + \mu_0 I \nabla \mathbf{e}_\zeta \quad (2.14)$$

с единичным вектором $\mathbf{e}_\zeta$ в направлении теперь уже незамкнутой прямой оси, в которую (а точнее — в её участок длины $2\pi R_{pl}$) должна вырождаться кольцевая ось тороидальной системы при $|x| \ll R_{pl}$. Присутствие R_{pl} позволяет считать ψ в (2.14) точным «квазицилиндрическим» аналогом ψ , заданного равенством (1.14) для тороидальной системы.

Цилиндрическое уравнение (2.12) было исходным в задачах, рассмотренных в [55, 74–78, 85, 97–102]. Здесь оно записано в системе СИ, как в [101]; в [55, 74, 76–78, 98] оно приводится в безразмерном виде, а в [85, 97, 99, 100] даётся в гауссовых единицах, причём в [97, 100, 102] использовалось обозначение для тока $j = -j_\zeta$.

Уравнение (2.12) с условиями (2.9) и (2.10) на эллиптической границе S_{pl} удобно решать в эллиптических координатах (μ, θ) , связанных с $r = R_{pl} - x$ и z в (1.1) равенствами

$$x = c_b \operatorname{sh} \mu \cos \theta, \quad (2.15)$$

$$z = c_b \operatorname{ch} \mu \sin \theta. \quad (2.16)$$

В этих переменных с $\mu = \mu_b$ на S_{pl} величина

$$c_b = \frac{b}{\operatorname{sh} \mu_b} = b \sqrt{K_b^2 - 1} \quad (2.17)$$

соответствует фокальному расстоянию этого эллипса с малой полуосью

$$b \equiv c_b \operatorname{sh} \mu_b \quad (2.18)$$

и вытянутостью

$$K_b \equiv \operatorname{cth} \mu_b. \quad (2.19)$$

Эллиптические координаты уже использовались в первой главе при преобразованиях функции Грина, см. (1.46), (1.47) с дополнительной связью (1.56). Они появлялись и в [55, 74–78, 85, 97–102] с той только разницей, что в [74, 97, 99, 101, 102] угловой координате θ в (2.15) и (2.16) соответствует $\pi/2 - \theta$ (плазма растянута по горизонтали). Их важным свойством является ортогональность

$\nabla\mu \cdot \nabla\theta = 0$, позволяющая разделить переменные и искать внешнее решение задачи в виде

$$\psi_{out} = \psi_b + A_0(\mu - \mu_b) + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \operatorname{sh} n(\mu - \mu_b) + B_n(\operatorname{ch} n\mu - \operatorname{ch} n\mu_b)] \cos n\theta. \quad (2.20)$$

Коэффициенты A_0 , A_n и B_n должны определяться из условий (2.9) и (2.10) сшивки ψ_{out} с решением ψ_{in} во внутренней области $\mu < \mu_b$.

Последнее зависит от распределения тока j_ζ по сечению плазмы, которое в общем случае неизвестно, и оказывается очень сложным [100] даже с $j_\zeta = A\psi + B$, где A и B — некоторые постоянные. Начиная с [97] и далее в [55, 74–78, 85, 98, 99, 101, 102] рассматривался только простейший случай с однородной плотностью тока $j_\zeta = \operatorname{const}$, когда внутреннее решение, удовлетворяющее (2.12) и (2.9), имеет вид

$$\psi_{in} = \psi_b + \psi_s \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{K_b^2 b^2} - 1 \right), \quad (2.21)$$

где

$$\psi_s = -\mu_0 J R_{pl} \frac{K_b}{K_b^2 + 1} \quad (2.22)$$

— полоидальный поток между магнитной осью и границей плазмы, а $J = \pi K_b b^2 j_\zeta$ — полный продольный ток. Это решение задаёт семейство подобных вложенных эллипсов $\psi_{in} = \operatorname{const}$ внутри плазмы.

Константа интегрирования ψ_b в (2.21) задавалась как $\psi_b = \psi_s$ в [55, 74–77, 97, 98, 101, 102], чтобы сделать $\psi_{in} = 0$ в центре плазмы, а в [99] было принято $\psi_b = 0$. В [85] формула (3.5) соответствует выбору $\psi_b = 0$ в первой строке и $\psi_b = \psi_s$ во второй:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{in}}{2\pi R_{pl}} \equiv A_{in} &= -\frac{4\pi}{c} j_\zeta \frac{c_b^2}{8} \left[\operatorname{ch} 2\mu - \operatorname{ch} 2\mu_b - \cos 2\theta + \frac{\operatorname{ch} 2\mu}{\operatorname{ch} 2\mu_b} \cos 2\theta \right] = \\ &= -\frac{4\pi}{c} j_\zeta \frac{K_b^2 b^2}{2(K_b^2 + 1)} \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{K_b^2 b^2} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

В этой формуле, буквально перенесённой из [85], оба выражения верно дают зависящую от x и z часть продольной компоненты вектор-потенциала A_{in} внутри плазмы, но последний знак равенства является ошибкой, оставшейся там незамеченной. Легко увидеть, что первая часть (2.23) даёт $A_{in} = 0$ на границе, в то время как вторая — конечную величину.

При сшивке ψ_{out} в виде (2.20) с ψ_{in} в виде (2.21) для случая с $j_\zeta = \text{const}$ и условиями (2.9) и (2.10) получается

$$\psi_{out} = \psi_b - \psi_J \left[\mu - \mu_b + \frac{\epsilon_b}{2} \text{sh } 2(\mu - \mu_b) \cos 2\theta \right], \quad (2.24)$$

где

$$\psi_J \equiv \mu_0 J R_{pl}, \quad (2.25)$$

а

$$\epsilon_b \equiv \frac{1}{\text{ch } 2\mu_b} = \frac{K_b^2 - 1}{K_b^2 + 1} \quad (2.26)$$

— так называемая «эллиптичность» границы (в терминах [97]). Входящая сюда постоянная ψ_b , в принципе, может быть выбрана произвольно, так как при подстановке $\mu = \mu_b$ в (2.24) мы получаем только $\psi_{out} = \psi_b$ на границе.

Выражение (2.24) фактически даёт лишь разность $\psi - \psi_b$ с неопределённой константой интегрирования ψ_b , но этот факт в [55, 74, 76, 77, 85, 97–102] не отмечался. Напротив, там производилась замена ψ_b , как если бы она была известной. С точностью до единиц измерения имеющиеся цилиндрические решения задачи равновесия, обсуждавшиеся в [55, 74–77, 85, 97–99, 101, 102], покрываются (2.24). Достаточно сказать, что при $\psi_b = 0$ выражение (2.24) совпадает с (6) в [99] и с (3.6) в [85]. При $\psi_b = \psi_s$ с ψ_s , заданным (2.22), оно воспроизводит равенства (2) в [55], (8) в [74], (3.4) в [76], (22) в [77], (33) в [97], (12) в [98] и (5) в [101].

Для удобства все перечисленные выше варианты (2.24) собраны в Табл. 2. Главным в них является конкретное задание ψ_b , маскирующее тот факт, что реально в этих построениях ψ_b неизвестна. Но даже если не знать об этом, то при обращении к уравнению (2.6) указанных отличий в величине ψ_b достаточно для постановки вопроса о выборе верного решения. Поэтому прежде, чем пользоваться конкретным вариантом ψ_b в задачах для токамаков, необходимо выяснить, насколько серьёзным является различие. Ясно, что верное решение внешней задачи равновесия плазмы с эллиптической границей должно включать в себя результаты, полученные для более простых моделей кольца с током и тороидальной плазмы круглого сечения. Для сравнения с ними обратимся к частному следствию (2.24) в простейшем случае прямого плазменного шнура, когда $K_b = 1$.

Из (2.19) следует, что эллиптическое сечение S_{pl} переходит в круглое при

Публикации	Единицы	Ток	Обозначение координат	Угол	Константа ψ_b/ψ_s
R. Gajewski, 1972 Phys. Fluids 15 , 70	СГС	—	(μ, θ)	$\pi/2 - \theta$	1
H.R. Strauss, 1974 Phys. Fluids 17 , 1040	б/р	+	(μ, θ)	—	1
J.C.B. Papaloizou et al, 1977 Nucl. Fusion 17 , 33	СГС	+	(u, ν)	$\pi/2 - \theta$	0
J.P. Goedbloed, L.E. Zakharov, 1980 Nucl. Fusion 20 , 1515	СГС	—	(u, ν)	—	0
Л.Е. Захаров, В.Д. Шафранов, 1982 Вопросы теории плазмы, Т. 11	СГС	+	(u, ν)	—	0/1
R. Coelho, F. Porcelli, 2003 Phys. Plasmas 10 , 930	СИ	+	(μ, θ)	$\pi/2 - \theta$	1
F. Porcelli, A. Yobarsop, 2019 Phys. Plasmas 26 , 054501	СГС	—	(μ, ϑ)	$\pi/2 - \theta$	1
F. Porcelli et al, 2021 J. Phys.: Conf. Ser 1785 , 012004	б/р	+	(μ, θ)	$\pi/2 - \theta$	1
A. Yobarsop et al, 2022 PPCF 64 , 105002; T. Barberis et al, 2022 J. Plasma Phys. 88 , 905880511; D. Banerjee et al, 2024 Phys. Plasmas 31 , 023904	б/р	+	(μ, θ)	—	1

Таблица 2. Каталог различных версий решения (2.24). В столбце «Единицы» сокращение «б/р» означает *безразмерные*. В столбце «Ток» знак плюс соответствует положительному выбору направления тока $j_\zeta > 0$ (вдоль продольной координаты ζ), а минус — отрицательному $j_\zeta < 0$. Прочерк в столбце «Угол» отвечает параметризации, заданной (2.15) и (2.16).

$\mu_b \rightarrow \infty$. Физическая величина ψ_{out} не должна содержать особенностей, поэтому в этом пределе разность $\mu - \mu_b$ в (2.24) обязана оставаться конечной, что нетрудно показать с помощью следующих соотношений.

В координатах (2.15) и (2.16) линии $\mu = \text{const}$ образуют семейство конфо-

кальных эллипсов

$$x^2 + z^2 \left(\frac{\text{sh } \mu}{\text{ch } \mu} \right)^2 = b^2 \left(\frac{\text{sh } \mu}{\text{sh } \mu_b} \right)^2. \quad (2.27)$$

Согласно тождествам

$$\frac{\text{sh } \mu}{\text{ch } \mu} = \frac{1 - e^{-2\mu}}{1 + e^{-2\mu}} = 1 - \frac{2e^{-2\mu}}{1 + e^{-2\mu}} \quad (2.28)$$

и

$$\frac{\text{sh } \mu}{\text{sh } \mu_b} = e^{\mu - \mu_b} \frac{1 - e^{-2\mu}}{1 - e^{-2\mu_b}}, \quad (2.29)$$

уравнение (2.27) при больших μ и μ_b даёт длину радиуса

$$l = \sqrt{x^2 + z^2} = b e^{\mu - \mu_b} \quad (2.30)$$

в полярных координатах $x = l \cos \alpha$, $z = l \sin \alpha$, см. Рис. 3. Угол α связан с полоидальным параметром θ равенством

$$\text{tg } \alpha = \text{cth } \mu \text{tg } \theta \quad (2.31)$$

и совпадает с ним при больших μ . Тогда граница плазмы $\mu = \mu_b$ отображается в окружность радиуса b , а при $K_b \rightarrow 1$ разность

$$\mu - \mu_b = \ln \frac{l}{b} \quad (2.32)$$

оказывается конечной. Другая конечная величина $\text{sh } 2(\mu - \mu_b)$ в (2.24) умножается на $\epsilon_b \rightarrow 0$ при $K_b \rightarrow 1$, см. (2.26). В этом пределе слагаемое с $\cos 2\theta$ исчезает, и (2.24) для круглой плазмы принимает простой вид

$$\psi_{out} = \psi_b + \psi_J \ln \frac{b}{l}. \quad (2.33)$$

Подстановка этого выражения в (2.14) даёт магнитное поле прямого провода с током:

$$B_\alpha = \frac{\mu_0 J}{2\pi l}. \quad (2.34)$$

Это ожидаемый результат, подтверждающий, что зависящая от координат часть ψ верно воспроизводится формулой (2.24).

Чтобы понять роль ψ_b , которая в (2.24) присутствует как неизвестная константа, сравним (2.33) с выражением

$$\psi_{rc} = 2\pi r A_\zeta = 2\pi \mu_0 J G(r, z; R, 0), \quad (2.35)$$

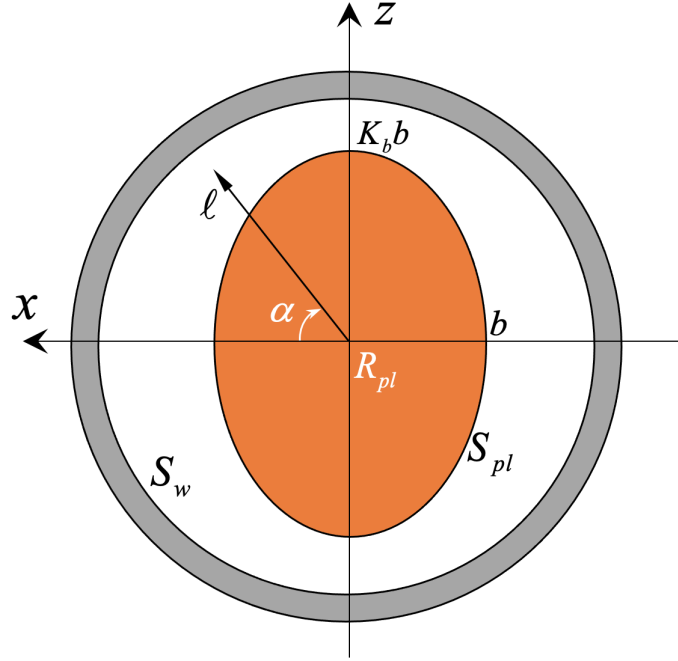


Рис. 3. Полярные координаты (l, α) в сечении плазменного шнура. Здесь R_{pl} — большой радиус плазмы (смещение не показано), b и $K_b b$ — полуширина и полувысота её границы S_{pl} , а S_w — внутренняя сторона стенки.

описывающим магнитное поле кольца с током J , лежащим в плоскости $z = 0$, где R — его радиус,

$$G(r, z; r_v, z_v) = \frac{\sqrt{rr_v}}{\pi k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] \quad (2.36)$$

— функция Грина для осесимметричной токовой нити (1.18), выраженная через полные эллиптические интегралы первого и второго рода $K(k)$ и $E(k)$, соответственно, а

$$k^2 = \frac{4rr_v}{(r + r_v)^2 + (z - z_v)^2}. \quad (2.37)$$

Индекс v у переменной означает, что она «пробегаёт» проводник с током. В данном случае одномерного кольца $r_v = R$, $z_v = 0$.

Это хорошо известное решение можно найти во множестве работ, включая, например, классические учебники электродинамики [143, 144, 157]. Оно также представлено в обзоре [145]. Здесь для описания магнитного поля выбран полоидальный поток (1.15), а не тороидальная компонента вектор-потенциала A_ζ , как в [143–145, 157].

Для сравнения с цилиндрическим решением (2.33) функцию $\psi_{rc}(r, z)$ следует рассматривать в области, где расстояние l от кольцевой оси $r = R$ суще-

ственно меньше большого радиуса R . Тогда величина

$$k'^2 \equiv 1 - k^2 = \frac{(R-r)^2 + z^2}{(R+r)^2 + z^2} \simeq \frac{x^2 + z^2}{4R^2} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \quad (2.38)$$

мала, и можно пользоваться стандартными разложениями эллиптических интегралов [152]

$$K(k') = \ln \frac{4}{k'} + \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) \frac{k'^2}{4} + \dots, \quad (2.39)$$

$$E(k') = 1 + \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) \frac{k'^2}{2} + \dots \quad (2.40)$$

В приближенном равенстве в (2.38) удержаны только линейные по x/R слагаемые. В этом приближении из (2.35) получаем

$$\psi_{rc} = \psi_J \left[\ln \frac{8R}{l} - 2 - \frac{l}{2R} \left(\ln \frac{8R}{l} - 1 \right) \cos \alpha \right]. \quad (2.41)$$

Сравнение последнего с (2.33) показывает, что правильным результатом в простейшей модели кольца с током малого радиуса $b \ll R$ должен быть

$$\psi_b^{rc} = \psi_J \left(\ln \frac{8R}{b} - 2 \right) \quad (2.42)$$

а не $\psi_b = 0$, как в [85, 99, 100], и не $\psi_b = \psi_s$, как в [55, 74–77, 97, 98, 101]. Укажем для полноты, что $\psi_s = -\psi_J/2$ при $K_b = 1$.

Здесь цилиндрическое решение (2.33), кольцевое решение (2.35) и его аппроксимация (2.41) при малых l/R приводились, чтобы выявить проблему выбора ψ_b в (2.24) при подстановке в (2.6) и оценить масштаб этой величины. Мы обнаружили, что использование ψ_b в том виде, в котором она подставлялась в (2.24) в [55, 74–77, 85, 97–102], неизбежно приведёт к ошибке в задачах эволюции с $\dot{\psi}_b \neq 0$. Из (2.42) и определения (2.25) следует, что $\dot{\psi}_b \neq 0$, когда меняется $R_{pl}J$. Это покрывает, в первую очередь, все процессы с изменением тока J , так как диапазон изменения J достигает 100% в CQ.

В рассмотренном примере с кольцевым током не было внешних полей, поэтому формула (2.42) может служить лишь оценкой собственного вклада в ψ_b от тока плазмы при $K_b = 1$. Тем не менее, уже этот пример показывает, что точное определение ψ_b возможно только в тороидальной геометрии.

Для вычисления функции $\psi_b(t)$, которую следовало бы подставлять в (2.6) при $K_b \neq 1$, необходимо учесть не только конечный радиус b плазменного коль-

ца, но и вытянутость его сечения и внешние токи. Частично эта проблема разрешается с помощью уже полученного нами результата (1.65). Как видно из (1.65), часть ψ_b , порождаемая плазмой, даётся (1.66) при $a = b$:

$$\psi_0^{pl}(b) = L_{pl}J, \quad (2.43)$$

где

$$L_{pl} \equiv \mu_0 R_{pl} \left[\ln \frac{16R_{pl}}{b(K_b + 1)} - 2 \right] \quad (2.44)$$

— внешняя индуктивность плазменного шнура. При $K_b = 1$ это равенство сводится к (2.42), являясь его обобщением на случай объёмной тороидальной плазмы с эллиптическим сечением. Казалось бы, для нахождения оставшейся части ψ_b то же самое нужно сделать и с (1.73), но подстановка там $a = b$ возвращает только тривиальное тождество $\psi_0^{ext}(b) = \psi_b - \psi_0^{pl}(b)$. Соответственно, нужно выяснить, какие ещё операции требуются в дополнение к описанной в первой главе схеме с (1.16) для вычисления слагаемого $\psi_0^{ext}(b)$.

2.3. О неопределённости константы ψ_b в рамках «принципа виртуального кожуха»

Левая часть формулы (1.16) подсказывает, что с самого начала вычислений она даёт полное значение ψ^{pl} , но лишь $\psi^{ext} - \psi_b$ для внешнего поля. Этот результат получался и ранее в [119, 120, 123–125, 148, 149], но при этом не ставился вопрос о происхождении константы ψ_b и причинах её неоднозначности в рамках стандартной теории равновесия. Константа ψ_b естественно возникала при переходе от объёмного потенциала (1.6) к потенциалу простого слоя (1.16) на этапе учёта граничного условия (1.8) в [119, 120, 123–125, 148, 149], а все операции с функцией Грина (1.18) производились как с обобщённой функцией. Теперь мы рассматриваем проблему определения ψ_b более подробно и проводим необходимые преобразования с исключением особенностей в подынтегральных выражениях.

С физической точки зрения неопределённость ψ_b является частным проявлением общего принципа: одно и то же магнитное поле (в нашем случае $\mathbf{B}^{ext}$ внутри плазмы) может порождаться разными источниками. Математически это

следует из того, что вектор-потенциал (1.6) магнитного поля токов, текущих в области v , находится как интеграл по всему объёму v . Например, необходимое для удержания плазмы внешнее вертикальное поле может быть создано как токами во внешних обмотках, так и токами в стенке вакуумной камеры, либо комбинацией тех и других. Речь идёт об известных аналитических результатах [82–84], см. также [120, 158] и обзор в [85]. Все они были получены для плазмы круглого сечения. Здесь же ограничений на форму S_{pl} не делается, также нет пока и разделения $\mathbf{B}^{ext}$ на две составляющие.

Использование следствий (1.10), (1.16) уравнений (1.3) и (1.6) не должно затушевывать того факта, что именно интеграл (1.6) содержит необходимую информацию для вычисления поля E_ζ . При подстановке в (1.15) он трансформируется в

$$\psi^v(\mathbf{r}) = 2\pi\mu_0 \int_v G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_v) j_\zeta(\mathbf{r}_v) dr_v dz_v = \mu_0 \int_v \frac{j_\zeta G}{r_v} d\mathbf{r}_v. \quad (2.45)$$

В преобразованиях, ведущих от (1.15) к (2.45) с подстановкой классического выражения (1.6), участвует геометрическое соотношение

$$\mathbf{e}_\zeta = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \zeta} = \mathbf{e}_{\zeta_v} \cos(\zeta - \zeta_v) + \mathbf{e}_{r_v} \sin(\zeta - \zeta_v), \quad (2.46)$$

где $\mathbf{e}_v$ — единичные векторы, см. Рис. 4.

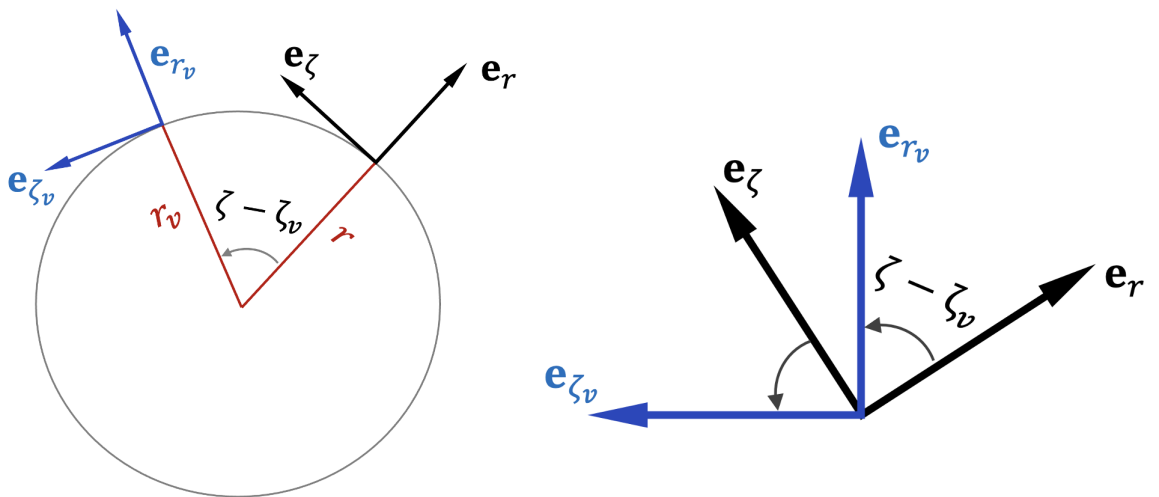


Рис. 4. Два набора базисных векторов в цилиндрических координатах: $\mathbf{e}_r$ — единичный радиальный вектор, а $\mathbf{e}_\zeta$ — единичный тороидальный. Индекс i обозначает переменные, по которым проводится интегрирование, а $\zeta - \zeta_i$ — угол между соответствующими.

Результат (2.45) является точным следствием (1.6) и (1.15) и выражает полоидальный поток ψ^v через плотность тороидального тока j_ζ , протекающего в v . Для входящей в крайний правый интеграл в (2.45) комбинации с учётом равенства (2.7) получим

$$\frac{2\pi\mu_0}{r}j_\zeta G = \nabla \cdot \left(\psi \frac{\nabla G}{r^2} - G \frac{\nabla \psi}{r^2} \right) - \frac{\psi}{r^2} \Delta^* G \quad (2.47)$$

всюду, где G является гармонической функцией без особенностей. В общем случае её следует понимать в смысле обобщённой функции с сингулярностью

$$\Delta^* G = -r\delta(r - r_v)\delta(z - z_v), \quad (2.48)$$

что следует из определения (1.18) и

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_v|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_v), \quad (2.49)$$

где δ — дельта-функция Дирака. В области каждого из проводников v оператор $\nabla \cdot (\nabla/r^2)$ сохраняет лишь собственную функцию ψ^v , но присутствие полного потока $\psi = \psi^{pl} + \psi^{ec} + \psi^w$ в (2.7) и (2.47) удобно при учёте граничного условия $\psi = \psi_b$ на S_{pl} .

Вне области v , то есть при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_v$, последнее слагаемое в (2.47) равно нулю. Тогда (2.45) превращается в

$$\psi^v = \oint_{\partial v} \frac{\psi \nabla_v G - G \nabla_v \psi}{2\pi r_v^2} \cdot d\mathbf{S}_v, \quad (2.50)$$

где $d\mathbf{S}_v$ — внешне ориентированный элемент границы ∂v замкнутой тороидальной области v . Здесь и далее дифференцирование под знаком интеграла происходит по переменной $\mathbf{r}_v$, что отмечено индексом v у оператора ∇_v .

Если этот интеграл берётся по границе плазмы $\partial v = S_{pl}$, то для нахождения ψ^{pl} вне плазмы мы должны учесть условие (2.9) на S_{pl} . Тогда из двух слагаемых в (2.50) в силу (2.48) останется одно, потому что

$$\oint_{pl} \psi \frac{\nabla_{pl} G}{r_{pl}^2} \cdot d\mathbf{S}_{pl} = \psi_b \int_{pl} \nabla_{pl} \cdot \frac{\nabla_{pl} G}{r_{pl}^2} \Big|_{\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_{pl}} d\mathbf{r}_{pl} = 0. \quad (2.51)$$

Окончательно (2.50) сводится к

$$\psi^{pl} = - \oint_{pl} G \frac{\mathbf{n}_{pl} \cdot \nabla_{pl} \psi}{r_v} d\ell_{pl} = 2\pi \oint_{pl} G \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl}, \quad (2.52)$$

где учтено, что $\mathbf{n}_{pl} \cdot \nabla \psi = -2\pi r \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl}/d\ell_{pl}$. Напомним, что равенство (2.52) справедливо лишь для $\mathbf{r}$ вне плазмы. Оно получено тождественным преобразованием (2.45) с учётом (2.9) и (2.48) и потому определяет функцию ψ^{pl} полностью.

Интеграл, подобный (2.52), возникнет и при вычислении ψ^{ext} , но он будет не единственным в итоговом выражении. Это связано с тем, что стенка, токи в которой вносят вклад в ψ^{ext} , является полым тором, а в нашей задаче требуется вычислить ψ^w именно в его полости. То же самое справедливо и для токов в полоидальных обмотках. В этих двух случаях при нахождении ψ^w и ψ^{ec} по формуле (2.50) приходится вводить две тороидальные оболочки — внутреннюю S_{in} и внешнюю S_{out} , так что пространство между ними охватывает все источники потока ψ^{ext} . Тогда при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_v$, т.е. при $\mathbf{r}$ либо внутри тора S_{in} , либо за пределами S_{out} , из (2.50) получим

$$\psi^{ext} = - \oint_{in} \frac{[\psi, G]}{2\pi r_v^2} \cdot d\mathbf{S}_{in} + I_{out}, \quad (2.53)$$

где

$$[\alpha, \beta] \equiv \alpha(\mathbf{r}_\nu) \nabla_\nu \beta(\mathbf{r}) - \beta(\mathbf{r}) \nabla_\nu \alpha(\mathbf{r}_\nu) \quad (2.54)$$

— функция трёх переменных $\mathbf{r}_\nu$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_v$ (последняя не показана), а I_{out} — такой же интеграл по внешней поверхности S_{out} . Появление знака минус в (2.53) объясняется тем, что $d\mathbf{S}_{in}$ направлено вне тора S_{in} , а индекс ν нумерует токонесущий элемент.

Значение I_{out} не зависит от размеров S_{out} , потому что эта поверхность охватывает рассматриваемые токи снаружи. Её можно трансформировать в сферу, как показано на Рис. 5, и перейти затем к пределу $|\mathbf{r}_v| \rightarrow \infty$. Тогда нетрудно показать, что $I_{out} = 0$. Действительно, на большом расстоянии от токонесущих элементов (плазма, стенка, полоидальные катушки) их можно рассматривать как тонкие кольцевые проводники или магнитные диполи. Поэтому магнитный поток, создаваемый каждой из подсистем вдали от плазмы, можно описать приближенным выражением

$$\psi^\nu(\mathbf{r}) \approx L_\nu J_\nu, \quad (2.55)$$

где функция $L_\nu \equiv 2\pi\mu_0 G(\mathbf{r}_\nu; \mathbf{r})$ имеет размерность индуктивности, а $\mathbf{r}_\nu$ — радиус-вектор проводника ν . Тогда под интегралом в I_{out} возникнет комбинация

$[G, G]$. Отметим, что (2.55) совпадает с (2.42) и является прямым следствием (2.45) для тонкого проводника — это хорошо известный классический результат [143, 144, 157].

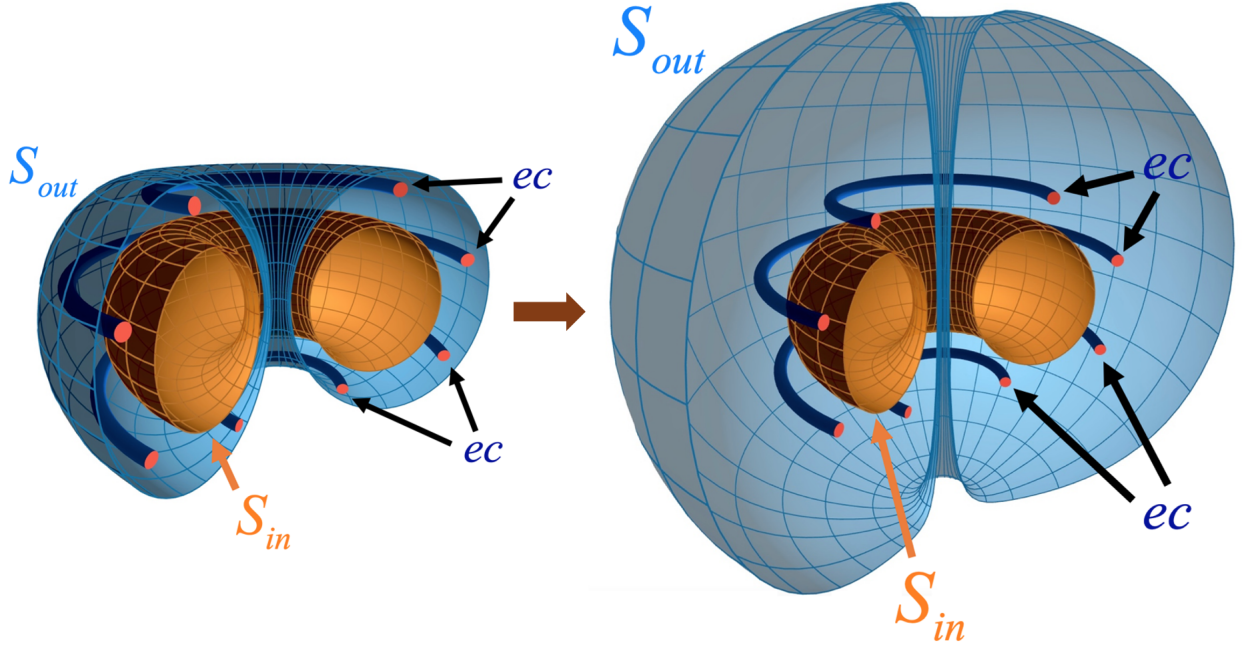


Рис. 5. Поверхности интегрирования: S_{in} — внутренняя, а S_{out} — внешняя. Тор S_{out} трансформируется в сферу с узким отверстием у оси $r = 0$.

Для оценки $[G, G]$ при $|\mathbf{r}_v| \gg |\mathbf{r}|$ воспользуемся мультипольным разложением

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}_v^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_v}} \approx \frac{1}{|\mathbf{r}_v|} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_v|^2} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_v)^2 - |\mathbf{r}|^2 |\mathbf{r}_v|^2}{2|\mathbf{r}_v|^4} \right), \quad (2.56)$$

где поправки по $|\mathbf{r}|/|\mathbf{r}_v|$ сохранены вплоть до второго порядка. При подстановке (2.56) в (1.18) ненулевой вклад возникает только от слагаемых с $\cos(\zeta - \zeta_v)$, содержащихся в $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_v$. Приближенное равенство

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_v) \approx \frac{r_v^2 r^2}{4|\mathbf{r}_v|^3} \left(1 + 3 \frac{z z_v}{|\mathbf{r}_v|^2} \right), \quad (2.57)$$

пригодное при $|\mathbf{r}_v| \gg |\mathbf{r}|$, получается и при прямом преобразовании G в виде (2.36) при малых

$$k^2 \approx \frac{4rr_v}{|\mathbf{r}_v|^2} \left(1 + 2 \frac{r r_v + z z_v}{|\mathbf{r}_v|^2} \right). \quad (2.58)$$

В (2.54) оператор ∇_v действует только на r_v и z_v , поэтому

$$[G, G] = [g_0(\mathbf{r}_v), g_1(\mathbf{r})] + [g_1(\mathbf{r}_v), g_0(\mathbf{r})], \quad (2.59)$$

так как $[g_0(\mathbf{r}_\nu), g_0(\mathbf{r})] = [g_1(\mathbf{r}_\nu), g_1(\mathbf{r})] = 0$, где $g_0 = r^2 f(\mathbf{r}_\nu)$ и $g_1 = r^2 z h(\mathbf{r}_\nu)$ — две части G в (2.57). Подстановка этих g_0 и g_1 в правую часть (2.59) превращает её в $r_\nu^2 r^2 (z - z_\nu) [f, h]$, а

$$[f, h] = 3f^2 \nabla_v \frac{z_\nu}{|\mathbf{r}_v|^2}. \quad (2.60)$$

Тогда при $|\mathbf{r}_v| \gg |\mathbf{r}|$ для подынтегральной функции в I_{out} получим

$$\frac{[\psi, G]}{2\pi r_v^2} = \frac{3\mu_0}{16\pi} r^2 m_z^\nu (z - z_\nu) \frac{r_v^2}{|\mathbf{r}_v|^6} \nabla_v \frac{z_\nu}{|\mathbf{r}_v|^2}, \quad (2.61)$$

где высшие поправки по $|\mathbf{r}|/|\mathbf{r}_v|$ опущены. Здесь $m_z^\nu = \pi r_\nu^2 J_\nu$ — проекция магнитного момента витка с током J_ν на ось z . При $|\mathbf{r}_v| \rightarrow \infty$ величина (2.59) убывает как $1/|\mathbf{r}_v|^6$, тогда как площадь сферы S_{out} возрастает как $|\mathbf{r}_v|^2$, поэтому их произведение в I_{out} пропорционально $1/|\mathbf{r}_v|^4$. Следовательно, интеграл I_{out} должен быть равен нулю.

Чтобы описать внешнее магнитное поле в той области, где находится плазма, в (2.53) с $I_{out} = 0$ следует выбрать $\mathbf{r}$ внутри тора S_{in} . Если взять $S_{in} = S_{pl}$, то интеграл с $\nabla\psi$ преобразуется аналогично (2.52), только теперь он войдёт с другим знаком. При таком выборе $\mathbf{r}$ упрощается и интеграл с ψ , поскольку $\psi = \psi_b = \text{const}$ на границе плазмы. Однако в этом случае вместо (2.51) получим

$$\oint_{pl} \psi \frac{\nabla_{pl} G}{r_{pl}^2} \cdot d\mathbf{S}_{pl} = \psi_b \int_{pl} \nabla_{pl} \cdot \frac{\nabla_{pl} G}{r_{pl}^2} \Big|_{\mathbf{r} \in pl} d\mathbf{r}_{pl} = -2\pi \psi_b, \quad (2.62)$$

где учтена особенность функции Грина, явно показанная в (2.48) и приводящая к функции Хевисайда в (1.16). Таким образом, при $S_{in} = S_{pl}$ и $\mathbf{r}$ внутри S_{pl} равенство (2.53) сводится к

$$\psi^{ext} = \psi_b + \oint_{pl} G \frac{\mathbf{n}_{pl} \cdot \nabla_{pl} \psi}{2\pi r_{pl}^2} dS_{pl} = \psi_b - 2\pi \oint_{pl} G \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl}. \quad (2.63)$$

Неопределённость с ψ_b в (2.63) может показаться неожиданной, потому что в обоих случаях вычисления начинались с одной и той же формулы (2.45), сводящейся к (2.50), а далее к (2.53). Разная форма уравнений никак не влияет на появление или исчезновение ψ_b . Отличие возникает при интегрировании слагаемых с $\psi \nabla G$, см. (2.51) и (2.62). Ясно, что ключевую роль при этом играет граничное условие (2.9), приводящее к упрощению при $S_{in} = S_{pl}$. При любом

другом S_{in} для $\mathbf{r}$ вне тора S_{in} в первом случае и $\mathbf{r}$ внутри S_{in} во втором в выражениях для ψ^ν сохранилось бы слагаемое с неизвестным $\psi(\mathbf{r})$ на S_{in} , как, например, в уравнении (16) в [148]. Подобная ситуация возникает и в теории стеллараторов при $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ на S_{in} , см. уравнение (4.18) в [125].

Оба равенства (2.52) и (2.63) можно записать в единой компактной формуле, совпадающей с использовавшейся в первой главе (1.16). Её формальный вывод приводился в [120], где операции с G выполнялись как с обобщённой функцией. Здесь же всюду считалось, что $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_v$, и это исключало появление особенностей. Главным при этом оказывается установление факта, что при любом способе вычисления с заданным полным магнитным полем $\mathbf{B}$ на S_{pl} , с граничным условием (1.8) и его следствием (2.9) функция ψ^{pl} определяется полностью, а ψ^{ext} с точностью до неизвестной константы ψ_b . Это связано с неполнотой описания, в котором произведена привязка к внутреннему решению, а часть информации о связи внешних токов с потоками пока не учтена. Таким образом, не остаётся ничего иного, кроме как напрямую вычислить вклад в ψ_b от токов в стенке и полоидальных катушках с помощью формулы (2.45).

2.4. Вычисление полоидального потока, создаваемого токами в вытянутой стенке

Часть константы интегрирования ψ_b , производимую током плазмы в случае вытянутой тороидальной конфигурации, можно вычислить с помощью (2.43). Оставшуюся часть ψ_b , создаваемую внешними источниками, $\psi^{ec} + \psi^w$, нужно находить прямым интегрированием в (2.45) с заданными распределениями тока j_ζ . В каждом конкретном сценарии вклад от токов в полоидальных обмотках можно считать известным, так как в приближении тонких проводников

$$\psi^{ec}(\mathbf{r}) = 2\pi\mu_0 \sum_c J_\nu G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_\nu), \quad (2.64)$$

где индекс ν служит «номером» внешней катушки. В таком случае недостающим элементом для нахождения ψ_b становится явное выражение для ψ^w .

При интегрировании в (2.45) по объёму стенки будем считать её тонкой тороидальной оболочкой с малым радиусом b_w , вытянутостью K_w и толщиной

$d_w \ll b_w$. Для процессов с временами, сравнимыми с так называемым резистивным временем стенки

$$\tau_w \equiv \mu_0 \sigma b_w d_w, \quad (2.65)$$

а точнее с $\tau \gg \tau_{sk} \equiv \mu_0 \sigma d_w^2$, можно пренебречь скин-эффектом и считать плотность тока j_ζ^w в стенке однородной по толщине (если нет, то потребуются дополнительный блок вычислений для $\psi(\mathbf{r})$ в стенке, см. [159] и ссылки в этой работе). Это покрывает интересующие нас события с эволюцией равновесия плазмы по горизонтали и VDE, а также CQ, длительность которых составляет десятки и сотни миллисекунд [4, 6, 44, 153, 160–162]. Тогда (2.45) превращается в

$$\psi^w(\mathbf{r}) = 2\pi\mu_0 \oint_w G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w) j_\zeta^w(\mathbf{r}_w) d_w d\ell_w \quad (2.66)$$

с интегралом по полоидальному контуру стенки S_w . Здесь для элемента площади поперечного сечения стенки использовано

$$dr_w dz_w \simeq d_w d\ell_w, \quad (2.67)$$

где $d\ell_w$ — полоидальный элемент длины её внутренней границы.

Математическое подобие (2.66) интегралу (1.16) очевидно: последний превращается в (2.66) при замене $\mathbf{r}_{pl}$ на $\mathbf{r}_w$ и

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau}_{pl} d\ell_{pl} \rightarrow \mu_0 d_w j_\zeta^w d\ell_w, \quad (2.68)$$

поэтому интегрирование в (2.66) проще всего произвести, представив стенку аналогично границе плазмы S_{pl} . Для этого зададим контур S_w эллипсом $a_w = b_w$ в координатах (a_w, ϑ) , подобных (1.46) и (1.47). Во избежание повторения индекса w , вытянутость координатной поверхности $a_w = \text{const}$, подобную $K(a)$ в (1.46), (1.47) и удовлетворяющую похожему на (1.53) условию

$$\kappa a_w = \sqrt{a_w^2 + b_w^2 (K_w^2 - 1)} \quad (2.69)$$

обозначим буквой κ . Построенные таким образом переменные (a_w, ϑ) идентичны (a, θ) с точностью до сдвига начала отсчёта: $a_w = 0$ представляет собой геометрический центр стенки $(R_w, 0)$, а $a = 0$ — центр плазмы $(R_w + \Delta_b, \xi)$, как показано на Рис. 6.

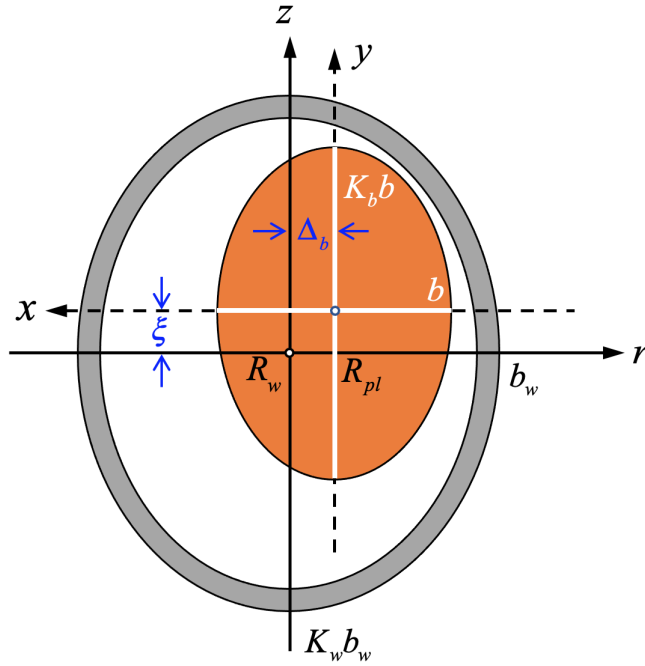


Рис. 6. Смещение плазмы внутри вакуумной камеры. Поверхность плазмы задается эллипсом с малой полуосью b и большой полуосью $K_b b$. Внутренняя сторона стенки также представляет собой эллипс с малой и большой полуосями b_w и $K_w b_w$, соответственно. Введены два набора координат: стандартные цилиндрические координаты (r, z) , связанные с осью симметрии токамака, и декартовы (x, y) с началом в центре плазмы ($r = R_{pl}, z = \xi$). Здесь $R_{pl} = R_w + \Delta_b$ – большой радиус границы плазмы, а Δ_b и ξ – её радиальное и вертикальное смещения относительно центра вакуумной камеры.

Чтобы воспользоваться техникой вычисления контурного интеграла, развитой в предыдущей главе, представим $j_\zeta^w d\ell_w$ в виде ряда Фурье:

$$2\pi d_w j_\zeta^w \frac{d\ell_w}{d\vartheta_w} = J_w + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} J_m^w e^{im\vartheta_w}, \quad (2.70)$$

где ϑ_w – угловая переменная, пробегающая от 0 до 2π по контуру стенки,

$$J_w \equiv \int_w j_\zeta^w dS_\perp^w = d_w \int_0^{2\pi} j_\zeta^w \frac{d\ell_w}{d\vartheta_w} d\vartheta_w \quad (2.71)$$

– полный ток в стенке, а $J_m^w(t) \equiv J_{cm}^w(t) - iJ_{sm}^w(t)$ – зависящая от времени комплексная амплитуда его гармоник.

При наличии up-down (зеркальной относительно плоскости $z = 0$) симметрии стенки $\operatorname{Im} J_m^w = J_{sm}^w = 0$, и слагаемые с $\sin m\vartheta_w$ отсутствуют. Они возникают, когда эта симметрия нарушается, например, при вертикальном смещении плазмы $\xi \neq 0$. Поэтому при рассмотрении VDE в (2.70) необходимо учитывать гармонику $\sin \vartheta_w$, так как в правой части уравнения (2.6) для тороидальной

плотности тока в стенке возникнет вклад

$$\dot{\psi}_\xi^{ext} = -2\pi R_{pl} B_q \frac{\dot{\xi}}{b} \kappa a_w \sin \vartheta. \quad (2.72)$$

Он содержится в (1.79) в слагаемом с $(z - \xi)^2$, где $\xi = \xi(t)$ — вертикальное смещение центра плазмы.

Чтобы оставаться в рамках приближения с (1.73), в (2.70) достаточно оставить лишь слагаемые до $m = 2$, а также воспользоваться представлением функции Грина в эллиптических координатах, см. (1.40) и (1.59). Тогда в области внутри тора S_w , аналогично (1.73), из (2.66) получается

$$\psi^w = L_w J_w + \text{Re}(\Psi_1^w + \Psi_2^w), \quad (2.73)$$

где L_w даётся той же формулой (2.44), что и L_{pl} , но с заменой $\{R_{pl}, b\} \rightarrow \{R_w, b_w\}$. Для нахождения ψ_b при СQ, когда $L_w J_w$ является доминирующим вкладом в ψ^w , этого достаточно, но для вывода уравнений эволюции положения плазмы нужны также

$$\Psi_1^w \equiv -2\pi R_w (B_\perp^w - i B_\xi^w \kappa) a_w e^{i\vartheta}, \quad (2.74)$$

$$\Psi_2^w \equiv \mu_0 R_w \frac{J_{c2}^w (\kappa^2 + 1) - 2i J_{s2}^w \kappa}{2b_w^2 (K_w + 1)^2} a_w^2 e^{2i\vartheta}, \quad (2.75)$$

где κ даётся определением (2.69),

$$B_\xi^w \equiv -\frac{\mu_0 J_{s1}^w}{2\pi b_w} \frac{1}{K_w + 1}, \quad (2.76)$$

$$B_\perp^w \equiv \frac{\mu_0}{4\pi b_w} \left[\varepsilon_w J_w \left(\ln \frac{16R_w}{b_w(K_w + 1)} - \frac{K_w}{K_w + 1} \right) - \frac{2}{K_w + 1} J_{c1}^w \right], \quad (2.77)$$

а

$$\varepsilon_w \equiv b_w / R_w \quad (2.78)$$

— обратное аспектное отношение. Из (2.74) и (1.14) следует, что B_ξ^w и $B_\perp^w$ — соответственно, амплитуды однородных горизонтального и вертикального магнитных полей, создаваемых токами, наведёнными в стенке. При $K_w = 1$ формула (2.77) сводится к равенству (98) в [120].

2.5. Нахождение константы ψ_b в тороидальной геометрии

Результат (2.73) получен в координатах $\boldsymbol{\rho} = (a_w, \vartheta)$, связанных с центром вакуумной камеры S_w . Чтобы найти вклад от ψ^w в $\psi_b = \psi|_{pl}$, необходимо вычислить

$$\psi_0^w(b) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{pl} \psi^w(b, \theta_b) d\theta_b, \quad (2.79)$$

т.е. часть ψ^w , не зависящую от полоидального угла θ на границе плазмы. При этом функция ψ^w должна быть выражена в движущихся вместе с плазмой переменных $\boldsymbol{\rho}_{pl} = (a, \theta)$, в которых её граница задаётся как $a = b$. Связь подвижной и неподвижной систем координат даётся равенством

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{pl} + \delta\mathbf{r}, \quad (2.80)$$

где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - R_w \mathbf{e}_r$ — радиус-вектор, отсчитываемый в поперечном сечении от центра вакуумной камеры $(R_w, 0)$, а $\boldsymbol{\rho}_{pl}$ — от центра плазмы $(R_w + \Delta_b, \xi)$, смещённого относительно камеры на $\delta\mathbf{r} = \Delta_b \mathbf{e}_r + \xi \mathbf{e}_z$, см. Рис. 6. Величина Δ_b соответствует горизонтальному смещению границы плазмы (в стандартном случае с $K_b = 1$ см. [85, 120]), а вертикальный сдвиг $\xi \neq 0$ учитывает возможное VDE.

Считая, что $|\delta\mathbf{r}| \ll b_w$, линеаризуем ψ^w по $\delta\mathbf{r}/b_w$, тогда (2.79) даёт

$$\psi_0^w(b) = L_w J_w + 2\pi R_w (B_\perp^w \Delta_b - B_\xi^w \xi) + \delta\psi_{w-pl}, \quad (2.81)$$

где

$$\delta\psi_{w-pl} \equiv \mu_0 R_w J_w^w \frac{c_w^2 - c_b^2}{2b_w^2 (K_w + 1)^2}, \quad (2.82)$$

а c_w вычисляется по формуле (2.17) с заменой $\{b, K_b\} \rightarrow \{b_w, K_w\}$.

Второе слагаемое в (2.81) возникает как следствие асимметрии системы, когда плазма сдвинута относительно центра камеры на величину $\delta\mathbf{r}$, а третье служит мерой взаимной неконфокальности плазмы и стенки ($c_b \neq c_w$). Они зануляются, соответственно, при $\delta\mathbf{r} = 0$ и при

$$c_w = c_b = b\sqrt{K_b^2 - 1}, \quad (2.83)$$

что часто используется для упрощения вычислений [55, 71–78]. Тогда (2.81) сводится к

$$\psi_b = L_{pl} J + L_w J_w + \psi_0^{ec}(b_w). \quad (2.84)$$

Ясно, что при CQ, когда вклад $L_w J_w$ в (2.81) будет существенным, этой формулой можно пользоваться и при небольших $\delta \mathbf{r}$ и $c_w - c_b$. Пределы применимости условия (2.83) и вычисления без его использования более подробно обсуждаются в главе 4.

Для полноты оценим поправки от слагаемого с Δ_b и ξ в (2.81) в общем случае. Из (2.76) и (2.77) получим

$$2\pi R_w \frac{B_{\perp}^w \Delta_b - B_{\xi}^w \xi}{L_w J_w} \sim \frac{\Delta_b}{2b_w} \left(\varepsilon_w - \frac{J_{c1}^w}{J_w} \right) + \frac{\xi}{b_w} \frac{J_{s1}^w}{J_w}. \quad (2.85)$$

где Δ_b/b и ξ/b следует считать малыми параметрами. Чтобы найти амплитуды токов, проинтегрируем (2.70) по углу с учётом (2.6):

$$\mu_0 R_w J_m^w = -\frac{\delta_m \tau_w}{2\pi b_w} \frac{\partial}{\partial t} \oint_w \frac{\psi(\boldsymbol{\rho} - \delta \mathbf{r})}{1 - \varepsilon_w \cos \vartheta_w} e^{-im\vartheta_w} d\ell_w, \quad (2.86)$$

где τ_w – величина, определённая равенством (2.65), а

$$\delta_m \equiv \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}. \quad (2.87)$$

Подстановка $\psi_w(a_w, \vartheta)$ в (2.86) даёт $J_w \sim -\tau_w \partial J / \partial t$,

$$J_{c1}^w - \varepsilon_w J_w \sim -\tau_w \frac{\partial}{\partial t} \left(J \frac{\Delta_{iw}^K - \Delta_b}{b_w} \right), \quad (2.88)$$

где $\Delta_{iw}^K \equiv \Delta^K(b_w)$, $\Delta_b = R_{pl} - R_w$, и

$$J_{s1}^w \sim -\tau_w \frac{\partial}{\partial t} \left(J \frac{\xi}{b_w} \right). \quad (2.89)$$

В интересующем нас случае CQ, когда ток плазмы меняется за время $\tau_{CQ} \approx \tau_w$ [4, 6, 109, 153], справедливо $J_{c1}^w/J_w \sim \Delta_b/b_w$ и $J_{s1}^w/J_w \sim \xi/b_w$, поэтому правая часть (2.85) имеет квадратичный порядок малости $(|\delta \mathbf{r}|/b_w)^2$. Соответственно, вкладом в ψ_b от $2\pi R_w (B_{\perp}^w \Delta_b - B_{\xi}^w \xi)$ можно пренебречь.

Приведённые оценки показывают, что при анализе эволюции плазмы с $dJ/dt \neq 0$ вместо $\psi_b = 0$, как в [85, 99, 100] или $\psi_b = \psi_s$, как в [55, 74–77, 97, 98, 101], следует использовать ψ_b в виде (2.84) при больших J_w или

$$\psi_b = L_{pl} J + L_w J_w + 2\pi R_w (B_{\perp}^w \Delta_b - B_{\xi}^w \xi) + \psi_0^{ec}(b_w), \quad (2.90)$$

если потребуется более высокая точность при затухании тока в стенке J_w . При $K_b = K_w = 1$ эта формула переходит в известный результат для круглых плазмы и стенки, см. (105) в [120].

2.6. Обсуждение результатов

Выражение (2.84) является важным дополнением к стандартной теории равновесия с неопределённой или произвольно заданной ψ_b , без которой нельзя обойтись в эволюционных задачах. В работе [120], например, где выкладки проводились для конфигурации с $K_b = K_w = 1$, выражения типа (2.84) использовались для вывода уравнения эволюции радиального смещения плазмы Δ_b с учётом затухания токов в резистивной стенке.

Здесь рассматривалась вытянутая плазма, для которой потенциально опасным является вертикальное смещение с $\xi \neq 0$. Минимальной основой для его описания в сценариях с $dJ/dt \neq 0$ является известное цилиндрическое решение (2.24) с подстановкой ψ_b в виде (2.84). Эта формула или более общая (2.90) дают связь ψ_b с физическими величинами, которой не было в моделях [55, 74–77, 85, 97–101] с (2.24). Здесь ψ_b вычислена в тороидальной геометрии с использованием общего электромагнитного равенства (2.45) со стандартной функцией Грина (1.18) для кольцевых токов. Она гарантирует учёт конечных размеров системы и тороидальности, а линеаризация по b/R_{pl} позволяет вписаться в стандартную схему аналитической теории равновесия без потери точности. Формулы (2.84) и (2.90) также обобщают результат (105) в [120], ранее полученный для круглых плазмы и стенки, на случай с $K_b \neq 1$.

Ясно, что при анализе CQ даже отличие первого слагаемого $L_{pl}J$ в (2.84) как от ψ_s , которая выбиралась в качестве ψ_b в [55, 74–77, 97, 98, 101], так и от $\psi_b = 0$ в [85, 99, 100], будет принципиально важным. Следует отметить и существенно иную по сравнению с ψ_s зависимость L_{pl} от размеров плазмы (большой и малый радиусы R_{pl} и b , вытянутость K_b), которая не может быть получена на основе теории с прямолинейной плазмой [55, 74–77, 85, 97–101].

Второе слагаемое $L_w J_w$ в (2.84) содержит неизвестный ток J_w , для которого после интегрирования в (2.86) по контуру стенки получается уравнение

$$J_w = -\tau_0 \frac{d}{dt} \left[J + J_w + \frac{\psi_0^{ec}(b_w, t)}{L_w} \right], \quad (2.91)$$

где

$$\tau_0 \equiv \tau_w \frac{P_w}{2\pi b_w \mu_0 R_w} \frac{L_w}{\mu_0 R_w} \simeq \tau_w \sqrt{\frac{K_w^2 + 1}{2}} \left[\ln \frac{16R_w}{b_w(K_w + 1)} - 2 \right] \quad (2.92)$$

— характерное время затухания полного тока в стенке (порядка τ_w , но заметно отличное от него даже для круглой стенки [50]),

$$P_w \equiv \oint_w d\ell_w = 4K_w b_w E(e_w) \simeq 2\pi b_w \sqrt{\frac{K_w^2 + 1}{2}} \quad (2.93)$$

— длина поперечного сечения стенки, E — полный эллиптический интеграл второго рода, а $e_w = \sqrt{1 - 1/K_w^2}$ — эксцентриситет эллипса S_w . Приближенное равенство в (2.93) было предложено в [138] и использовалось в [163]. Заметим, что при $K_w = 1$ результат (2.92) даёт формулу (107) в [120].

В уравнениях (2.84) и (2.91) функцию $\psi_0^{ec}(b_w, t)$ можно считать заданной, потому что она определяется токами в катушках полоидального поля. Тогда (2.84) в комбинации с (2.91) даёт ψ_b как функцию только тока в плазме. Дополнением к (2.91) могут служить измерения тока в стенке J_w с помощью двух поясов Роговского — один внутри вакуумной камеры, а второй снаружи.

Если кроме ψ_b в описании конфигурации необходим учёт тороидального расширения плазмы и эффектов неоднородного профиля тока, то вместо (2.24) следует пользоваться полученными в первой главе решениями (1.65) и (1.73). Их можно записать в обозначениях (μ, θ) , общепринятых в теории равновесия [55, 74–77, 85, 97–101], с помощью тождеств

$$a \equiv c_b \operatorname{sh} \mu, \quad (2.94)$$

$$Ka \equiv c_b \operatorname{ch} \mu \quad (2.95)$$

и их следствий

$$a(K + 1) = c_b e^\mu, \quad a(K - 1) = c_b e^{-\mu}, \quad (2.96)$$

$$a^2(K^2 + 1) = c_b^2 \operatorname{ch} 2\mu, \quad a^2(K + 1)^2 = c_b^2 e^{2\mu}. \quad (2.97)$$

Тогда формула (1.65) принимает вид

$$\psi^{pl} - \psi_1^{pl} = \psi_J \left(\ln \frac{16R_{pl}}{c_b} - \mu - 2 + \frac{\epsilon_b + d_b}{2} \operatorname{ch} 2\mu_b e^{-2\mu} \cos 2\theta \right), \quad (2.98)$$

а (1.73) переходит в

$$\psi^{ext} - \psi_\perp^{ext} = \psi_b - \psi_J \left(\ln \frac{16R_{pl}}{c_b} - \mu_b - 2 + \frac{\epsilon_b + d_b}{2} e^{-2\mu_b} \operatorname{ch} 2\mu \cos 2\theta \right), \quad (2.99)$$

где ψ_1^{pl} и $\psi_\perp^{ext}$ определены (1.67) и (1.78).

Сумма $\psi^{pl} + \psi^{ext}$ даёт полный полоидальный поток

$$\psi - \psi_J \frac{\Delta^K}{a} \cos \theta = \psi_b - \psi_J \left[\mu - \mu_b + \frac{\epsilon_b + d_b}{2} \operatorname{sh} 2(\mu - \mu_b) \cos 2\theta \right], \quad (2.100)$$

где ϵ_b даётся (2.26), константа ψ_b определена равенством (2.84), а

$$\frac{\Delta^K}{a} = \frac{c_b \operatorname{sh} \mu}{2R_{pl}} \left[\mu - \mu_b + (1 - e^{-2\mu_b}) \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{e^{2\mu_b} - 1}{e^{2\mu} - 1} \right) \right]. \quad (2.101)$$

Выражение (2.100) служит обобщением (2.24) на случай тороидальной геометрии. В тех задачах, где равновесие плазмы считается статическим, тороидальные эффекты несущественны, а профиль тока в плазме можно положить однородным, они совпадают. О величине ψ_b уже говорилось, а новым по сравнению с (2.24) является слагаемое с $\Delta^K \cos \theta$, описывающее радиальное смещение границы плазмы.

Ещё одно отличие (2.100) от (2.24) проявляется и в цилиндрическом пределе, оно связано с присутствием в (2.100) величины d_b , влияющей на амплитуду квадрупольной гармоник. Важно, что $d_b \neq 0$ при неоднородной вытянутости магнитных поверхностей вблизи границы плазмы, которая зависит от распределения тока $j_\zeta(r, z)$ в сечении шнура. Напомним, что (2.24) справедливо лишь при $j_\zeta = \text{const}$, соответствующем $K = \text{const}$ и $d_b = 0$ [55, 74–77, 85, 97–101]. Наши равенства (1.65) и (1.73) получены без такого упрощения. Следовательно, и итоговое соотношение (2.100) годится при любой зависимости $j_\zeta(r, z)$.

Наше рассмотрение с учётом тороидальных эффектов подтверждает, что цилиндрическая формула (2.24) верно воспроизводит основной эффект вытянутости для плазмы с однородной плотностью тока. Если в (2.24) сделать замену

$$\epsilon_b \rightarrow \epsilon_b + d_b, \quad (2.102)$$

то этим решением можно будет пользоваться и для конфигураций с $j_\zeta \neq \text{const}$. С этой простой операцией все результаты, полученные при решении статических задач в [55, 74–77, 85, 97–101], легко обобщаются на случаи с произвольными профилями j_ζ в плазме. Величину d_b при этом можно выразить [163] через полоидальную бэту β_p , внутреннюю индуктивность плазмы ℓ_i и вытянутость K_b , пользуясь стандартными вириальными соотношениями [139, 163, 164].

Решение (2.100) вместе с ψ_b , заданной равенством (2.84), даёт достаточную информацию для описания реакции резистивной стенки на эволюцию равновесия вытянутой тороидальной конфигурации. В соответствии со схемой [120], для

получения уравнений на $\Delta_b(t)$ и $\xi(t)$ нужно подставить (2.100) в интеграл (2.86), который связывает амплитуды гармоник тока в стенке с решением внешней задачи равновесия. Данные амплитуды вносят вклад в равенство (2.73), которое в сочетании с (2.91) даёт нам ψ^w как функцию параметров плазмы: её тока $J(t)$, поперечных размеров b и K_b , а также горизонтального и вертикального смещений внутри стенки $\Delta(t)$ и $\xi(t)$. Таким образом, метод [120] расширен нами на случай некруглой конфигурации и позволяет аналитически описывать события с $dJ/dt \neq 0$ в различных комбинациях с VDE, радиальным смещением границы плазмы и перераспределением тока в плазме, вызывающем соответствующее изменение d_b .

2.7. Выводы главы 2

В задачах магнитной диагностики и управления плазмой, а также при вычислении электромагнитной реакции стенки, требуется выделение из полного вакуумного решения ψ парциальных вкладов ψ^{pl} и ψ^{ext} . Сложности этой процедуры в цилиндрических подходах с (2.24) известны. В работах [85, 100, 102] функция ψ^{pl} выделялась как часть ψ , убывающая на бесконечности, но таким образом ψ^{pl} можно определить лишь с точностью до произвольной константы. Действительно, прибавляя к ψ^{pl} некоторое число и вычитая его же из ψ^{ext} , мы не нарушим равенства $\psi = \psi^{pl} + \psi^{ext}$. Эта неопределённость в [85, 100, 102] не упоминалась, однако её и невозможно разрешить в рамках модели для прямой системы.

В нашей модели выделение вкладов ψ^{pl} и ψ^{ext} из полного решения ψ_{out} происходит ещё на этапе получения общего электромагнитного равенства (1.16). Его использование вместо (2.12) с учётом внешних токов интегралом в (2.45) полностью устраняет неопределённость в выборе констант, вносящих вклад в ψ_b , и гарантирует точное вычисление ψ^{pl} вне плазмы и ψ^{ext} внутри неё. Получаемая таким образом величина ψ_b является минимальным необходимым дополнением к стандартным методам теории равновесия для её расширения на случай динамических процессов.

Точное значение константы ψ_b даётся формулой (2.84), которая отлича-

ется от значений, предписываемых константе в [55, 74–77, 85, 97–101], тем, что корректно учитывает вклады от тока плазмы J , токов в стенке J_w и внешних источниках. Формула (2.84) и её более точная версия (2.90) также обобщают известный результат (105) в [120], полученный для круглых тороидальных плазмы и стенки, на случай конфигурации с некруглыми сечениями.

Коэффициенты L и L_w , стоящие при J и J_w в (2.84), явно содержат конечные размеры вытянутой плазмы и стенки: их большие радиусы R_{pl} и R_w , малые полуоси эллипсов b и b_w , а также вытянутости K_b и K_w . Это значительный шаг вперёд как по сравнению с цилиндрическими моделями [55, 74–77, 85, 97–101], где естественно отсутствуют R_{pl} и R_w , так и с простыми кольцевыми моделями [39, 67–70], в которых полагается $b = b_w = 0$. Таким образом, наше решение (2.100) с ψ_b , определяемым из (2.84), представляет основу для анализа переходных процессов с одновременным учётом тороидальности плазмы, вытянутости её сечения, неоднородности профиля тока внутри и динамической реакцией резистивной стенки токамака. С таким сочетанием эффектов задача равновесия не рассматривалась в рамках существующих аналитических подходов [39, 55, 67–70, 74–77, 85, 97–101], но теперь для этого развит достаточный инструментарий.

Для покрытия сценариев с эволюцией равновесия главным элементом становится выражение (2.73) для полоидального потока ψ^w , производимого токами, наведёнными в стенке. Вместе со вспомогательным уравнением (2.86) и выражением (2.84) для константы ψ_b , этот результат является основным во второй главе. Здесь он получен путём прямого вычисления интеграла в (2.45) по контуру стенки с применением техники, развитой в главе 1. Вместе с (2.100) и (2.84), формулы (2.73) достаточно для получения уравнений движения плазмы при $dJ/dt \neq 0$, подобных представленному в [120] уравнению (110). Необходимо лишь вычислить интегралы в (2.86) с подстановкой (2.100) и (2.84), чтобы превратить (2.73) в явную функцию положения и формы плазмы, а также её тока $J(t)$.

3. Собственные моды тороидального тока индукции в вакуумной камере токамака с некруглым сечением

Выражение (2.73) в предыдущей главе было получено с помощью представления подынтегральной функции в виде ряда Фурье (2.70), что особенно удобно в задачах, связанных с вычислением криволинейных интегралов, см., например, [119, 125, 165]. При использовании данного приёма естественно возникает вопрос, какое минимальное число слагаемых в разложении (2.70) можно оставить, чтобы обеспечить требуемую точность вычислений. Напомним, что при выводе (2.73) мы удержали в (2.70) лишь 3 гармоники тока: симметричную ($m = 0$), дипольную ($m = 1$) и квадрупольную ($m = 2$), где m — полоидальное волновое число. Такой выбор был обусловлен тем, что те же гармоники присутствуют и в полном внешнем потоке (1.73), частью которого является функция ψ^w . Подобное объяснение, очевидное с математической точки зрения, использовалось и в [119, 120], но с двумя гармониками. При этом согласие результатов [119, 120] с численным моделированием сил на стенку [49, 50] подсказывает, что возможность удержания в бесконечной сумме (2.70) всего нескольких членов без ущерба для точности должна следовать из первых принципов.

Проблема минимизации количества необходимых элементов при описании токов в стенке имеет практическое значение для множества задач, в которых вакуумная камера является неотъемлемым элементом. Примерами служат теория медленных винтовых мод (RWM), выделение поля наведённых токов в данных магнитной диагностики, анализ динамического равновесия при переходных процессах и оценка возникающих при этом электромеханических сил, действующих на стенку [49, 51, 52, 57, 59, 62, 63]. Во всех этих приложениях требуется надёжное знание тока $\mathbf{j}^w$, но ввиду сложной структуры основного объекта (стенки) в расчётах обычно применяются те или иные способы дискретизации. Так, при аксиальной симметрии используется представление стенки в виде набора кольцевых проводников (филаментов) [36, 60, 62–65, 68, 69, 111, 112, 117, 130, 166, 167]. Этот метод сводит закон Ома (2.2) с законом Фарадея (2.3) к системе уравнений Кирхгофа с числом неизвестных N , равным количеству филаментов. Известны варианты с выбором N от всего двух [68, 69], что является радикальным переу-

процессом, до 830 в численном коде TSC [36]. Ясно, что при больших N метод филаментов неприемлем для аналитических вычислений.

Альтернативный подход был предложен в работе [111] и состоит в разложении вектора $\mathbf{j}^w$ по системе «элементарных» токов, распределённых по полоидальному углу с различными периодами — так называемых собственных мод тока индукции, впоследствии интегрированных в электромагнитные коды STARWALL [168] и CARIDDI [51, 58]. Основное преимущество такого описания по сравнению с моделью филаментов состоит в том, что одна мода может полностью определять реакцию всей вакуумной камеры. Так, численное моделирование VDE в токамаке ИТЭР [111] показало, что для довольно точного описания динамики тока в стенке достаточно всего трёх гармоник. Этот результат, подтвержденный более поздними исследованиями [51, 58, 59], показывает перспективу для простого (по сравнению с многомерными векторами [36, 60, 62–65, 68, 69, 111, 112, 117, 130, 166, 167]) и достаточно точного описания тока в стенке $\mathbf{j}^w$ и создаваемого им поля $\mathbf{B}^w$.

Целью третьей главы является аналитическая реализация результата [111] и нахождение полоидальных мод тока индукции в тороидальной вакуумной камере с учётом её резистивности. Определяющее их уравнение сформулировано здесь путём преобразования формулы Био-Савара-Лапласа (1.7) с законами Ома (2.2) и Фарадея (2.3) к интегральному уравнению, описывающему эволюцию поверхностной плотности тока в тонкой проводящей оболочке. Решение уравнения производится аналитически с помощью развитой в предыдущих главах техники вычисления интегралов с функцией Грина (1.18) и стандартных математических методов. Сечение камеры при этом полагается эллиптическим, но теперь мы не делаем ограничений на число слагаемых в Фурье-разложении подынтегральной функции, как во второй главе. Вместо этого рассматривается спектральная задача для полной системы собственных функций наведённого тока и определяются характерные времена затухания его полоидальных мод. Последнее необходимо для выделения наиболее долгоживущих мод и оценки числа их минимального количества для описания тока в различных приложениях.

3.1. Интегральная формулировка уравнения динамики токов индукции в стенке

Как и в прошлой главе, будем считать стенку вакуумной камеры токамака полый тороидальной оболочкой большого радиуса R_w , малого радиуса b_w и толщиной $d_w \ll b_w$. В цилиндрических координатах (r, ζ, z) , связанных с главной осью тора, форму поперечного сечения стенки зададим уравнением эллипса (1.1), но с заменой там $\{R_{pl}, b, K_b\} \rightarrow \{R_w, b_w, K_w\}$, где K_w — отношение большой и малой полуосей S_w (вытянутость), см. Рис. 7.

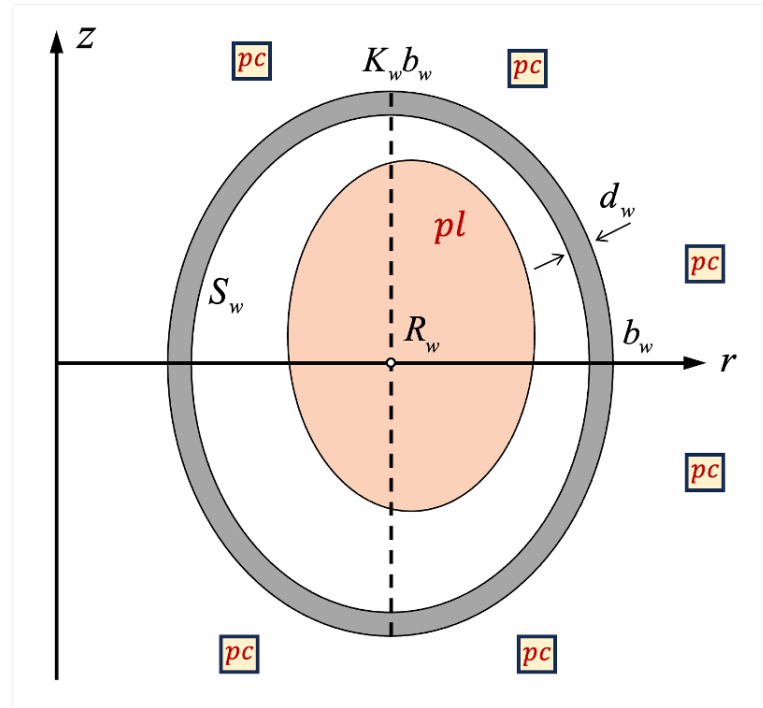


Рис. 7. Схематический вид вакуумной камеры токамака в поперечном сечении. Здесь S_w — внутренняя тороидальная поверхность стенки, R_w — её большой радиус, b_w — малый радиус, K_w — вытянутость, а d_w — толщина. Сокращениями pl и ec обозначены плазмы и внешние катушки.

В предположении об аксиальной симметрии системы плотность тока можно записать в следующей бездивергентной форме

$$2\pi \mathbf{j} = \nabla I \times \nabla \zeta - r^2 \nabla \zeta \operatorname{div} \frac{\nabla \psi}{\mu_0 r^2}. \quad (3.1)$$

Это равенство получается прямой подстановкой в закон Ампера (1.4) смешанного представления магнитного поля (1.14). Формула (3.1) фактически группирует величины (j_ζ, ψ) и $(\mathbf{j}_p, I)$ в независимые пары функций, что позволяет

находить тороидальные и полоидальные токи $j_\zeta = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\zeta$ и $\mathbf{j}_p = \mathbf{j} - j_\zeta \mathbf{e}_\zeta$ отдельно друг от друга [119, 120, 156].

Обсуждение полоидальных токов индукции в стенке можно найти в работах [47, 126, 155, 156], а здесь, как и прежде, мы сосредоточимся на функции j_ζ^w . Поскольку в этой работе мы рассматриваем относительно медленные процессы, временной масштаб которых определяется резистивным временем стенки (2.65), мы можем пренебречь скин-эффектом и считать ток в стенке j_ζ^w однородным по толщине. В таком случае j_ζ^w удобно задать в виде

$$j_\zeta^w(\mathbf{r}) = i_\zeta^w(\ell) |\nabla a| \delta(a - a_w), \quad (3.2)$$

где a — потоковая координата, задающая поверхность S_w уравнением $a_w(\mathbf{r}) = \text{const}$, а ℓ — переменная длина дуги полоидального сечения S_w . Величина i_ζ^w имеет смысл поверхностного тока и связана с обычной плотностью соотношением

$$i_\zeta^w(\ell) = \int_{a_w}^{a_w + \delta a} j_\zeta^w(\mathbf{r}) \frac{da}{|\nabla a|} = \int_0^{d_w} j_\zeta^w(\mathbf{r}) d\ell_\perp = j_\zeta^w(\ell) d_w(\ell), \quad (3.3)$$

где интегрирование проводится по тонкому слою толщиной $d_w(\ell) = \delta a / |\nabla a|$.

Продифференцируем закон Био-Савара-Лапласа (2.66) по t с учётом (3.3) и закона Ома для поверхностного тока

$$i_\zeta^w = -\frac{\sigma d_w}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_w, \quad (3.4)$$

где полный поток $\psi = \psi^s + \psi^w$ включает собственный индуктивный поток ψ^w и вклады от внешних источников ($s = \text{source}$)

$$\psi^s = \psi^{pl} + \psi^{ec}. \quad (3.5)$$

Результатом является интегральное уравнение

$$\frac{i_\zeta^w}{\sigma d_w} + \frac{\mu_0}{r} \oint_w G(\ell; \ell_w) \frac{\partial i_\zeta^w}{\partial t} d\ell_w = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi^s}{\partial t} \Big|_w, \quad (3.6)$$

где все величины являются функциями ℓ , а G — уже известная тороидальная функция Грина (1.18). Пример численного решения этого уравнения можно найти в [169] для токамака ЕТЕ.

С общезначимой точки зрения (3.6) представляет собой закон Кирхгофа, записанный для резистивной вакуумной камеры. Первое слагаемое в левой части (3.6) имеет смысл омического члена, ответственного за джоулево затухание наведённого тока в стенке, а слагаемое с интегралом описывает эффект самоиндукции. В правой части (3.6) находится ЭДС индукции, возбуждающая в тороидальной оболочке вихревой ток. Дополненное начальным условием

$$i_{\zeta}^w(\ell, t)|_{t \rightarrow +0} = i_0^w(\ell), \quad (3.7)$$

уравнение (3.6) полностью описывает эволюцию продольных токов индукции в стенке токамака.

Как мы впоследствии убедимся, для аналитических расчётов интегральное уравнение (3.6) оказывается более удобным по сравнению с «дифференциальным» способом вычисления i_{ζ}^w [170–176], основанном на решении уравнения (2.7) в области внутри и снаружи S_w с условием сшивки

$$\mu_0 \sigma d_w \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_w = \langle \mathbf{n}_w \cdot \nabla \psi^w \rangle, \quad (3.8)$$

где угловые скобки означают скачок величины при переходе через S_w , а $\mathbf{n}_w = \nabla a / |\nabla a|$ — единичный вектор внешней нормали к ней. Здесь это условие записано для полоидального потока ψ^w , тогда как в [170, 171] неизвестной является тороидальная компонента вектор-потенциала $A_{\zeta} = \psi / (2\pi r)$, а в [172–176], где также учтены полоидальные токи в стенке $\mathbf{j}_p^w$, скалярный потенциал магнитного поля в вакууме φ . Фактически, использование (3.8) является частью нахождения ψ^w , которое затем нужно подставлять в (3.4). В то же время уравнение (3.6) позволяет найти i_{ζ}^w на стенке без необходимости вычислять полоидальный поток в вакууме, а присутствие в нём функции Грина (1.18) позволяет решить задачу с помощью методов, развитых в предыдущих главах.

3.2. Учёт сингулярности на контуре интегрирования S_w в уравнении (3.6)

Прежде при вычислении интегралов с функцией Грина по полоидальному контуру точка наблюдения $\mathbf{r}$ находилась внутри, либо вне области интегрирования с $\mathbf{r}_v$, что исключало появление особенности под интегралом. Теперь же,

когда и искомая функция $i_\zeta^w(\ell_w)$, и интегрирование определены на одной и той же поверхности S_w , подынтегральное выражение в (3.6) проходит через особую точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_w$ функции $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w)$. Из-за этого интеграл в (3.6), строго говоря, расходится, поэтому при дальнейших преобразованиях мы будем понимать его в смысле главного значения

$$\int_0^{P_w} G(\ell; \ell_w) f(\ell_w) d\ell_w = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\ell-\varepsilon} + \int_{\ell+\varepsilon}^{P_w} \right] G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w) f(\mathbf{r}_w) d\ell_w, \quad (3.9)$$

где P_w — длина контура. Последнее равенство справедливо, так как в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю интеграл

$$I_\varepsilon \equiv \int_{\ell-\varepsilon}^{\ell+\varepsilon} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w) f(\mathbf{r}_w) d\ell_w, \quad (3.10)$$

где $f(\mathbf{r}_w) \equiv \partial_t i_\zeta^w(\mathbf{r}_w)$ — непрерывная на S_w функция. Подобное определение интеграла использовалось во множестве работ, посвящённых численному вычислению наведённых токов в стенке [169, 177–179], и восходит к проблеме постановки краевых задач в классической электродинамике [143, 144]. Для полноты изложения докажем, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0$.

Выделим сингулярность функции Грина G , которая заключена в знаменателе $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|$ в (1.18). Для этого разложим эту функцию по тороидальным гармоникам в цилиндрических координатах [180]

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|} = \frac{1}{\pi \sqrt{r r_w}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{n-1/2}(\chi) e^{in(\zeta - \zeta_w)}, \quad (3.11)$$

где

$$Q_{n-1/2}(\chi) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nu}{\sqrt{\chi - \cos u}} du \quad (3.12)$$

— функции Лежандра второго рода полуцелого порядка, $\chi \equiv 2/k^2 - 1 > 1$, а k определена равенством (2.37). Таким образом, в точке $k = 1$, соответствующей пределу $(r_w, z_w) \rightarrow (r, z)$, функции Лежандра имеют особенность. Последняя, как было показано в [176], при любом значении тороидального числа n имеет логарифмическую асимптотику

$$Q_{n-1/2}(\chi) = c_n(k) + \ln \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}. \quad (3.13)$$

Здесь $c_n = (-1)^n I_n + \ln(1 + 1/k)$ — функция, регулярная при $k = 1$, а

$$I_n \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2nu - (-1)^n \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin u}} du. \quad (3.14)$$

Подстановка (3.11) и (3.13) в определение (1.18) даёт представление функции Грина

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w) = \frac{\sqrt{rr_w}}{2\pi} \left[c_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4rr_w}{(r - r_w)^2 + (z - z_w)^2} \right] \quad (3.15)$$

с явно выделенной сингулярной частью. Соответственно, абсолютная величина (модуль) интеграла (3.10) удовлетворяет неравенству треугольника

$$|I_\varepsilon| \leq I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2, \quad (3.16)$$

где

$$I_\varepsilon^1 \equiv \int_{\ell-\varepsilon}^{\ell+\varepsilon} \frac{\sqrt{rr_w}}{2\pi} \left| \left(c_1 + \ln \frac{\sqrt{rr_w}}{R_w} \right) f(\ell_w) \right| d\ell_w < M_1 \int_{\ell-\varepsilon}^{\ell+\varepsilon} d\ell_w = 2M_1\varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.17)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь $M_1 < \infty$ — максимальное значение подынтегральной функции на контуре S_w , конечное в силу её непрерывности. Второе слагаемое в (3.10)

$$I_\varepsilon^2 \equiv \int_{\ell-\varepsilon}^{\ell+\varepsilon} \frac{\sqrt{rr_w}}{2\pi} \ln \frac{2R_w}{\sqrt{(r - r_w)^2 + (z - z_w)^2}} |f(\ell_w)| d\ell_w \quad (3.18)$$

также стремится к нулю, что нетрудно показать с помощью замены переменной $\Delta\ell = \ell_w - \ell \in [-\varepsilon; \varepsilon]$. Тогда, линеаризуя переменные r_w и z_w по $\Delta\ell$, получаем

$$I_\varepsilon^2 < 2M_2 \int_0^\varepsilon \ln \frac{2R_w}{\sqrt{g_{\ell\ell}} \Delta\ell} d(\Delta\ell) = 2M_2\varepsilon \left(\ln \frac{2R_w}{\sqrt{g_{\ell\ell}}\varepsilon} + 1 \right) \rightarrow 0, \quad (3.19)$$

где $M_2 = \max_{S_w} [\sqrt{rr_w} |f(\ell_w)| / (2\pi)] < \infty$, а $g_{\ell\ell} \equiv (\partial_\ell r)^2 + (\partial_\ell z)^2$ — метрический коэффициент в точке $\Delta\ell = 0$. Таким образом, $I_\varepsilon = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что и требовалось доказать.

3.3. Решение уравнения (3.6) с помощью теоремы Гильберта-Шмидта

С учётом равенства (3.9) уравнение (3.6) можно свести к уравнению Фредгольма 2-го рода с постоянными коэффициентами и симметричным ядром, ко-

торое решается методом Гильберта-Шмидта [181–186]. Для этого применим к (3.6) преобразование Лапласа

$$I(s) + s\tau_w \oint_w h \frac{G}{R_w b_w} I(s) d\ell_w = I_0 - \frac{\sigma d_w}{2\pi r} \Psi(s) \quad (3.20)$$

где $I(\ell, s) \equiv \mathcal{L}\{i_\zeta^w(t)\}$ — изображение искомой функции тороидального тока (не путать с полным полоидальным током), резистивное время определено как $\tau_w = \mu_0 \sigma_0 b_w d_0$ со средними по сечению проводимостью σ_0 и толщиной d_0 ,

$$h(\ell) \equiv \frac{R_w}{\sigma_0 d_0} \frac{\sigma(\ell) d_w(\ell)}{r(\ell)} \quad (3.21)$$

— безразмерная весовая функция, а $\Psi(s)$ — образ функции источника. Здесь мы воспользовались свойством $\mathcal{L}\{\partial i_\zeta^w / \partial t\} = s\mathcal{L}\{i_\zeta^w\} - i_0^w$, поэтому слагаемое

$$I_0(\ell) \equiv \tau_w \oint_w h(\ell) \frac{G(\ell; \ell_w)}{R_w b_w} i_0^w(\ell_w) d\ell_w \quad (3.22)$$

представляет собой действие интегрального оператора на начальное условие (3.7).

По теореме Гильберта-Шмидта интеграл с функцией Грина, обладающей симметрией по переменным ℓ и ℓ_w , раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье [181–186]

$$\oint_w h(\ell) \frac{G(\ell; \ell_w)}{R_w b_w} I(\ell_w, s) d\ell_w = \sum_{m=0}^{\infty} (I, X_m)_{\frac{1}{h}} \frac{X_m(\ell)}{\lambda_m}, \quad (3.23)$$

где скобки $(*, *)_{\frac{1}{h}}$ означают взвешенное скалярное произведение

$$(f, g)_{\frac{1}{h}} \equiv \frac{2}{P_w} \oint_w f(\ell) g(\ell) \frac{d\ell}{h(\ell)} \quad (3.24)$$

на контуре длиной P_w , а X_m — полная ортогональная система функций, удовлетворяющих спектральной задаче

$$X_m(\ell) = \lambda_m \oint_w h(\ell) \frac{G(\ell; \ell_w)}{R_w b_w} X_m(\ell_w) d\ell_w \quad (3.25)$$

с характеристическими числами λ_m и нормировкой $\|X_m\|^2 = (X_m, X_m) = 1$.

Аналогично раскладываются стоящие в правой части уравнения (3.20) слагаемые

$$I_0 = \tau_w \sum_{m=0}^{\infty} (i_0^w, X_m)_{\frac{1}{h}} \frac{X_m(\ell)}{\lambda_m}, \quad (3.26)$$

и

$$\frac{\sigma d_w}{2\pi r} \Psi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma d_w}{2\pi r} \Psi, X_m \right)_{\frac{1}{h}} X_m(\ell). \quad (3.27)$$

С этими подстановками решением уравнения (3.20) относительно I является

$$I(\ell, s) = \tau_w \sum_{m=0}^{\infty} \left(i_0^w - \frac{\lambda_m \sigma d_w}{\tau_w 2\pi r} \Psi, X_m \right)_{\frac{1}{h}} \frac{X_m(\ell)}{\lambda_m + s\tau_w}. \quad (3.28)$$

Укажем, что здесь исправлена опечатка, допущенная в формуле (69) в [133]. Оригинал (3.28) даёт нам искомую функцию поверхностного тока в виде разложения по собственным модам

$$i_\zeta^w(\ell, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (i_m, X_m)_{\frac{1}{h}} X_m(\ell), \quad (3.29)$$

где определены характерные времена затухания слагаемых

$$\tau_m \equiv \frac{\tau_w}{\lambda_m}, \quad (3.30)$$

а

$$i_m(\ell, t) = i_0^w(\ell) e^{-t/\tau_m} - \frac{\sigma d_w}{2\pi r} \int_0^t \psi^s(\ell, \tau) e^{(\tau-t)/\tau_m} \frac{d\tau}{\tau_m} \quad (3.31)$$

— их амплитуды, зависящие от времени.

Функции $X_m(\ell)$, входящие в (3.29), по построению являются собственными решениями однородного уравнения (3.6) с начальным условием (3.7) и дают удобный базис для описания поверхностного тока $i_\zeta^w(\ell, t)$ в произвольный момент времени. Формула (3.29) есть, таким образом, обобщенный ряд Фурье и в этом смысле даёт ожидаемое представление периодической на замкнутом контуре функции $i_\zeta^w(\ell, t)$. С другой стороны, метод разложения тока по системе ортогональных базисных функций успешно применяется и в непериодических структурах [187, 188].

Заметим, что приведённые здесь преобразования опираются на стандартные методы теории интегральных уравнений [181–186] и даны для последовательного вывода (3.29) с промежуточным уравнением (3.25). Его решение требуется далее для нахождения явного вида $X_m(\ell)$ и характерных времён затухания τ_m собственных мод резистивной стенки токамака.

3.4. Аналитическое нахождение собственных мод тока в стенке с эллиптическим сечением

Как и прежде, мы рассматриваем токамак с аспектным отношением порядка $R_w/b_w = 3$ и более, чтобы линеаризовать ядро интегрального уравнения (3.25) по малому параметру (2.78). Тогда спектральная задача (3.25) преобразуется к виду

$$\sqrt{r}X_m = \lambda_m \int_0^{P_w} \left(G_0 - \frac{x + x_w}{4\pi} \right) \sqrt{r_w} X_m(\ell_w) \frac{d\ell_w}{R_w b_w}, \quad (3.32)$$

где G_0 — уже упоминавшаяся цилиндрическая аппроксимация (1.41) функции Грина с локальной абсциссой $x \equiv R_w - r$. Для простоты мы полагаем, что стенка имеет постоянные толщину и проводимость, поэтому весовой множитель (3.21) в (3.25) принимает вид $h(\ell) = R_w/r(\ell)$.

Чтобы решить уравнение (3.32) с помощью ранее развитой техники, нужно представить функцию Грина в виде ряда Фурье по полоидальному параметру

$$\vartheta_w \equiv 2\pi \frac{\ell}{P_w}. \quad (3.33)$$

Для этого зададим эллиптический контур стенки простой параметризацией $x = b_w \cos \vartheta_w$ и $z = K_w b_w \sin \vartheta_w$ и используем формулу (1.59) с $\eta = 1$. Тогда уравнение (3.32) превращается в формальное равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{r}{R_w}} \frac{X_m}{\lambda_m} &= C_0 \alpha_0 - C_1^+ \frac{\varepsilon_w}{2} + \left(C_1^+ \alpha_1^+ - C_0 \frac{\varepsilon_w}{2} \right) \cos \vartheta_w + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [C_{k+1}^+ \alpha_{k+1}^+ \cos(k+1)\vartheta_w + C_k^- \alpha_k^- \sin k\vartheta_w], \end{aligned} \quad (3.34)$$

где

$$\alpha_0 \equiv \ln \frac{16R_w}{b_w(K_w + 1)} - 2, \quad (3.35)$$

$$\alpha_k^{\pm} \equiv \frac{1}{k} \left[1 \pm \left(\frac{1 - K_w}{1 + K_w} \right)^k \right] \quad (3.36)$$

— геометрические факторы, зависящие от малого радиуса стенки b_w и её вытянутости K_w , а

$$C_k^+ \equiv \frac{P_w}{4\pi^2 b_w} \int_0^{2\pi} X_m(\vartheta_w) \cos k\vartheta_w d\vartheta_w, \quad (3.37)$$

$$C_k^- \equiv \frac{P_w}{4\pi^2 b_w} \int_0^{2\pi} X_m(\vartheta_w) \sin k\vartheta_w d\vartheta_w. \quad (3.38)$$

— неизвестные коэффициенты. Чтобы их вычислить, проинтегрируем (3.34) почленно с весами 1, $\cos k\vartheta_w$ и $\sin k\vartheta_w$. В результате получим систему уравнений

$$(E - \lambda_m A) \mathbf{x} = 0, \quad (3.39)$$

где E — единичная матрица, $\mathbf{x} \equiv [C_0 \ C_1^+ \ C_1^- \ \dots \ C_k^+ \ C_k^- \ \dots]^T$ — вектор-столбец, а

$$A = \frac{L}{4\pi b_w} \left(\begin{array}{cc|c} 2\alpha_0 & -\varepsilon_w & 0 \\ -\varepsilon_w/2 & \alpha_1^+ & 0 \\ \hline 0 & 0 & D \end{array} \right) \quad (3.40)$$

— матрица с диагональным блоком $D = \text{diag}\{\alpha_1^-, \alpha_2^+, \alpha_2^-, \dots, \alpha_k^+, \alpha_k^-, \dots\}$.

Система (3.39) имеет нетривиальные решения только при условии $\det(E - \lambda_m A) = 0$, представляющем собой дисперсионное соотношение

$$\left[\left(\frac{2\pi b_w}{\alpha_0 L} - \lambda_m \right) \left(\frac{4\pi b_w}{\alpha_1^+ L} - \lambda_m \right) - \frac{\varepsilon_w^2}{2} \lambda_m^2 \right] \prod_{k \geq 1} \left(\frac{4\pi b_w}{\alpha_k^- L} - \lambda_m \right) \left(\frac{4\pi b_w}{\alpha_{k+1}^+ L} - \lambda_m \right) = 0. \quad (3.41)$$

Каждому из его решений соответствует некоторый корень $\mathbf{x}$ системы (3.39), а значит, конкретная функция $\sqrt{r} X_m$, определяемая равенством (3.34). Например, в пренебрежении поправками порядка ε_w^2 первым решением (3.41) является

$$\lambda_0 = \frac{4\pi b_w}{L} \cdot \frac{2\alpha_0 + \alpha_1^+ - \sqrt{(2\alpha_0 - \alpha_1^+)^2 + 2\varepsilon_w^2}}{4\alpha_0\alpha_1^+ - \varepsilon_w^2} \simeq \frac{2\pi b_w}{\alpha_0 L}, \quad (3.42)$$

и соотношение (3.34) принимает вид

$$X_0(\vartheta_w) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \varepsilon_w \cos \vartheta_w)}} \left[1 - \frac{\varepsilon_w}{2\alpha_0 - \alpha_1^+} \cos \vartheta \right]. \quad (3.43)$$

Второму решению уравнения (3.41)

$$\lambda_1 = \frac{4\pi b_w}{L} \cdot \frac{2\alpha_0 + \alpha_1^+ + \sqrt{(2\alpha_0 - \alpha_1^+)^2 + 2\varepsilon_w^2}}{4\alpha_0\alpha_1^+ - \varepsilon_w^2} \simeq \frac{4\pi b_w}{\alpha_1^+ L}, \quad (3.44)$$

согласно равенству (3.34), отвечает собственная функция

$$X_1^+(\vartheta_w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_w \cos \vartheta_w}} \left[\cos \vartheta_w + \frac{\varepsilon_w}{2(2\alpha_0 - \alpha_1^+)} \right], \quad (3.45)$$

а решениям следующих порядков $\lambda_m = 4\pi b_w / (\alpha_m^+ L)$ при $m > 1$ и $\lambda_m = 4\pi b_w / (\alpha_m^- L)$ при $m \geq 1$, аналогично, функции

$$X_m^+(\vartheta_w) = \frac{\cos m\vartheta_w}{\sqrt{1 - \varepsilon_w \cos \vartheta_w}} \quad (3.46)$$

и

$$X_m^-(\vartheta_w) = \frac{\sin m\vartheta_w}{\sqrt{1 - \varepsilon_w \cos \vartheta_w}}. \quad (3.47)$$

Нетрудно убедиться, что система функций $X_m^\pm$ ортогональна на S_w и с точностью до квадратичных по ε_w членов удовлетворяет нормировке $\|X_m\| = 1$.

Поскольку функцию Грина в (3.32) мы раскладывали по малому параметру ε_w , то и в формулах для X_m достаточно ограничиться линейным по ε_w приближением. Как следствие, полоидальная мода $m = 0$ имеет вид

$$X_0(\vartheta_w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{f_w - 1}{2f_w} \varepsilon_w \cos \vartheta_w \right), \quad (3.48)$$

где зависящий от K_w параметр

$$f_w \equiv \frac{2\alpha_0 - \alpha_1^+}{2} = \ln \frac{16R_w}{b_w(K_w + 1)} - \frac{2K_w + 3}{K_w + 1} \quad (3.49)$$

слабо меняется от 0.68 до 0.44 при $\varepsilon_w = 1/3$ и характерных для реальных установок значениях вытянутости $1 < K_w < 2$. Характерное время затухания нулевой (симметричной) моды, получаемое подстановкой λ_0 в (3.30) с учётом (3.35), при этом совпадает с (2.92).

Аналитические выражения (3.45), (3.46) и (3.47) для мод более высокого порядка удобно разделить на симметричные (относительно замены $\vartheta_w \rightarrow -\vartheta_w$)

$$X_1^+(\vartheta_w) = \cos \vartheta_w + \frac{\varepsilon_w}{4} \left(\frac{f_w + 1}{f_w} + \cos 2\vartheta_w \right), \quad (3.50)$$

$$X_m^+(\vartheta_w) = \cos m\vartheta_w + \frac{\varepsilon_w}{4} [\cos(m-1)\vartheta_w + \cos(m+1)\vartheta_w], \quad m > 1 \quad (3.51)$$

и антисимметричные

$$X_m^-(\vartheta_w) = \sin m\vartheta_w + \frac{\varepsilon_w}{4} [\sin(m-1)\vartheta_w + \sin(m+1)\vartheta_w], \quad m > 0, \quad (3.52)$$

т.е. сдвинутые относительно (3.51) на $\pi/2$ по ϑ . Собственные времена затухания гармоник X_m^+ и X_m^- с $m > 0$ даются формулой (3.30) с подстановкой λ_m^+ или λ_m^- ,

$$\tau_m^\pm = \frac{\tau_w}{2m} \sqrt{\frac{K_w^2 + 1}{2}} \left[1 \pm \left(\frac{1 - K_w}{1 + K_w} \right)^m \right], \quad (3.53)$$

где знак «плюс» выбирается для симметричных мод, а «минус» — для антисимметричных. Это соотношение дополняет ранее полученный результат (2.92), определяющей время затухания нулевой моды $X_0(\vartheta_w)$.

3.5. Обсуждение результатов

Выражения (3.48) и (3.50)-(3.52) определяют базисные функции в разложении (3.29), представляющем общее решение уравнения динамики тока в стенке (3.6). Влияние её формы на зависимость функций (3.48) и (3.50)-(3.52) от длины дуги ℓ в нашей задаче характеризуется всего двумя параметрами: аспектным отношением ε_w и вытянутостью K_w вакуумной камеры.

Учёт тороиальности, связанный с удержанием слагаемых порядка ε_w в (3.48) и (3.50)-(3.52), приводит к зацеплению соседних мод, что проявляется в генерации гармоник-сателлитов $m \pm 1$ вдобавок к основной m -ой моде. Эти дополнительные гармоники модулируют амплитуду полоидального распределения тока: величина тока i_ζ^w оказывается несколько выше на внутренней стороне тора, где ϑ_w мало, и меньше на внешней при $\vartheta_w = \pi$. Количество и положение нулей, как следует из аналитических выражений для $X_m^\pm(\vartheta_w)$, совпадает с предсказаниями численного моделирования, выполненного для стенок токамака DIII-D [173], см. там рис. 2, ИТЭР [111], см. там рис. 5, и COMPASS-U [51], см. там рис. 5.

Подстановка (3.48) и (3.50)-(3.52) в (3.29) позволяет найти распределение $i_\zeta^w(\ell, t)$ в произвольный момент времени t . Амплитуда $i_\zeta^w(\ell, t)$, как следует из (3.31), определяется временам жизни собственных мод τ_m , которые даются формулами (2.92) и (3.30). Их величина убывает обратно пропорционально полоидальному номеру m . Заметим, что по сравнению со значением

$$\tau_m^{\text{circ}} = \frac{\tau_w}{2m} \quad (3.54)$$

для круглой камеры, известным в теории RWM [119,134,171,176] и содержащимся в (3.53) как частный случай при $K_w = 1$, времена $\tau_m^\pm$ увеличиваются за счёт вытянутости вакуумной камеры. Кроме того, их величина теперь различается для симметричных и антисимметричных мод, см. Рис. 8.

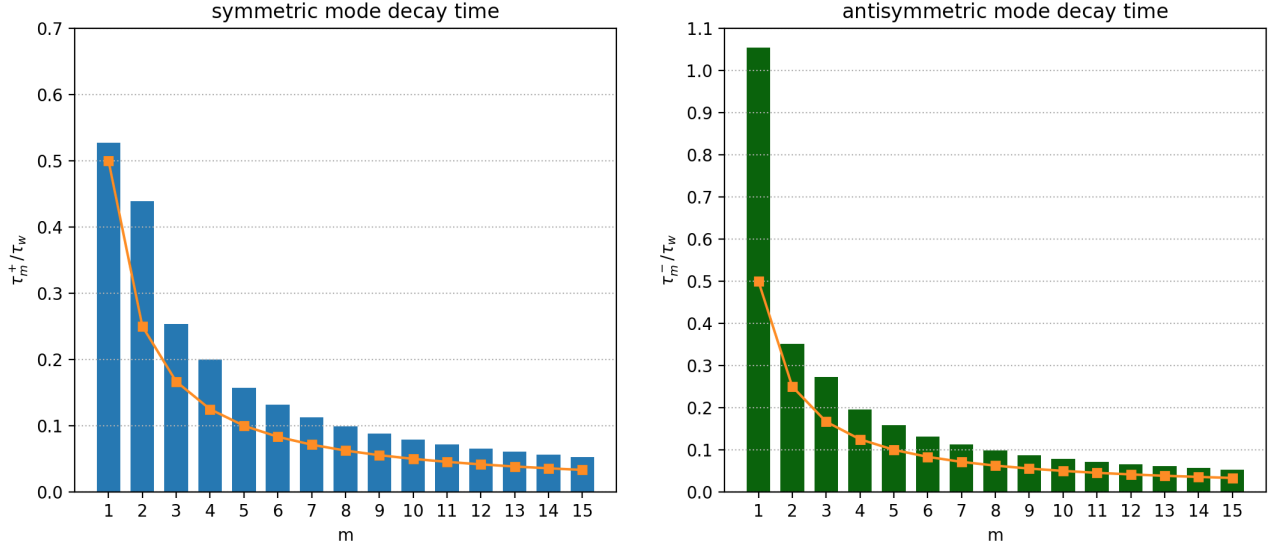


Рис. 8. Времена затухания собственных мод вакуумной камеры в зависимости от полоидального номера m при $K_w = 2$ в единицах τ_w . Синие столбцы соответствуют τ_m^+ , вычисленным по формуле (3.53) со знаком «+» там, а зелёные — со знаком «-». Для сравнения оранжевой диаграммой с точками показано время $\tau_m^{\text{circ}} / \tau_w = 1/(2m)$.

Знание констант времени $\tau_m^\pm$ необходимо для выделения наиболее долгоживущих мод в общем решении (3.29). При этом точное число и номера мод, которые необходимо сохранять в (3.29), зависит от конкретных сценариев. Например, всего две моды, $m = 0$ и симметричная $m = 1$, хорошо определяют реакцию стенки круглого сечения на смещение плазмы по большому радиусу [119,120], и три — антисимметричные с $m = 1 \div 3$ — на VDE с изменением формы шнура в токамаке ИТЭР [111]. В случае VDE с однородным вертикальным смещением главной является антисимметричная $m = 1$ гармоника, см. расчёты для токамака CFETR [33]. Столь малое число собственных мод стенки, необходимых для правильного описания её реакции, объясняется быстрым падением времени жизни моды $\tau_m^\pm$ с увеличением номера m .

В Табл. 3 приведены значения $\tau_m^\pm$, найденные аналитически с помощью (3.53) и численно для стенок токамаков RTO/RC-ITER в варианте Low Aspect-ratio Machine (LAM) и COMPASS-U [51, 111]. Для оценки константы $\tau_w = 11.73$ мс камеры COMPASS-U мы использовали следующие параметры [189]:

$R_w = 0.94$ м, $b_w = 0.39$ м, $K_w = 1.93$, $\sigma = 7.3 \times 10^6$ СМ/м и $d_w = 0.94$ мм. В то же время в [111] времена $\tau_m^\pm$ вычислены для стенки RTO/RC-ITER без указания её проводимости и толщины, поэтому мы приводим только отношения времён $\tau_m^\pm/\tau_1^\pm$ отдельно для симметричных и антисимметричных мод. Как мы видим, формула (3.53) ухватывает тенденцию к уменьшению времени жизни моды с ростом m и качественно согласуется с численными расчетами, см. Рис. 9. Заметное отличие возникает только при сравнении τ_1^-/τ_0 , для которой аналитика даёт значение, завышенное на 36% для RTO/RC-ITER и 35% для COMPASS-U

COMPASS-U			RTO/RC-ITER (LAM)			
τ_m , мс	Числ. [51]	Аналит.	Mode # [111]	τ_m/τ_0	Числ. [111]	Аналит.
τ_0	15	14.35	1	τ_0 , ms	536	—
τ_1^+	5.4	6.15	3	τ_1^+/τ_0	0.39	0.43
τ_1^-	8.1	11.87	2	τ_1^-/τ_0	0.55	0.86
τ_2^+	3.8	4.96	4	τ_2^+/τ_0	0.30	0.36
τ_2^-	4.1	4.05	5	τ_2^-/τ_0	0.28	0.29
τ_3^+	2.9	2.91	7	τ_3^+/τ_0	0.20	0.21
τ_3^-	2.7	3.10	6	τ_3^-/τ_0	0.20	0.22

Таблица 3. Константы времени $\tau_m^\pm$, рассчитанные аналитически с помощью (3.53) и численно для стенки токамаков RTO/RC-ITER [111] и COMPASS-U [51].

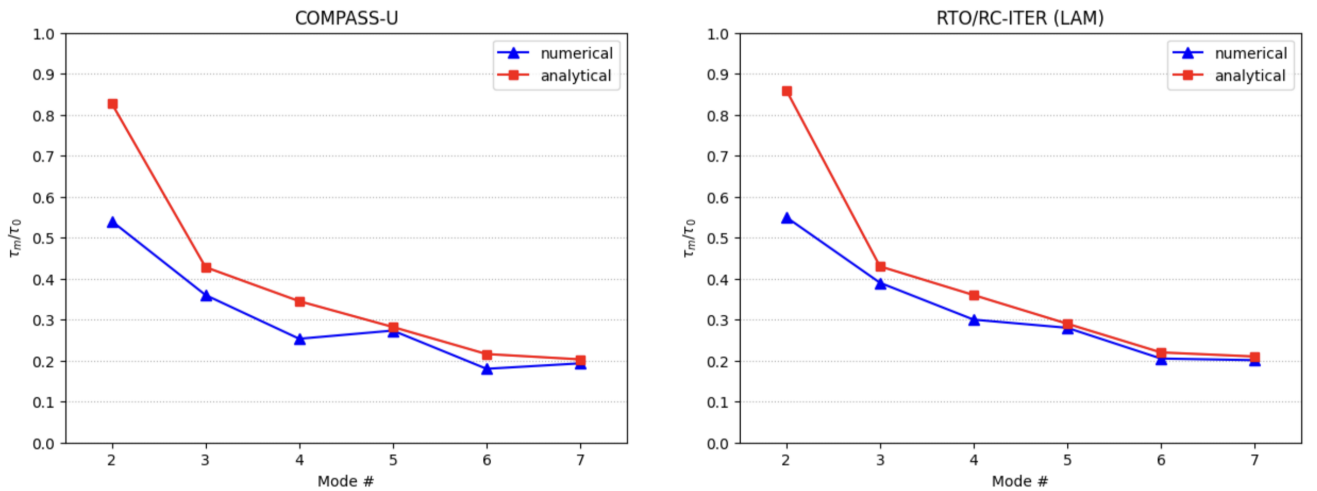


Рис. 9. Сравнение отношения времён $\tau_m^\pm/\tau_0$, рассчитанных аналитически с помощью (3.53) и численно для стенки токамака COMPASS-U [51] и RTO/RC-ITER [111], см. Табл. 3.

Данные сравнения представляют весьма хороший результат для аналити-

ки, учитывая, что наши построения были выполнены в модели стенки с большим аспектным отношением и эллиптическим сечением. Такое приближение сильно отличается от вакуумных камер токамаков RTO/RC-ITER (LAM) и COMPASS-U. В первую очередь, аспектное отношение $A = R_w/b_w$ у стенок RTO/RC-ITER (LAM) и COMPASS-U невелико и равно 2 и 2.4, тогда как линеаризация функции Грина по параметру $\varepsilon_w = b_w/R_w$ в (3.32) достаточно точна при $A > 3$. Во-вторых, камеры RTO/RC-ITER (LAM) и COMPASS-U обладают довольно сложной структурой: стенка RTO/RC-ITER (LAM) является двойной, а камера COMPASS-U имеет вид D-образного шестиугольника с многочисленными портами. Поэтому полезным было бы сравнение с численными расчётами собственных мод в стенке, подобной рассматривавшейся в этой главе.

Для этого разобьём вакуумную камеру, сечение которой описывается уравнением эллипса, на $N = 360$ кольцевых филаментов. Каждый филамент представляет собой кольцо с квадратным сечением, характеризуемым в цилиндрических координатах начальной и конечной точками (r_{1k}, z_{1k}) и (r_{2k}, z_{2k}) , т.е. левой нижней и правой верхней вершинами квадрата. Каждый такой элемент индуктивно связан с остальными $N - 1$ проводниками, поэтому ток J_k в k -м филаменте описывается стандартным законом Кирхгофа

$$L_k \dot{J}_k + R_k J_k = - \sum_{j \neq k} M_{kj} \dot{J}_j + V_k, \quad (3.55)$$

где L_k и R_k — коэффициент самоиндукции и сопротивление филамента, M_{kj} — коэффициент взаимной индукции с j -м филаментом, а V_k — ЭДС, см. уравнения (1) в [111] и (1) в [130]. Суммирование в правой части проводится по N филаментам, так что (3.55) определяет систему линейных дифференциальных уравнений.

Решением (3.55) при заданных матрицах $\hat{L} = \{L_k\}_{k=1}^{360}$, $\hat{R} = \{R_k\}_{k=1}^{360}$, $\hat{M} = \{M_{kj}\}_{k=1, j=1}^{360}$ и известных V_k является N -мерный «вектор тока» $\mathbf{x} = (J_1, J_2, \dots, J_{360})$. В общем случае он может быть разложен по системе собственных векторов $\mathbf{x}_m$, которые имеют физический смысл собственных мод тока в стенке. Процедура их численного определения описана в работе [111] с приложениями к задачам устойчивости плазмы в токамаке ИТЭР. Для сравнения с собственными решениями системы (3.55) аналитические результаты (3.48) и

(3.50)-(3.52) необходимо также превратить в векторы тока, которые мы обозначим как $\mathbf{X}_m$.

Выражения (3.48) и (3.50)-(3.52) описывают угловую структуру токовых мод, поэтому удобно связать филаменты с полоидальным углом

$$\vartheta_k = \arctg \frac{z_{1k} + z_{2k}}{K_w(r_{1k} + r_{2k} - 2R_w)}, \quad (3.56)$$

определяющим положение центра k -го филамента. Переменная длина дуги ℓ , служащая аргументом функций $X_m(\ell)$, связана с этим углом неполным эллиптическим интегралом второго рода

$$\ell(\vartheta_k) = K_w b_w E(\vartheta_k, e_w) \equiv b_w \int_0^{\vartheta_k} \sqrt{K_w^2 - (K_w^2 - 1) \sin^2 \vartheta_k} d\vartheta_k, \quad (3.57)$$

где $e_w = \sqrt{1 - 1/K_w^2}$ — эксцентриситет. Таким образом, каждой компоненте 360-мерного вектора $\mathbf{X}_m$ соответствует значение собственной функции $X_m[\ell(\vartheta_k)]$ в точке ϑ_k

Укажем, что данные компоненты имеют смысл величины поверхностной плотности тока $i_\zeta^w(\ell)$ в k -м филаменте. Учитывая, что полный ток в нём связан с i_ζ^w равенством

$$J_k = i_\zeta^w[\ell(\vartheta_k)]\ell'(\vartheta_k), \quad (3.58)$$

где $\ell'(\vartheta_k) = K_w b_w \sqrt{1 - e_w^2 \sin^2 \vartheta_k}$, из функций $X_m[\ell(\vartheta_k)]$ получаем систему собственных векторов тока в филаментах

$$\overline{\mathbf{X}}_m(\vartheta_k) = \left\{ \frac{X_m[\ell(\vartheta_k)]\ell'(\vartheta_k)}{\max_{1 \leq k \leq 360} |X_m[\ell(\vartheta_k)]\ell'(\vartheta_k)|} \right\}_{k=1}^{360}. \quad (3.59)$$

Построенные таким образом «аналитические» собственные векторы тока $\overline{\mathbf{X}}_m$ аналогичны «численным»

$$\mathbf{x}_m = \frac{\mathbf{x}_m(\vartheta_k)}{\max_{1 \leq k \leq 360} |\mathbf{x}_m(\vartheta_k)|}, \quad (3.60)$$

в которых $\mathbf{x}_m$ определяется из системы уравнений (3.55). Заметим, что $\mathbf{X}_m$ и $\mathbf{x}_m$ могут быть определены лишь с точностью до коэффициента, поэтому в (3.59) и (3.60) введена нормировка на единицу путём деления на максимальную

компоненту вектора. Эти выражения готовы для прямого сравнения результатов, найденных аналитически с помощью развитого нами метода и численно в рамках подхода [111, 130]. Сравнение производится для двух конфигураций вакуумных камер: $R_w = 6.2$ м, $b_w = 2$ м и $K_w = 1$ (C1) и $R_w = 6.2$ м, $b_w = 2$ м и $K_w = 2$ (C2). Большой и малый радиусы здесь примерно соответствуют камере токамака ИТЭР.

Сравнение (3.59) и (3.60) для первых четырёх мод с $m = 0 - 3$ в конфигурации C1 представлено на Рис. 10. По горизонтальной оси отложена угловая координата филаментов ϑ_k , меняющаяся от 0 при $k = 1$ до 2π при $k = 360$. Ввиду достаточно большой мелкости разбиения стенки ($N = 360$) графики представляют собой непрерывные линии. Структура моды, предсказываемая аналитически по формуле (3.59), показана сплошной красной кривой, а численный результат (3.60) изображён синим пунктиром. Аналогичное сравнение, но для старших мод $m = 4 - 7$ приведено на Рис. 11.

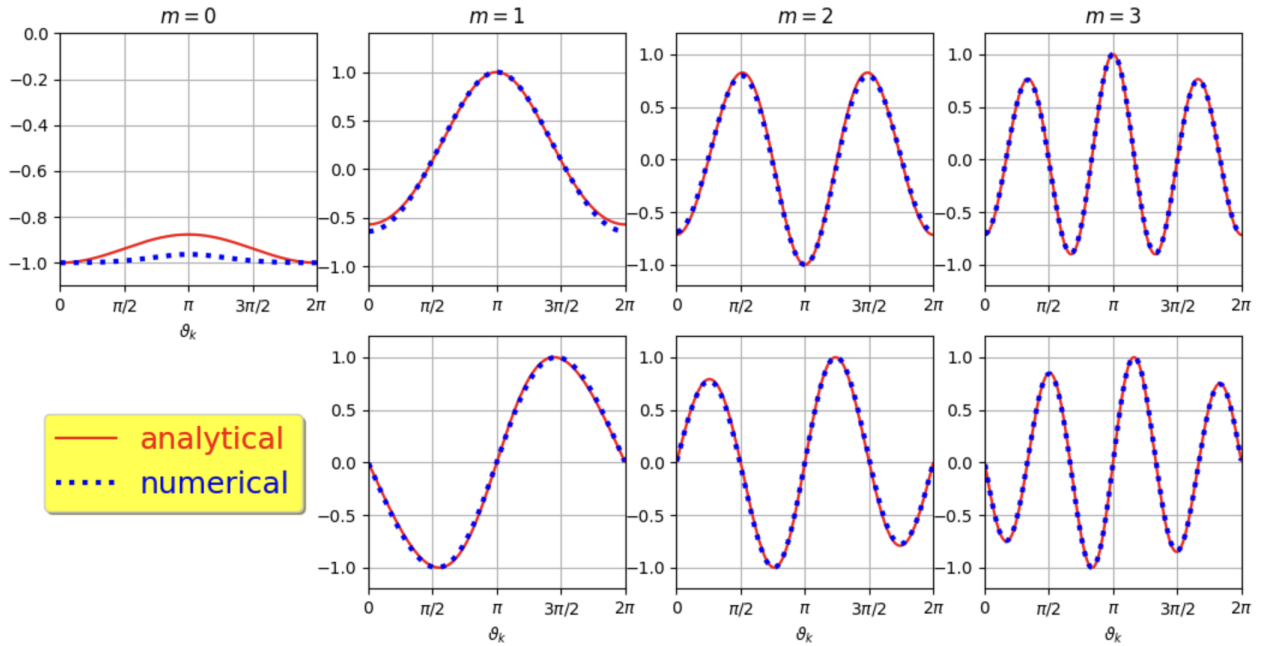


Рис. 10. Полоидальная структура собственных мод тока $m = 0 - 3$ в вакуумной камере C1 с большим радиусом $R_w = 6.2$ м, малым радиусом $b_w = 2$ м и вытянутостью $K_w = 1$ (круглое сечение). Красным показана аналитически предсказываемая структура моды (3.59), а синим численный результат (3.60). Верхний ряд соответствует симметричным модам (относительно замены $\vartheta_k \rightarrow -\vartheta_k$), а в нижнем изображены антисимметричные.

Для стенки с круглым сечением между графиками (3.59) и (3.60) имеется почти полное совпадение, лишь с небольшим выступом $\bar{\mathbf{X}}_0(\vartheta_k)$ (красный) отно-

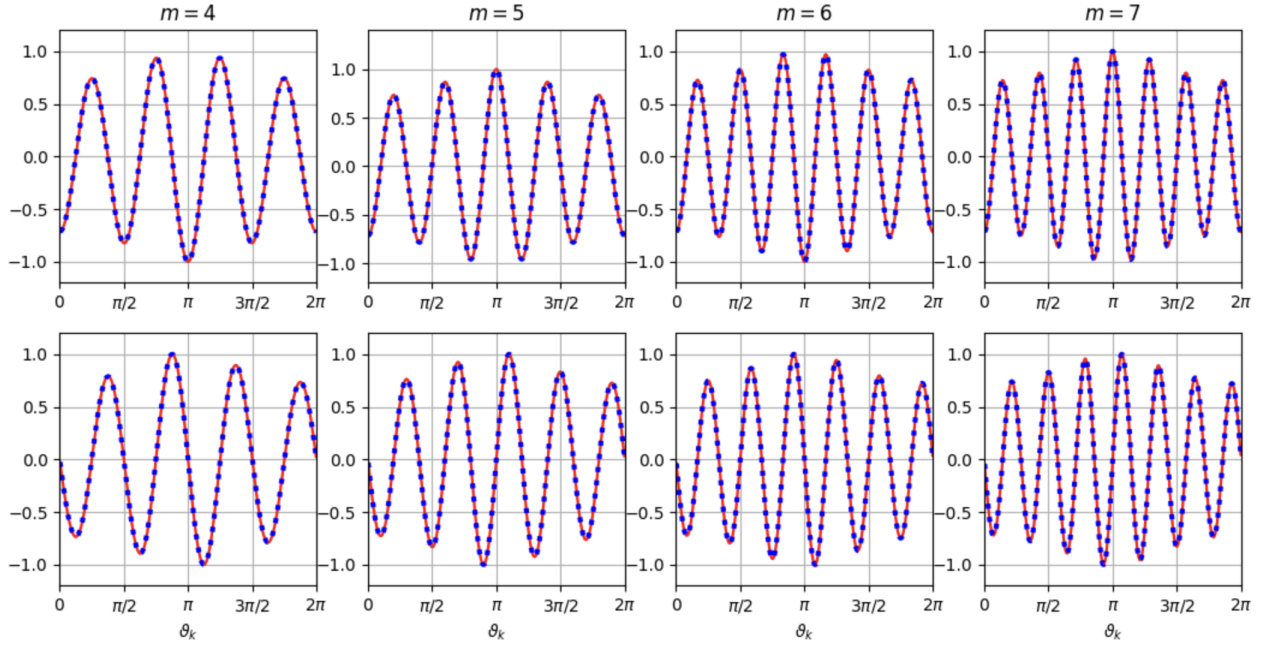


Рис. 11. Полоидальная структура собственных мод тока $m = 4 - 7$ в вакуумной камере C1 с большим радиусом $R_w = 6.2$ м, малым радиусом $b_w = 2$ м и вытянутостью $K_w = 1$ (круглое сечение). Красным показана аналитически предсказываемая структура моды (3.59), а синим численный результат (3.60). Верхний ряд соответствует симметричным модам (относительно замены $\vartheta_k \rightarrow -\vartheta_k$), а в нижнем изображены антисимметричные.

сительно $\bar{\mathbf{x}}_0(\vartheta_k)$ (синий) при $m = 0$. Все построенные кривые с хорошей точностью представляют собой обычные тригонометрические функции, но слегка модулированные по амплитуде из-за тороидальности, см. поправку порядка ε_w в (3.48) и (3.50)-(3.52). Столь высокое согласие между аналитическими и численными расчётами подтверждает правомерность использования предела большого аспектного отношения в аналитических расчётах, а незначительные отклонения обусловлены линейной аппроксимацией функции Грина в (3.32). Для полноты мы приводим также сравнение времён τ_m на Рис. 12, где также достигается согласие.

При учёте вытянутости $K_w = 2$ полоидальное распределение тока в стенке заметно искажается, см. Рис. 13 и 14. В амплитудную модуляцию дополнительный вклад вносит произведение $X_m[\ell(\vartheta_k)]$ на элемент длины стенки $\ell'(\vartheta_k)$ в (3.59). Также в структуре моды возникает заметная фазовая модуляция, связанная с зависимостью натуральной координаты ℓ от угла ϑ_k предписываемой (3.57). Здесь аналитическая теория также оказывается в хорошем количественном согласии с численными расчётами, см. также сравнение τ_m на Рис. 15

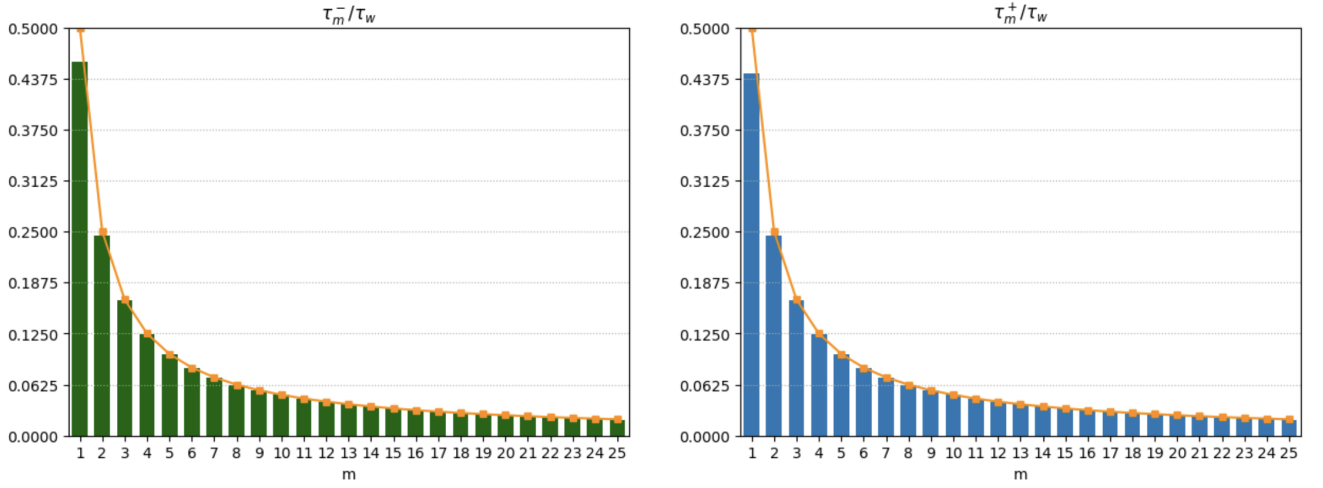


Рис. 12. Времена затухания собственных мод вакуумной камеры C1 в единицах τ_w . Синие столбцы соответствуют τ_m^+ , вычисленным по формуле (3.53) со знаком «+» там, а зелёные — со знаком «-», а оранжевой диаграммой с точками показаны численные предсказания $\tau_m^\pm$.

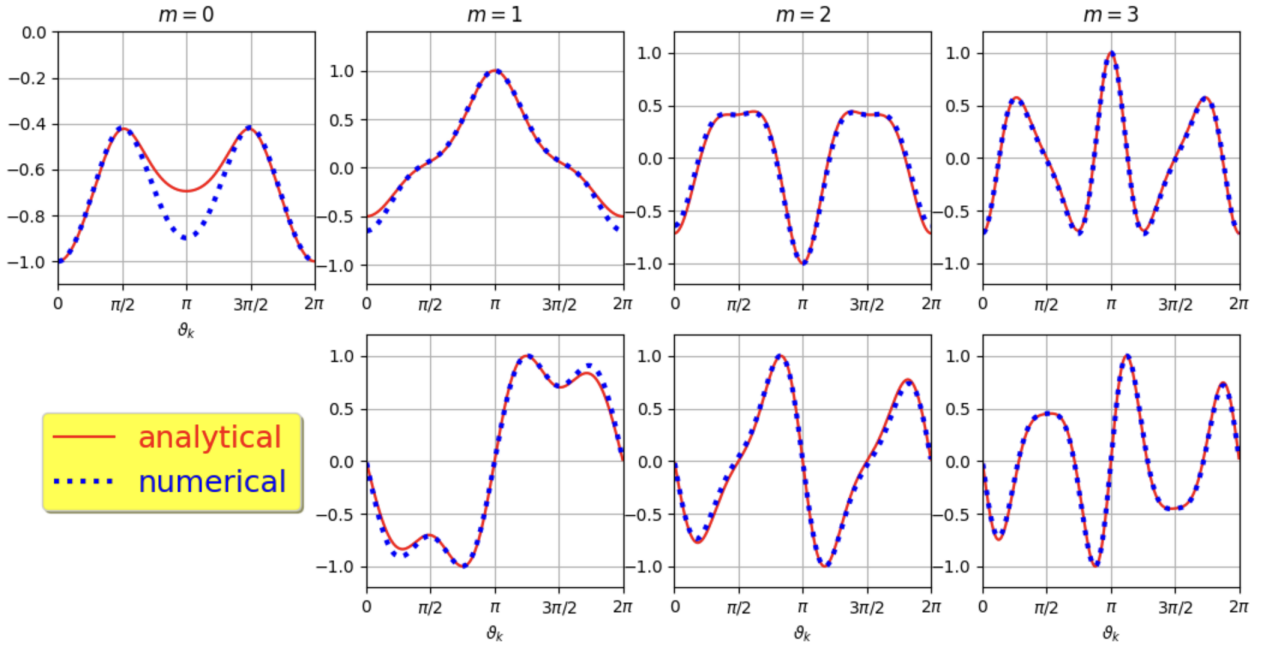


Рис. 13. Полоидальная структура собственных мод тока $m = 0 - 3$ в вакуумной камере C2 с большим радиусом $R_w = 6.2$ м, малым радиусом $b_w = 2$ м и вытянутостью $K_w = 2$. Красным показана аналитически предсказываемая структура моды (3.59), а синим численный результат (3.60). Верхний ряд соответствует симметричным модам (относительно замены $\vartheta_k \rightarrow -\vartheta_k$), а в нижнем изображены антисимметричные.

Отмеченное на Рис. 10 различие предсказаний амплитуды моды $m = 0$ из-за вытянутости камеры несколько увеличивается, см. Рис. 13. Также имеется разница в оценке времени затухания антисимметричной моды τ_1^- , для которой аналитика даёт значение, завышенное на 31% по сравнению с численным. Подобное отличие порядка 30% уже наблюдалось при сравнении с численными

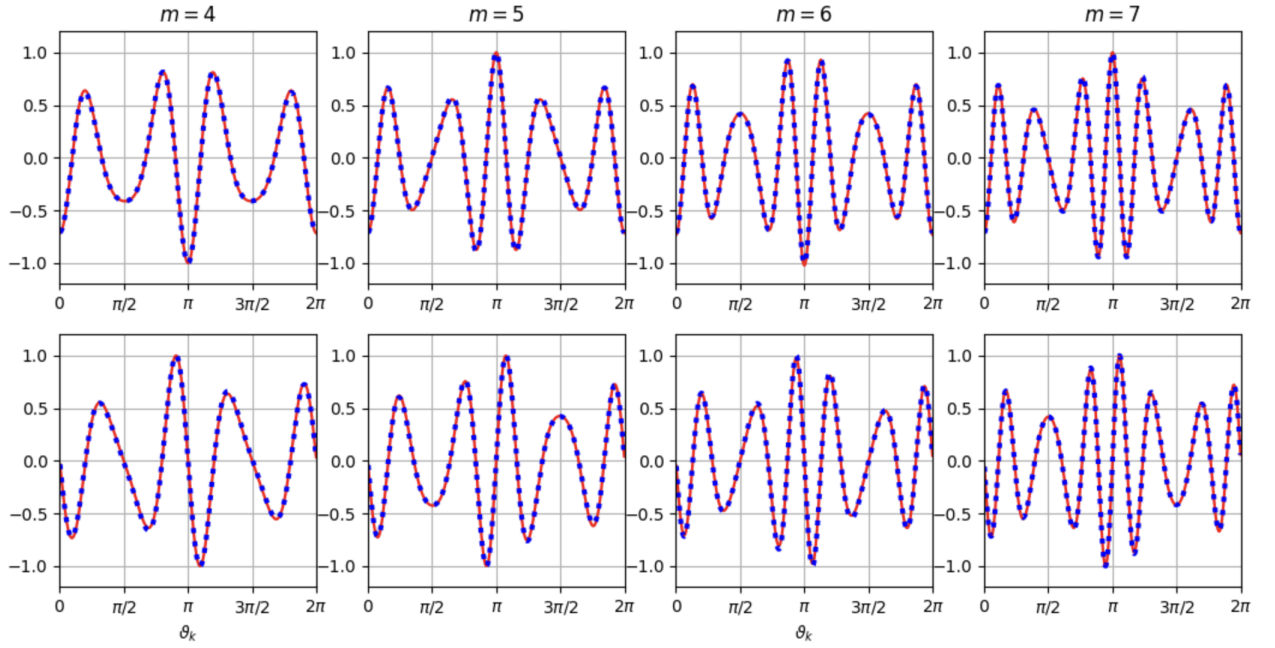


Рис. 14. Полоидальная структура собственных мод тока $m = 4 - 7$ в вакуумной камере C2 с большим радиусом $R_w = 6.2$ м, малым радиусом $b_w = 2$ м и вытянутостью $K_w = 2$. Красным показана аналитически предсказываемая структура моды (3.59), а синим численный результат (3.60). Верхний ряд соответствует симметричным модам (относительно замены $\vartheta_k \rightarrow -\vartheta_k$), а в нижнем изображены антисимметричные.

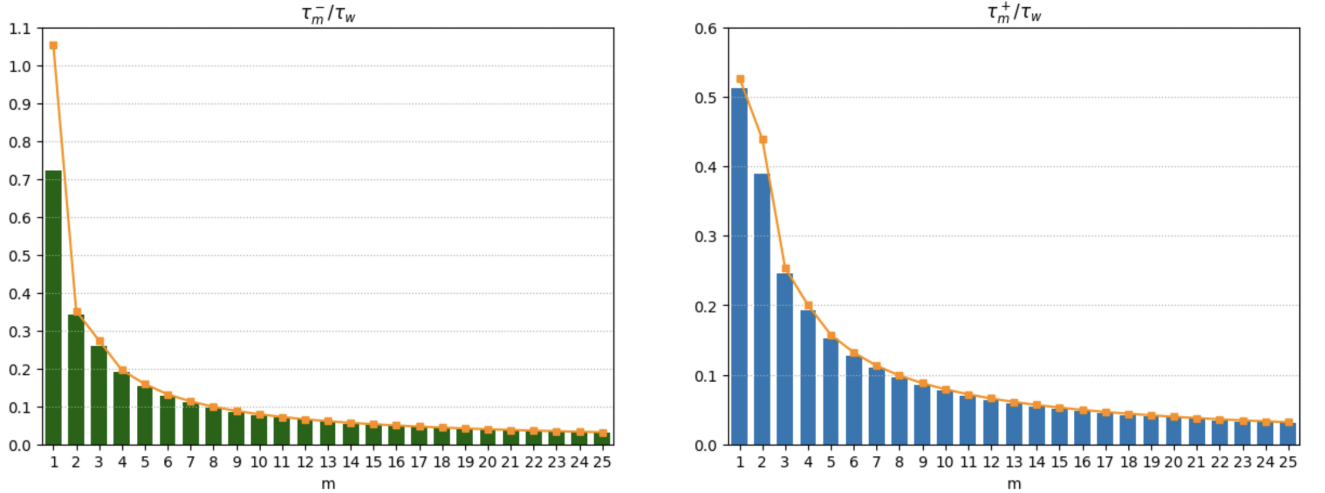


Рис. 15. Времена затухания собственных мод вакуумной камеры C2 в единицах τ_w . Синие столбцы соответствуют τ_m^+ , вычисленным по формуле (3.53) со знаком «+» там, а зелёные — со знаком «-», а оранжевой диаграммой с точками показаны численные предсказания $\tau_m^\pm$.

расчётами τ_1^- для токамаков COMPASS-U и RTO/RC-ITER, что указывает на ухудшение точности линеаризации функции Грина по малому параметру ε_w в сильно вытянутых стенках. По видимости, причина в том, что на контуре интегрирования теперь имеется точка $(R_w, K_w b_w)$, в окрестности которой отношение локального малого радиуса к большому $K_w b_w / R_w = 2/3$ уже не слишком

мало. В то же время для всех остальных мод совпадение между кривыми для (3.59) и (3.60) практически идеальное, что указывает на необходимость лишь небольшого уточнения вычислений с функцией Грина в (3.25), а именно учёта квадратичной поправки ε_w^2 в разложении (1.40).

3.6. Выводы главы 3

В третьей главе получены выражения (3.48), (3.50)-(3.52) для собственных мод тока в вытянутой тороидальной камере токамака. Они представляют собой базисные функции в разложении тока (3.29), которое вместе с формулой для амплитуд (3.31) и временами их затухания (2.92), (3.53) содержит полную информацию о распределении тока в стенке. Решением (3.29) и сопутствующими результатами можно пользоваться как при моделировании реакции стенки на переходные процессы, когда известно внешнее магнитное возмущение ψ^s , так и при описании перераспределения тока после завершения переходного процесса. Последнее особенно актуально в задачах вычисления сил на стенку при срывах, поскольку известно, что амплитуда силы на стенку может быть значительной уже после CQ и гибели разряда [40, 51, 52, 57, 117].

Ключевым достоинством разложения тока по системе собственных мод является инвариантность последних относительно типа магнитного возмущения. Полоидальная структура мод (3.48), (3.50)-(3.52), а также константы времени (2.92), (3.53) определяются только параметрами стенки. В нашей задаче это её резистивное время τ_w , зависящее от проводимости, толщины и малого радиуса камеры, а также вытянутость её сечения K^w . Это делает развитый здесь подход в определённой степени универсальным, поскольку его применение к конкретным сценариям, таким как эволюция равновесия плазмы по большому радиусу и VDE, в том числе в комбинации с TQ и CQ, требует только вычисления амплитуд (3.31) в каждом интересующем случае.

Метод собственных мод представляется особенно удобным для аналитических приложений благодаря компактности и простоте вычислений, что обеспечивается возможностью удержания в разложении тока (3.29) всего нескольких слагаемых. Это открытие, впервые сделанное с применением численного мо-

делирования реакции вакуумной камеры ИТЭР на аксиально-симметричные RWM (т.е. VDE с деформацией сечения плазмы) [111], теперь объяснено с позиций строгой аналитической теории, основанной на анализе уравнений Максвелла и закона Ома в стенке.

Для тороидальной вакуумной камеры с эллиптическим сечением найдены формулы характерных времён затухания мод (2.92) и (3.53), показывающие, что известная в теории RWM обратная зависимость τ_m от m для «круглой» камеры сохраняется и при конечных $K_w > 1$. Это гарантирует более быстрое затухание старших гармоник тока в (3.29) по сравнению с длинноволновыми, что и позволяет ограничиться всего 2–3 модами резистивной стенки в задачах равновесия, см. примеры в [119, 120]. При этом показано, что вытянутость камеры приводит к увеличению τ_m по сравнению с формулой (3.30) при всех m , а также к различию времён затухания у симметричных и антисимметричных относительно экваториальной плоскости мод.

Явная зависимость констант времени (2.92), (3.53) от параметров стенки вакуумной камеры и выражения (3.48), (3.50)–(3.52) найдена здесь в модели тонкой тороидальной оболочки с эллиптическим сечением. В то же время общее разложение (3.29) тока по собственным модам и определяющая их спектральная задача (3.25) получены как следствия только уравнений электродинамики и стандартных математических операций. Поэтому результаты (3.29) и (3.25) справедливы для камер произвольной формы и любого аспектного отношения, а также учитывают неоднородности проводимости $\sigma(\ell)$ и толщины $d_w(\ell)$. Поэтому помимо чисто аналитических приложений формулы (3.29) и (3.25) могут быть использованы в сочетании с численными кодами для существенного упрощения расчётов по сравнению с дискретизацией вакуумной камеры на десятки и сотни филаментов.

4. Аналитическая оценка времени развития вертикальной неустойчивости (VDE) в токамаке с резистивной стенкой

В четвертой главе развитая в диссертации аналитическая модель равновесия вытянутой плазмы применяется для оценки характерного времени развития τ_{VDE} «горячего» VDE в токамаке с резистивной стенкой. Использование результатов теории равновесия в этой задаче может показаться неожиданным, поскольку вычисление инкремента $\gamma_{\text{VDE}} = 1/\tau_{\text{VDE}}$ относится к теории устойчивости и производится путём нахождения частоты МГД-возмущения, описываемого уравнением (1) в пределе малого ξ [91–96, 104–108], либо с помощью вариационного принципа (метод интегралов энергии) [79, 135, 136]. Эти методы универсальны и надёжны, но часто сложны для практических вычислений. Например, расчёты интегралов энергии весьма объёмны даже в цилиндрических конфигурациях с круглой плазмой и идеальной стенкой [91, 92, 96]. При оценке времени τ_{VDE} требуется учитывать конечную проводимость стенки, а также вытянутость плазмы, что ещё больше усложняет задачу. С другой стороны, динамическая реакция стенки препятствует инерционному движению плазмы, поэтому VDE можно представить как последовательность квазистатических состояний равновесия.

При подобном «равновесном» подходе к вычислению τ_{VDE} дисперсионное соотношение для неустойчивости должно быть выведено из уравнения диффузии магнитного поля сквозь резистивную стенку. Это исключает возможность анализа быстрых мод, развивающихся за альфвеновское время, но позволяет сравнительно просто и эффективно исследовать VDE со временем развития порядка резистивного времени стенки (2.65). Необходимость в этой части работы связана с тем, что медленные VDE всегда рассматривались в теории устойчивости только ценой значительного упрощения физической модели. Примерами являются обзор Дж. Вессона [73] и недавняя серия публикаций коллектива авторов под руководством Ф. Порчелли [55, 75, 76, 78]. В обоих случаях VDE представляет собой МГД-возмущение $n/m = 0/1$ цилиндрического равновесия

в модели Р. Гаевского [97], где n и m — продольное и полоидальное волновые числа. При этом для упрощения расчётов в [55, 73, 75, 76, 78] сечение стенки задаётся эллипсом, конфокальным границе плазмы, см. уравнение (3).

Мы упоминаем здесь последнее ограничение, поскольку оно почти не обсуждалось в [73] и [55, 75, 76, 78]. Пределы применимости модели с «конфокальной» стенкой в задачах для токамаков также не исследовались, и остаётся неясным, насколько достоверными можно считать получаемые на её основе предсказания в системах, где конфокальность заведомо отсутствует. Исчерпывающий ответ на этот вопрос может быть получен лишь при сравнении с выражением для τ_{VDE} , полученным без сильного ограничения (3). Это приводит к существенному усложнению вычислений, но возникающие трудности удаётся преодолеть с помощью развитых в предыдущих главах математических методов.

4.1. Обзор и сравнение существующих аналитических моделей VDE и оценок τ_{VDE}

В работе [134] было доказано в качестве теоремы, что стабилизирующий эффект стенки вакуумной камеры на крупномасштабные возмущения плазмы возрастает при уменьшении объёма вакуумного промежутка. Отсюда следует, что размеры зазора должны так или иначе входить в выражение для характерного времени τ_{VDE} через геометрические параметры конфигурации.

В модели с эллиптическими сечениями плазмы и стенки горизонтальная ширина промежутка между ними даётся разностью малых радиусов $b_w - b$, а вертикальный зазор $K_w b_w - K_b b$ зависит также от вытянутостей K_w и K_b . Впервые аналитическая зависимость инкремента VDE от переменных (b, K_b) и (b_w, K_w) была получена Вессоном в 1978 году и имела вид $\gamma_{\text{VDE}} = 1/\tau_{\text{VDE}}^W$, где

$$\tau_{\text{VDE}}^W = \tau_w \left[\frac{K_b + 1}{K_b - 1} \left(\frac{K_b + 1}{K_w + 1} \right)^2 \frac{b^2}{b_w^2} - 1 \right] \quad (4.1)$$

— характерное время вертикального смещения, см. разделы 1.8 и 2.3.4 обзора [73] и стр. 343 монографии [92]. Хотя данная оценка была выведена в цилиндрическом приближении и только для случая однородной плотности тока [73], она довольно точно воспроизвела измеренные значения инкремента γ_{VDE} на

токамаке JET [190].

Несмотря на почти полувековое существование формулы (4.1) и её успешное сравнение с экспериментом [190], в 2022 году коллективом автором [75, 76] был предложен новый результат

$$\tau_{\text{VDE}}^B = \tau_w \left[\frac{K_b^2 + 1}{(K_b - 1)^2} \frac{K_w - 1}{K_w} - 1 \right], \quad (4.2)$$

заметно отличающийся от формулы Вессона (4.1), см. (7) в [75] и (4.33) в [76], а также (15) в [78]. Как минимум, результат (4.2) не содержит отношения малых радиусов плазмы и стенки b/b_w , явно присутствующего в (4.1). Тем не менее, никаких сравнений τ_{VDE}^B с уже известным выражением τ_{VDE}^W в работах [75, 76] не приводилось, а формула (4.1) там даже не упоминается.

Обе формулы (4.1) и (4.2) дают правильную асимптотику $\tau_{\text{VDE}} \rightarrow \infty$ при $K_b \rightarrow 1$, соответствующую вертикальной устойчивости плазмы с круглым сечением. Однако, эти результаты отличаются при $K_b > 1$, характерных для современных токамаков.

Прежде всего заметим, что формула (4.1) содержит отношение b/b_w , тогда как в (4.2) входят только вытянутости плазмы и стенки. Например, при $K_b = 2$ и $K_w = 1.5$ величина $\tau_{\text{VDE}}^B = 2\tau_w/3$ не зависит от b/b_w , в то время как $\tau_{\text{VDE}}^W = \tau_w[4.32(b/b_w)^2 - 1]$. Из последнего следует, что τ_{VDE}^W положительно при $b/b_w > 0.48$. В общем случае при

$$\frac{b^2}{b_w^2} < \frac{K_b - 1}{K_b + 1} \left(\frac{K_w + 1}{K_b + 1} \right)^2, \quad (4.3)$$

требуемом b/b_w чуть ниже 0.6 при $K_b = K_w = 2$, формула (4.1) даёт $\tau_{\text{VDE}}^W < 0$. Формально это неравенство должно говорить об устойчивости плазмы, однако в действительности [92] оно означает переход к быстрому VDE с характерными временами порядка альфвеновских $\tau_A/\tau_w = O(10^{-3})$. Как поясняется в работе [73], причиной такой неустойчивости является амплитуда токов индукции в стенке, которая при условии (4.3) недостаточна для замедления движения плазмы.

Ещё одно противоречие проявляется в пределе $K_w \rightarrow 1$, соответствующем круглому сечению стенки. В этом случае формула (4.1) принимает вид

$$\tau_{\text{VDE}}^W = \tau_w \left[\frac{(K_b + 1)^3}{K_b - 1} \frac{b^2}{4b_w^2} - 1 \right] \quad (4.4)$$

с положительной правой частью при довольно слабом условии

$$\frac{b^2}{b_w^2} > 4 \frac{K_b - 1}{(K_b + 1)^3}. \quad (4.5)$$

В то же время формула (4.2) даёт $\tau_{\text{VDE}}^B = -\tau_w < 0$ при $K_w = 1$. Последнее служит лишь частным случаем отрицательных τ_{VDE}^B при K_w ниже критического значения

$$K_w^{cr} = \frac{K_b^2 + 1}{2K_b}, \quad (4.6)$$

которое возникает из-за наличия множителя $(1 - K_w^{-1})$ в (4.2). Величина K_w^{cr} равна 1.08 при $K_b = 1.5$ и 1.25 при $K_b = 2$. Неравенство $\tau_{\text{VDE}}^B < 0$ при $K_w < K_w^{cr}$ делает формулу (4.2) неприменимой в области $K_w \leq K_w^{cr}$, что отличает её от (4.1), не накладывающей подобных ограничений на K_w .

Различия между (4.1) и (4.2) кажутся неожиданными, поскольку построения и в [73], и в [75, 76] в значительной степени основываются на известной модели Г. Лавалья, Р. Пелла и Дж. Соула [71]. В ней плазма рассматривается как цилиндрический проводник с однородной плотностью тока, а стенка считается тонкой резистивной оболочкой S_w эллиптического сечения, конфокального границе плазмы. Последнее, вообще говоря, означает

$$b^2(K_b^2 - 1) = b_w^2(K_w^2 - 1), \quad (4.7)$$

что дублирует (3) в целях удобства чтения. Происхождение и роль этого равенства не обсуждаются в [73] и [75, 76], и только в [71, 72] поясняется, что оно введено для упрощения аналитических вычислений, а именно пренебрежения полоидальной неоднородностью скачка тангенциальной компоненты магнитного поля на поверхности S_w .

Следует заметить, что в приведённом обсуждении мы не учитывали условия (4.7), поэтому сделанные сравнения являются в определённом смысле формальными. Если же b/b_w выразить через равенство (4.7) и подставить в формулу (4.1), она превращается в

$$\tau_{\text{VDE}}^W = \tau_w \left[\left(\frac{K_b + 1}{K_b - 1} \right)^2 \frac{K_w - 1}{K_w + 1} - 1 \right]. \quad (4.8)$$

Такая форма τ_{VDE}^W несколько ближе к τ_{VDE}^B , однако она не устраняет отличия, см. Рис. 16. Например, при $K_b = 2$ и $K_w = 1.9$ отсюда получается $1.79\tau_w$, тогда как формула (4.2) предсказывает $1.37\tau_w$. Разность в $0.42\tau_w$ сопоставима со

временем затухания дипольного тока в стенке $\tau_w/2$, см. (3.54). Из-за этого разногласие между двумя предсказаниями (4.2) и (4.8) может оказаться существенным для системы управления равновесием, так как именно это время требуется корректирующему полю для проникновения внутрь вакуумной камеры.

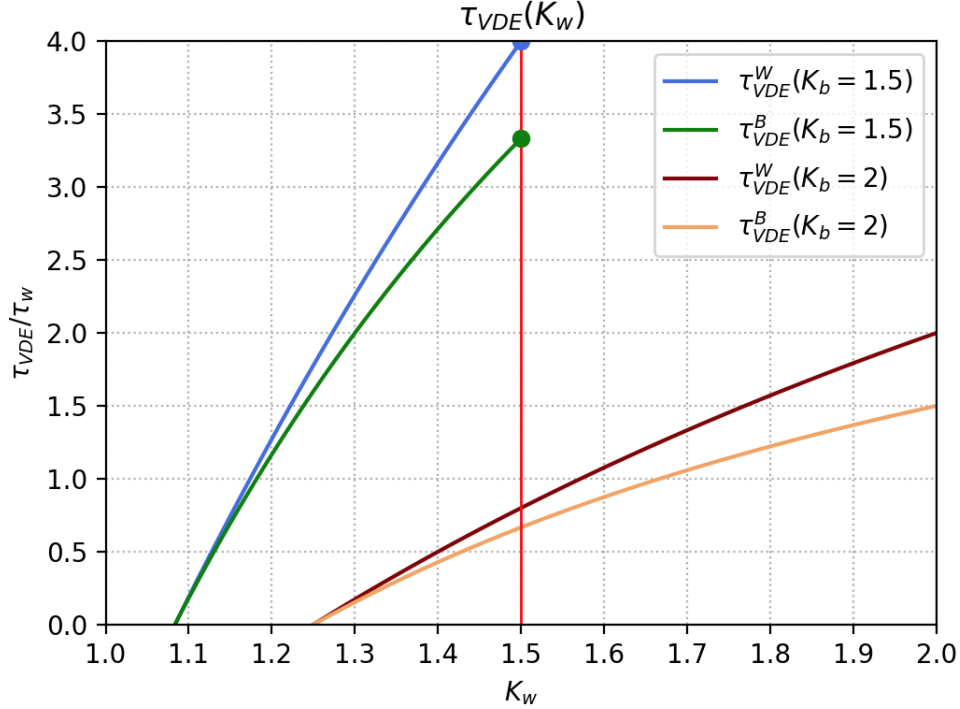


Рис. 16. Сравнение τ_{VDE} , предписываемых формулами (4.2) и (4.8) при $K_b = 1.5$ и 2. Вертикальная красная линия ограничивает область применимости оценок (4.2) и (4.8) в случае $K_b = 1.5$, поскольку условие конфокальности (4.7) требует $K_w < K_b$.

Заметим, что τ_{VDE}^W в виде (4.8) равно нулю при том же самом $K_w = K_w^{cr}$, что и τ_{VDE}^B . При меньших K_w обе оценки τ_{VDE}^W и τ_{VDE}^B , определённые формулами (4.1) и (4.2), дают отрицательное время. В работе [76] отмечается, что это свойство означает неспособность вакуумной камеры с $K_w < K_w^{cr}$ замедлять VDE, однако его отношение к реальной физике остаётся под вопросом. Таким образом, учёт ограничения (4.7) в (4.1) не только не разрешает противоречий, а вызывает ещё больше вопросов.

В дополнение к неясному физическому смыслу K_w^{cr} заметим, что уравнение (4.7) очень сильно связывает параметры конфигурации: при $K_w \rightarrow 1$ оно требует либо бесконечного b_w при конечном b , либо $b \rightarrow 0$ при конечном b_w . Если же кого-то не впечатляет этот теоретический аргумент, следует исходить из чисто практических соображений применимости равенства (4.7) к реальным установкам. В уже упомянутом токамаке JET [191, 192] с $b = 1$ м, $K_b = 1.75$ и

$b_w = 1.31$ м, $K_w \approx 1.6$ имеем $b^2(K_b^2 - 1) = 2.85$ при $b_w^2(K_w^2 - 1) = 2.06$. Разница не столь велика, хотя для точного совпадения объём плазмы требуется увеличить на 28%. Однако для плазмы ИТЭР [5, 6, 62] с $b = 2$ м и $K_b = 1.7$ получается $b^2(K_b^2 - 1) = 7.56$, что намного меньше $b_w^2(K_w^2 - 1) = 23.1$ для вакуумной камеры [6, 62] с $b_w \approx 3.5$ м и $K_w = 1.7$. Разница должна быть ещё больше в токамаках с сильно вытянутой вакуумной камерой с $K_w > K_b$, запрещённой связью (4.7), но характерной, например, для Т-15МД [10] и ТРТ [12, 63].

С этими аргументами и неравенством $7.56 \neq 23.1$ возникает резонный вопрос, насколько достоверными являются построения с условием «конфокальности». Он не поднимался в [71–73, 75, 76] и в последующих работах, использующих равенство (4.7). Чтобы ответить на него, необходим метод, позволяющий независимо задавать K_b и K_w . В частном случае с $K_w = 1$ обе формулы (4.1) и (4.2) приводят к $\tau_{\text{VDE}} = -\tau_w < 0$ с выводом, что внутри стенки круглого сечения вертикально вытянутая плазма неустойчива относительно идеальной МГД-моды $n/m = 0/1$ [76, 92]. В этой главе мы показываем, что данное следствие предсказаний с использованием (4.7) неверно, и существует достаточно широкая область частичной стабилизации VDE круглой стенкой.

Далее конфигурация с $K_w = 1$ для плазмы с конечным b и $K_b > 1$ исследуется как случай, лежащий за пределами применимости ограничения (4.7). Без него задача заметно усложняется, но всё ещё остаётся аналитически разрешимой. Наш анализ основывается на уравнении МГД-равновесия плазмы, дополненном уравнениями Максвелла и законом Ома для стенки. Для соответствия подходам [55, 73, 75, 76, 78] плазма считается прямым цилиндром с эллиптическим сечением, а его равновесие описывается моделью Гаевского (2.24).

4.2. Общее дисперсионное соотношение для VDE в токамаке резистивной стенкой

Инкремент VDE следует вычислять из условия баланса между притоком и диссипацией магнитной энергии в резистивном объёме вакуумной камеры, что выражается уравнением диффузии полоидального потока через резистивную

среди

$$\left(\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t} - \Delta^*\right)\psi^w = -\mu_0\sigma(\dot{\psi}^{pl} + \dot{\psi}^{ec}). \quad (4.9)$$

Оно получается комбинацией уравнения (2.7) и закона Ома (2.6) при условии, что проводимость стенки $\sigma = \text{const}$. Стоящие в правой части (4.9) производные $\dot{\psi}^{pl}$ и $\dot{\psi}^{ec}$ соответствуют источникам, возбуждающим в стенке ток, тогда как оператор в левой части описывает диффузную релаксацию его плотности по толщине стенки к однородной.

Прямой переход к эквивалентной интегральной формулировке

$$\psi^w = -\mu_0 \int_w \sigma \dot{\psi} G \frac{dS_\perp}{r_w}, \quad (4.10)$$

где $dS_\perp = dr_w dz_w$ — элемент поперечного сечения стенки w , получается умножением (4.9) на функцию Грина (1.18) и интегрированием в полоидальной плоскости. Естественно, к тому же результату можно прийти интегрированием (4.9) по всему пространству

$$\int G \Delta^* \psi^w \frac{dS_\perp}{r_v} = \mu_0 \int_w \sigma \dot{\psi} G \frac{dS_\perp}{r_w} \quad (4.11)$$

с преобразованием левой части с помощью теоремы Грина

$$\int G \Delta^* \psi^w \frac{dS_\perp}{r_v} = \int \psi^w \Delta^* G \frac{dS_\perp}{r_v} + \oint_{S_\infty} \frac{G \nabla \psi^w - \psi^w \nabla G}{2\pi r_v^2} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.12)$$

Первый интеграл в правой части здесь равен $-\psi^w$ в силу (2.48).

Во втором интеграле $d\mathbf{S}$ — внешне ориентированный элемент сферической поверхности S_∞ , бесконечно удалённой от токов в стенке. При этом последние фактически представляют собой магнитный диполь, так что создаваемый ими полоидальный поток имеет вид $\psi^w \approx 2\pi\mu_0 G$ с $G \approx r^2 r_v^2 (1 + 3zz_v/|\mathbf{r}_v|^2)/4|\mathbf{r}_v|^3$, см. подробное обсуждение во второй главе. Так как площадь S_∞ растёт как $|\mathbf{r}_v|^2$, поверхностный интеграл пропорционален $1/|\mathbf{r}_v|^4$ и зануляется при $|\mathbf{r}_v| \rightarrow \infty$.

Поскольку инерционному движению плазмы препятствует электромагнитная реакция стенки, характерное время развития VDE должно быть порядка резистивного времени (2.65). В таком случае камеру можно считать магнитотонкой оболочкой и пренебречь радиальной неоднородностью $\psi(\mathbf{r})$ в её сечении,

как делалось в главах 2 и 3. Тогда приближенное равенство (2.67) для $dS_\perp$ превращает уравнение (4.10) в

$$\psi^w(\mathbf{r}) = -\tau_w \oint_w G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w) \dot{\psi}(\mathbf{r}_w) \frac{\sigma d_w}{\sigma_0 d_0} \frac{d\ell_w}{b_w r_w}, \quad (4.13)$$

где $d\ell_w$ — полоидальный элемент контура S_w . Это уравнение справедливо для любого нестационарного процесса (достаточно медленного для пренебрежения скин-эффектом) и любой формы плазмы и стенки, см. также [119, 120]. Далее оно будет основой дисперсионного соотношения для VDE.

Полоидальный поток в (4.13) можно разложить на два слагаемых

$$\psi = \psi_{eq} + \delta\psi, \quad (4.14)$$

где $\delta\psi$ — возмущение магнитного потока в результате VDE, а основная функция ψ_{eq} описывает все прочие процессы (включая эволюцию тока и давления плазмы). В силу (1.17) и линейности потока, оба члена в (4.14) содержат вклады от токов в плазме, внешних катушках и стенке вакуумной камеры, поэтому уравнение (4.13) даёт

$$\delta\psi^w(\mathbf{r}) = -\tau_w \oint_w (\delta\dot{\psi}^{pl} + \delta\dot{\psi}^{ec} + \delta\dot{\psi}^w) \frac{G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w)}{b_w r_w} d\ell_w. \quad (4.15)$$

В этом равенстве мы полагаем, что стенка имеет однородные проводимость и толщину, поэтому $\sigma = \sigma_0$ и $d_w = d_0$.

В реальных экспериментах и в рассматриваемой задаче источником выступает $\delta\dot{\psi}^{pl}$. Слагаемое $\delta\dot{\psi}^{ec}$ отвечает за возможное вмешательство со стороны системы управления равновесием плазмы. Соответственно, неконтролируемая потеря вертикальной устойчивости характеризуется равенством

$$\delta\psi^{ec} = \delta\dot{\psi}^{ec} = 0, \quad (4.16)$$

что является одним из предположений в нашей работе. Тогда единственной причиной генерации токов в стенке будет возмущение магнитного поля, создаваемое плазмой, как в сценарии с чистым «горячим» VDE.

Будем рассматривать VDE как однородное вертикальное смещение шнура без деформации. Такая модель, в которой плазма ведёт себя как жесткий

цилиндр, используется во многих аналитических и численных подходах к задаче [55, 66, 71–73, 75, 76, 78, 80, 81, 193–197]. Здесь при решении уравнения (4.15) мы также задаём вертикальное смещение плазмы как постоянный вектор (Рис. 17)

$$\boldsymbol{\xi} = \xi(t)\mathbf{e}_z. \quad (4.17)$$

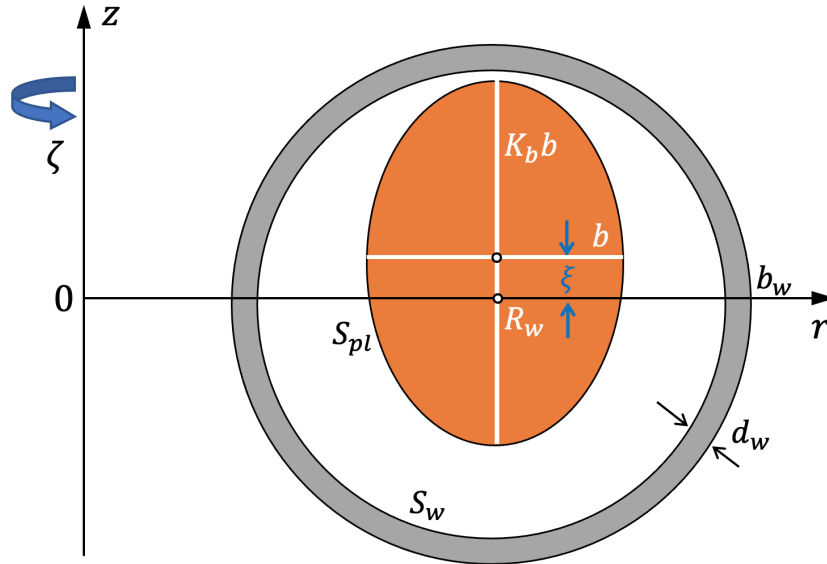


Рис. 17. Вертикальное смещение плазмы $\xi > 0$ из положения равновесия $(R_w, 0)$ в цилиндрических координатах (r, ζ, z) . Здесь S_w — внутренняя сторона вакуумной камеры большого и малого радиусов R_w и b_w , а S_{pl} — тороидальная поверхность плазмы малого радиуса b с вытянутостью K_b . Толщина стенки обозначена как d_w .

Если параметры плазмы (включая форму) фиксированы, магнитное поле $\mathbf{B}$ внутри и вне плазмы должно оставаться неизменным при вертикальном движении. Соответственно,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{eq}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}), \quad (4.18)$$

где индекс eq означает функцию в исходной конфигурации с $\xi = 0$ и $\dot{\xi} = 0$, а $\mathbf{r}$ — радиус вектор в неподвижных координатах, связанных с вакуумной камерой. Это условие означает, что в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой, магнитная конфигурация не меняется [66, 193, 198].

То же самое должно быть верно применительно к $\mathbf{B}^{pl}$ — части $\mathbf{B}$, создаваемой плазмой. Инвариантность $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^{pl}$ в системе отсчёта плазмы означает неизменность внешнего поля $\mathbf{B}^{ext} = \mathbf{B} - \mathbf{B}^{pl}$, необходимого для поддержания

силового баланса. Формальным выражением этого является равенство

$$\psi^{ext}(\mathbf{r}, t) = \psi_{eq}^{ext}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}), \quad (4.19)$$

где ψ^{ext} — вклад всех внешних источников в полный полоидальный поток ($\psi^w = 0$ в ψ_{eq}^{ext}). В сочетании с (4.16) отсюда следует

$$\delta\psi^w = \delta\psi^{ext} \quad (4.20)$$

для потока, производимого токами в стенке. Это условие должно выполняться в ходе вертикального движения до контакта плазмы со стенкой.

Уравнения (4.18) и (4.19) дают

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\psi_{eq}(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

и

$$\delta\psi^w(\mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\psi_{eq}^{ext}(\mathbf{r}). \quad (4.22)$$

в линейном приближении по $\boldsymbol{\xi}$. Напомним, что вывод (4.22) основывается на предположении (4.20) при неуправляемом VDE.

Подстановка (4.21) и (4.22) превращает уравнение (4.15) в

$$\boldsymbol{\xi} \mathbf{e}_z \cdot \nabla\psi_{eq}^{ext} = -\dot{\xi} \tau_w \oint_w \mathbf{e}_z \cdot \nabla\psi_{eq} \frac{G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w)}{b_w r_w} d\ell_w. \quad (4.23)$$

В нашей задаче $\xi(t)$ — единственная функция времени, поэтому дисперсионное соотношение (4.23) имеет решение в виде растущей моды

$$\xi = \xi_0 \exp(t/\tau_{VDE}), \quad (4.24)$$

где

$$\tau_{VDE} \equiv -\frac{\tau_w}{\mathbf{e}_z \cdot \nabla\psi_{eq}^{ext}} \oint_w \mathbf{e}_z \cdot \nabla\psi_{eq} \frac{G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w)}{b_w r_w} d\ell_w \quad (4.25)$$

— характерное время развития VDE, которое нужно найти. Далее путём прямых вычислений мы покажем, что правая часть этого равенства является константой, чем подтверждается правильность исходных предположений.

В полученном соотношении полный полоидальный поток ψ_{eq} и вклад ψ_{eq}^{ext} рассматриваются как невозмущенные распределения потоков до VDE. Их необходимо найти из решения внешней задачи равновесия, поэтому дальнейшие вычисления с (4.25) требуют выбора конкретной модели плазмы, определяющей вид ψ_{eq} и ψ_{eq}^{ext} , а также геометрии стенки, по сечению которой осуществляется интегрирование.

4.3. Преобразование формулы для τ_{VDE} при эллиптическом сечении плазмы

Формула (4.25) получена без ограничений на форму плазмы и геометрию вакуумной камеры. В стандартной модели с круглой тороидальной плазмой ψ_{eq}^{ext} представляет собой поток однородного вертикального магнитного поля, поэтому $\psi_{eq}^{ext} \sim r$ и $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq}^{ext} = 0$, см., например, (66) в [120] или (1.76) в первой главе. В этом случае первое слагаемое в (3.41) зануляется. Однако полный поток ψ_{eq} включает в себя и вклад от тока плазмы, который создает циркуляцию магнитного поля по полоидальному контуру, так что $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq} \neq 0$. Тогда из (3.41) получится $\dot{\xi} = 0$, что соответствует пределу $\tau_{\text{VDE}} \rightarrow \infty$ при $K_b = 1$, означающему отсутствие VDE. Поэтому для нахождения конечного τ_{VDE} следует рассматривать вытянутую плазму.

При $K_b \neq 1$ функция ψ_{eq}^{ext} должна содержать квадрупольную компоненту, вытягивающую плазменный шнур по вертикали. Соответствующее выражение представлено формулой (1.76), где квадрупольная часть даётся

$$\psi_q^{ext} = \psi_J \frac{\Lambda_2}{(K_b + 1)^2} \frac{z^2 - x^2}{b^2} \quad (4.26)$$

с ψ_J и Λ_2 , определёнными (2.25) и (1.62), см. также (1.79). При $d_b = 0$ это равенство переходит в (3.7) в [85], (25) в [100] с $j_B = 0$ там, (4.5.10) в [107] и (21) в [102] с точностью до выбора системы единиц.

Учёта только (4.26) в ψ_{eq}^{ext} для описания VDE вполне достаточно, если ограничиться случаем с давлением плазмы несколько меньше равновесного предела [72]. Это позволяет пренебречь влиянием тороидальности на форму магнитных поверхностей [84, 85] и воспользоваться квазицилиндрическим приближением. Полагая профиль тока однородным, полный полоидальный поток ψ_{eq} в (4.25) можно задать решением Гаевского (2.24), как делалось в [55, 71–73, 75, 76, 78].

Мы намеренно не учитываем здесь эффектов $j_\zeta \neq \text{const}$ и связанного с ним вклада с d_b в $\Lambda_2 = \epsilon_b + d_b$, чтобы оставаться в рамках подходов [55, 73, 75, 76, 78] и сфокусироваться на обсуждении условия конфокальности (4.7). Напомним, что нас интересует вопрос о достоверности предсказаний τ_{VDE}

в случае, когда (4.7) нарушается. Поэтому фактически задача сводится к вычислению интеграла (4.25) по стенке, не удовлетворяющей условию (4.7), с функциями ψ_{eq}^{ext} и ψ_{eq} , определёнными (4.26) с $\Lambda_2 = \epsilon_b$ и (2.24).

Для полноты укажем, что в этой части работы рассматривается задача с $dJ/dt = 0$, поэтому константа ψ_b , обсуждавшаяся в главе 2, выпадает из интеграла (4.25) в силу предположения $\dot{\psi}_{eq} = 0$ в (4.15). Таким образом, только зависящая от координат часть ψ_{eq} в выражении (2.24) останется в формуле (4.25) при оценке τ_{VDE} .

Теперь вычислим производные в (4.25). Из равенства (4.26) находим

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq}^{ext} = 2\psi_J \frac{\epsilon_b}{c_b^2} e^{-2\mu_b} z. \quad (4.27)$$

с параметром c_b , определённым (2.17). Эта функция входит в (4.25) как знаменатель. В силу

$$\epsilon_b e^{-2\mu_b} = \frac{(K_b - 1)^2}{K_b^2 + 1}, \quad (4.28)$$

что следует из (1.51) и (2.17), она равна нулю для плазмы круглого сечения. Соответственно, при

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq} = -\psi_J \sin \alpha / l, \quad (4.29)$$

где (l, α) — полярные координаты, связанные с центром плазмы, формула (4.25) дает $\tau_{\text{VDE}} \rightarrow +\infty$ при $K_b \rightarrow 1$. Этот ожидаемый результат подтверждает, что плазма с круглым сечением вертикально устойчива, а также показывает необходимость модели с вытянутым сечением плазмы для оценки τ_{VDE} .

Чтобы найти $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq}$ при $K_b > 1$, представим ψ_{eq} в (2.24) как действительную часть голоморфной функции

$$\Psi = \psi_b - \psi_J \left[\omega - \omega_b + \frac{\epsilon_b}{2} \operatorname{sh} 2(\omega - \mu_b) \right], \quad (4.30)$$

где $\omega \equiv \mu + i\theta$ — комплексная переменная, связанная с декартовыми координатами в (2.15) и (2.16) равенством

$$s(\omega) \equiv x + iz = c_b \operatorname{sh} \omega. \quad (4.31)$$

Подобное представление оправдано тем, что ψ_{eq} является гармонической и удовлетворяет $\Delta_{\perp} \psi_{eq} = 0$. Тогда, используя условие Коши-Римана

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq} = -\operatorname{Im} \frac{d\Psi}{ds} = -\operatorname{Im} \left[\frac{1}{s'(\omega)} \frac{d\Psi}{d\omega} \right] \quad (4.32)$$

в сочетании с (4.30) и (4.31), находим

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq} = 2\psi_J \frac{\epsilon_b}{c_b} \operatorname{sh}(\mu - 2\mu_b) \sin \theta. \quad (4.33)$$

Подстановка (4.27) и (4.33) превращает соотношение (4.25) в

$$\tau_{\text{VDE}} = \tau_w \oint_w c_b e^{2\mu_b} \operatorname{sh}(2\mu_b - \mu_w) \sin \theta_w \frac{G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w)}{R_w b_w z} d\ell_w, \quad (4.34)$$

где индекс w отмечает переменные, пробегающие контур стенки.

Координаты (μ, θ) были введены для удобства описания плазмы: в них её эллиптическая граница S_{pl} задаётся простым равенством $\mu = \mu_b = \text{const}$. Если поверхность стенки не совпадает с координатной, μ_w является функцией длины дуги ℓ_w . В этом случае все функции в (4.34) нужно выразить через ℓ_w , чтобы произвести интегрирование. В качестве примера мы рассмотрим стенку с круглым сечением (Рис. 17), у которой $\ell_w = b_w u_w$, где b_w — малый радиус стенки, а u_w — обычный полярный угол.

4.4. Вычисление τ_{VDE} для плазмы в вакуумной камере с круглым сечением

В обычных полярных координатах функцию Грина (1.18) под интегралом в (4.34) удобно разложить в ряд Фурье [152]

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_w) \approx G_0 = \frac{R_w}{2\pi} \left[\ln \frac{8R_w}{b_w} - 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varsigma^m}{m} \cos m(u - u_w) \right], \quad (4.35)$$

где $\varsigma = \rho/b_w < 1$, а (ρ, u) — обычные полярные координаты, связанные с центром стенки. В такой форме тороидальность учтена только в первом слагаемом, чего достаточно, если пользоваться решением (2.24) для ψ_{eq} вне плазмы. Тороидальные поправки следующего порядка рассматривались в первой главе, где учитывалось также радиальное смещение плазменного шнура.

Другая функция в подынтегральном выражении в (4.34) разбивается на две части

$$c_b \operatorname{sh}(2\mu_b - \mu_w) \sin \theta_w = b_w \operatorname{sh} 2\mu_b \sin u_w - c_b \operatorname{ch} 2\mu_b \operatorname{sh} \mu_w \sin \theta_w, \quad (4.36)$$

если воспользоваться стандартным представлением $\text{sh}(\alpha + \beta)$ и связью $c_b \text{ch } \mu_w \sin \theta_w = b_w \sin u_w$. Второе слагаемое может быть сведено к виду

$$c_b \text{sh } \mu_w \sin \theta_w = c_b \text{Im ch } \omega_w = \text{Im} \sqrt{c_b^2 + s_w^2}, \quad (4.37)$$

следующему из равенств $\text{ch } \omega_w = \sqrt{1 + \text{sh}^2 \omega_w}$ и (4.31), где $\omega_w \equiv \mu_w + i\theta_w$. Для стенки с круглым сечением $s_w = b_w e^{iu_w}$. Раскладывая главную ветвь многозначной функции квадратного корня в (4.37) в ряд Лорана, получаем

$$\sqrt{c_b^2 + s_w^2} = b_w e^{iu_w} + b_w \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(\frac{c_b}{b_w} \right)^{2k} e^{-i(2k-1)u_w} \quad (4.38)$$

с $c_b/b_w < K_b b/b_w < 1$ и биномиальными коэффициентами $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} (2k-3)!! / (2^k k!)$.

После подстановки (4.35) и (4.36) в (4.34), константа $\ln(8R_w/b_w) - 2$ в G выпадает, так как функция (4.36) периодическая на стенке. Используя соотношения $\varsigma \sin u = z/b_w$ и

$$\sin(2k+1)u = \sin u \left(1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos 2nu \right), \quad (4.39)$$

чтобы выделить зависимость от z в числителе выражения (4.34), получаем в результате интегрирования

$$\frac{c_b e^{2\mu_b}}{R_w} \int_0^{2\pi} G \text{sh}(2\mu_b - \mu_w) \sin \theta_w du_w = \left[\frac{1}{\gamma \tau_w} + \left(1 + \frac{2}{\gamma \tau_w} \right) \sum_{k=1}^{\infty} A_k(u) \right] z, \quad (4.40)$$

где

$$\gamma \equiv \frac{2}{\tau_w} \left(\frac{c_b^2}{2b_w^2} e^{2\mu_b} \text{ch } 2\mu_b - 1 \right)^{-1}, \quad (4.41)$$

как будет показано ниже, инкремент вертикального движения, а

$$A_k(u) = \frac{1}{2k+1} \binom{1/2}{k+1} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos 2nu \right) \left(\frac{c_b \rho}{b_w^2} \right)^{2k} \quad (4.42)$$

с малым отношением $c_b \rho / b_w^2 < 1$.

Присутствие ряда с зависящими от координат коэффициентами (4.42) в (4.40) показывает, что дипольная конфигурация магнитного поля, создаваемого токами в стенке при VDE и описываемая (4.27), является лишь аппроксимацией.

Сравнение (4.27) с (4.33) показывает, что реакция стенки круглого сечения на вертикальное движение плазмы включает также и высшие гармоники

$$\delta\psi^w = -\xi \mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq}^{ext} \left[1 + (\gamma\tau_w + 2) \sum_{k=1}^{\infty} A_k(u) \right] = \delta\psi_0^w + \delta\psi_1^w + \delta\psi_2^w + \dots, \quad (4.43)$$

где $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq}^{ext}$ даётся выражением (4.27),

$$\delta\psi_0^w(z) = -\xi \mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq}^{ext}, \quad (4.44)$$

а

$$\delta\psi_1^w(x, z) \sim \xi \psi_J \frac{3x^2z - z^3}{b^4} \left(\frac{b}{b_w} \right)^2, \quad (4.45)$$

$$\delta\psi_2^w(x, z) \sim \xi \psi_J \frac{5x^4z - 10x^2z^3 + z^5}{b^6} \left(\frac{b}{b_w} \right)^4. \quad (4.46)$$

В нашей задаче, поскольку распределение полоидального потока (4.27) пропорционально z , требуется только первое слагаемое в (4.43). Возможность пренебречь старшими членами обусловлена быстрым затуханием коротковолновых мод тока индукции в резистивной стенке, что было строго доказано в главе 3, см. выражение (3.54) для времени релаксации тока в круглой стенке. В конечном итоге, подстановка (4.40) и (4.43) в (4.34) даёт

$$\tau_{\text{VDE}} = \gamma^{-1} = \frac{\tau_w}{2} \left[\frac{(K_b^2 + 1)(K_b + 1)}{K_b - 1} \frac{b^2}{2b_w^2} - 1 \right], \quad (4.47)$$

где учтены тождества (2.78) и $e^{2\mu_b} = (K_b + 1)/(K_b - 1)$. Отметим, что описанную в этом разделе процедуру интегрирования в (4.34) можно произвести и для случая вытянутой неконфокальной вакуумной камеры. Естественно, это приводит к усложнению вычислений, однако их удаётся произвести аналитически с помощью стандартных методов теории функций комплексной переменной, см. пример в Приложении.

4.5. Обсуждение результатов

Представленный анализ выполнен без использования сильного ограничения (4.7), бывшего ключевым элементом в [73, 92] и [55, 75, 76, 78]. Отказ от (4.7) при вычислении τ_{VDE} позволяет покрыть область с конечным b/b_w при

$K_w < K_w^{cr}$ вплоть до $K_w = 1$, где выражения (4.1) и (4.2) формально не применимы. Мы обращаем внимание на это обстоятельство, так как оно не указывалось явно в работах [55, 73, 75, 76, 78, 92] и может привести к ошибочным интерпретациям. В частности, формулы (4.1) и (4.2) при $K_w = 1$ дают отрицательное τ_{VDE} с выводом, что в этом случае VDE должно развиваться за характерные для плазмы инерционные времена. Наша оценка (4.47), полученная для стенки с $K_w = 1$, напротив, предсказывает медленное VDE с частичной стабилизацией стенкой и относительно малыми положительными τ_{VDE} , как и должно быть согласно измерениям на многих токамаках [153].

В этой работе стенка с $K_w = 1$ рассмотрена как пример, лежащий далеко за пределами применимости традиционной модели «конфокальной стенки», см. [55, 71–73, 75, 76, 78, 92] и связанные публикации. Напомним, что связь (4.7) требует $b/b_w \rightarrow 0$ при $K_w \rightarrow 1$. Иными словами, либо «круглая» стенка должна быть бесконечно удалена от плазмы и, таким образом, быть неспособной противостоять VDE, либо плазму нужно заменить проводом с $b \rightarrow 0$, совершающим инерционное движение. Этим объясняется отрицательное τ_{VDE} , предсказываемое выражениями (4.1) и (4.2) при $K_w < K_w^{cr}$ и, в частности, при $K_w = 1$.

В то же время (4.47) даёт конечное характерное время VDE для плазмы с малой и большой полуосями сечения b и $K_b b$, окруженной «круглой» стенкой малого радиуса b_w . Наш результат (4.47) предсказывает $\tau_{VDE} > 0$ при $b > b_{cr}$ с

$$\frac{b_{cr}}{b_w} = \sqrt{\frac{2(K_b - 1)}{(K_b^2 + 1)(K_b + 1)}}. \quad (4.48)$$

Здесь b_{cr}/b_w возникает как мера минимального расстояния между плазмой и стенкой, необходимого для частичной стабилизации VDE. Отношение b_{cr}/b_w достигает максимума $b_{cr}/b_w = 0.367$ при $K_b = 1.84$ и слабо зависит от K_b вблизи этой точки (например, $b_{cr}/b_w = 0.335$ и $b_{cr}/b_w = 0.358$ при $K_b = 1.4$ и $K_b = 2.25$, выступающими, соответственно, как наименьшая и наибольшая вытянутости в Табл. 1).

Малость величины b_{cr}/b_w представляется замечательным результатом, поскольку в исходном состоянии должен отсутствовать контакт плазмы со стенкой, что с учетом круглого сечения последней требует $K_b b < b_w$. Соответственно, формула (4.47) применима для плазмы с $b_{cr} < b < b_w/K_b$. В верхней части

этого интервала формула (4.47) даёт наибольшее возможное τ_{VDE} , показанное жирной красной линией на Рис. 18. Оно соответствует наилучшему значению τ_{VDE} , которое может обеспечить стенка с $K_w = 1$. Характерные величины τ_{VDE} изображены на Рис. 18, где зависимость (4.47) построена для $K_b b/b_w$ в диапазоне $1.1 \div 1.4$ и вытянутостей $K_b = 1.4 \div 2.2$, представленных в Табл. 1. Например, при $K_b b/b_w = 1.2$ отношение τ_{VDE}/τ_w варьируется от 0.05 до 1.1. Для сравнения, оно равно 0.71 для ИТЭР [6, 153] с $\tau_{\text{VDE}} \sim 500$ мс и $\tau_w \sim 700$ мс, 0.12 для COMPASS-U [189, 199] с $\tau_{\text{VDE}} \sim 1.5$ мс и $\tau_w \sim 13$ мс, 0.005 для CFETR [33] с $\tau_{\text{VDE}} \sim 2$ мс и $\tau_w \sim 400$ мс, 0.08 для Alcator C-Mod [194, 200] с $\tau_{\text{VDE}} \sim 1.25$ мс и $\tau_w \sim 15$ мс, 0.51 для PDX [201] с $\tau_{\text{VDE}} \sim 67$ мс и $\tau_w \sim 130$ мс, 0.78 для JT-60U [195] с $\tau_{\text{VDE}} \sim 7.8$ мс и $\tau_w \sim 10$ мс. Фактически, только токамак CFETR не попадает в обозначенный промежуток, поэтому ожидаемое там время VDE может оказаться заниженным.

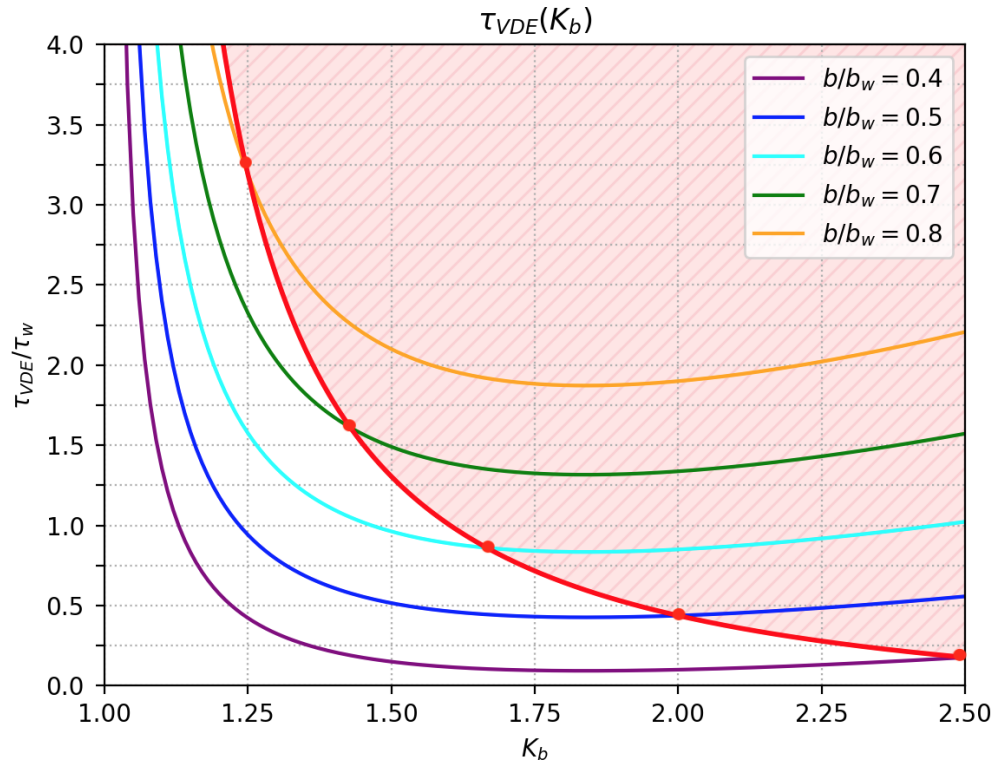


Рис. 18. Зависимость τ_{VDE} , определённого (4.47), от вытянутости плазмы K_b для различных значений b/b_w выше критического b_{cr}/b_w . График формулы (4.47) с $b/b_w = 1/K_b$, показанный красной линией, выступает как ограничение: заштрихованная часть запрещена условием $b/b_w < 1/K_b$. Ось $\tau_{\text{VDE}} = 0$ соответствует наименьшему значению $b = b_{\text{cr}}$.

Положительное τ_{VDE} означает, что токи, наводимые в стенке вакуумной

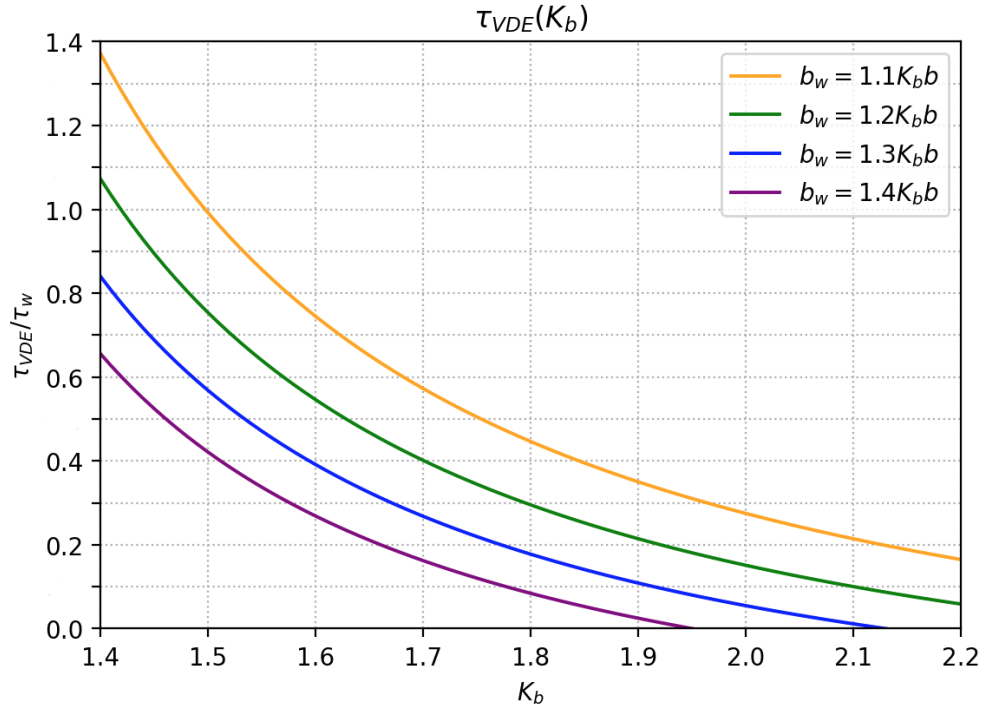


Рис. 19. Зависимость τ_{VDE} , определённого формулой (4.47), от вытянутости плазмы K_b в диапазоне $K_b b/b_w \in [1.1; 1.4]$ с $K_b \in [1.4; 2.2]$, что покрывает приведённые в Табл. 1.

камеры, могут производить горизонтальное магнитное поле

$$\delta \mathbf{B}^w = \frac{\mu_0 J}{\pi c_b^2} \epsilon_b e^{-2\mu_b \xi(t)} \mathbf{e}_r, \quad (4.49)$$

достаточное для подавления инерционного ускорения плазмы. Это поле, полученное сочетанием равенств (1.14) и (4.22), создаёт действующую на плазму силу Ампера с линейной плотностью

$$\mathbf{F}_{pw} = \int_{pl} \mathbf{j}^{pl} \times \delta \mathbf{B}^w dr dz, = -J |\delta \mathbf{B}^w| \mathbf{e}_z, \quad (4.50)$$

противоположную силе притяжения плазмы к внешним катушкам

$$\mathbf{F}_{pc} = \int_{pl} \mathbf{j}^{pl} \times \mathbf{B}^{ext} dr dz = J B_q \frac{\xi}{b} \mathbf{e}_z. \quad (4.51)$$

Баланс сил $\mathbf{F}_{pw} + \mathbf{F}_{pc} = 0$ поддерживает плазму в динамическом равновесии в ходе её медленного вертикального движения за время порядка τ_w , см. Рис. 20. Здесь

$$\mathbf{B}^{ext} = B_q \frac{x \mathbf{e}_z - z \mathbf{e}_r}{b} \quad (4.52)$$

— квадрупольное поле, полученное из (1.14) и (4.26) и необходимое для придания плазме вытянутости по вертикали, а B_q , определённое (1.85) с $d_b = 0$ там —

его амплитуда. Сравнение (4.49) и (1.85) показывает, что $\delta B^w \equiv |\delta \mathbf{B}^w| = B_q \xi / b$, поэтому $\mathbf{F}_{pw} + \mathbf{F}_{pc} = 0$.

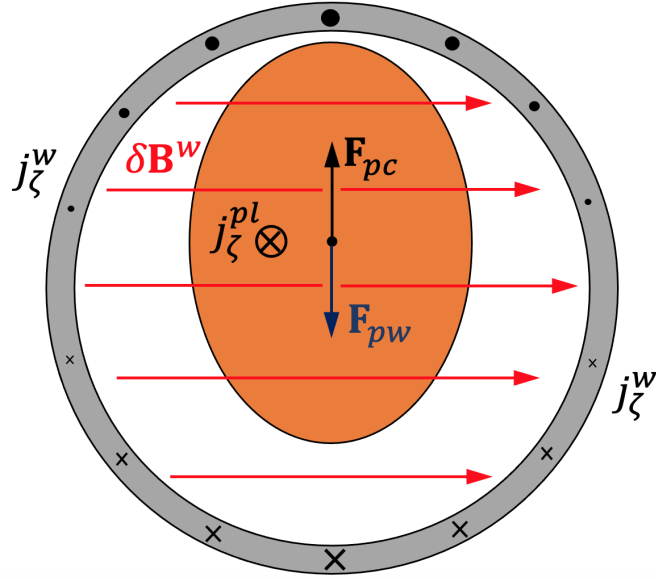


Рис. 20. Схематический вид вертикально вытянутой плазмы, смещенной из положения равновесия $z = 0$ внутри «круглой» вакуумной камеры, и реакция последней на VDE. Вектор $\mathbf{F}_{pw}$ — сила взаимодействия продольного тока плазмы j_z^{pl} и однородного горизонтального поля $\delta \mathbf{B}^w$, создаваемого вихревыми токами в стенке j_z^w , см. (4.50). Вектор $\mathbf{F}_{pc}$ — сила притяжения плазмы к внешним виткам, см. (4.51). Внешние квадрупольные поля не показаны.

В формуле (4.47) b/b_w фигурирует как свободный параметр, в то время как оценки (4.2) и (4.8) неявно учитывают его посредством связи (4.7). Если рассматривать выражения (4.2) и (4.8) как функции b/b_w при фиксированном K_b , то вытянутость стенки K_w должна изменяться как $K_w = \sqrt{1 + (K_b^2 - 1)b^2/b_w^2}$. При таких K_w величина τ_{VDE} , определяемая с помощью (4.2) и (4.8), изображена на Рис. 21 для $K_b = 1.2, 1.4, 1.8$ и 2 . Для сравнения мы также приводим τ_{VDE}^{nc} , предсказываемое нашим результатом (4.47), где *nc* означает *non-confocal*.

Когда b падает ниже критического уровня b_{cr} , слагаемое $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi_{eq}$ в правой части (4.23) исчезает, и τ_{VDE} , как следует из (4.47), обращается в нуль. В то же время, левая часть остаётся ненулевой функцией (4.27), что означает неприменимость дисперсионного соотношения (4.23). Следовательно, токи в стенке больше не могут поддерживать локальное равновесие плазмы, описываемое уравнениями (4.18) и (4.19). При этом нарушается баланс сил (4.50) и (4.51), а значит, и условие равновесия (2), так что VDE развивается за инерционные (альфвеновские) времена. Напомним, что наш результат (4.47) получен в при-

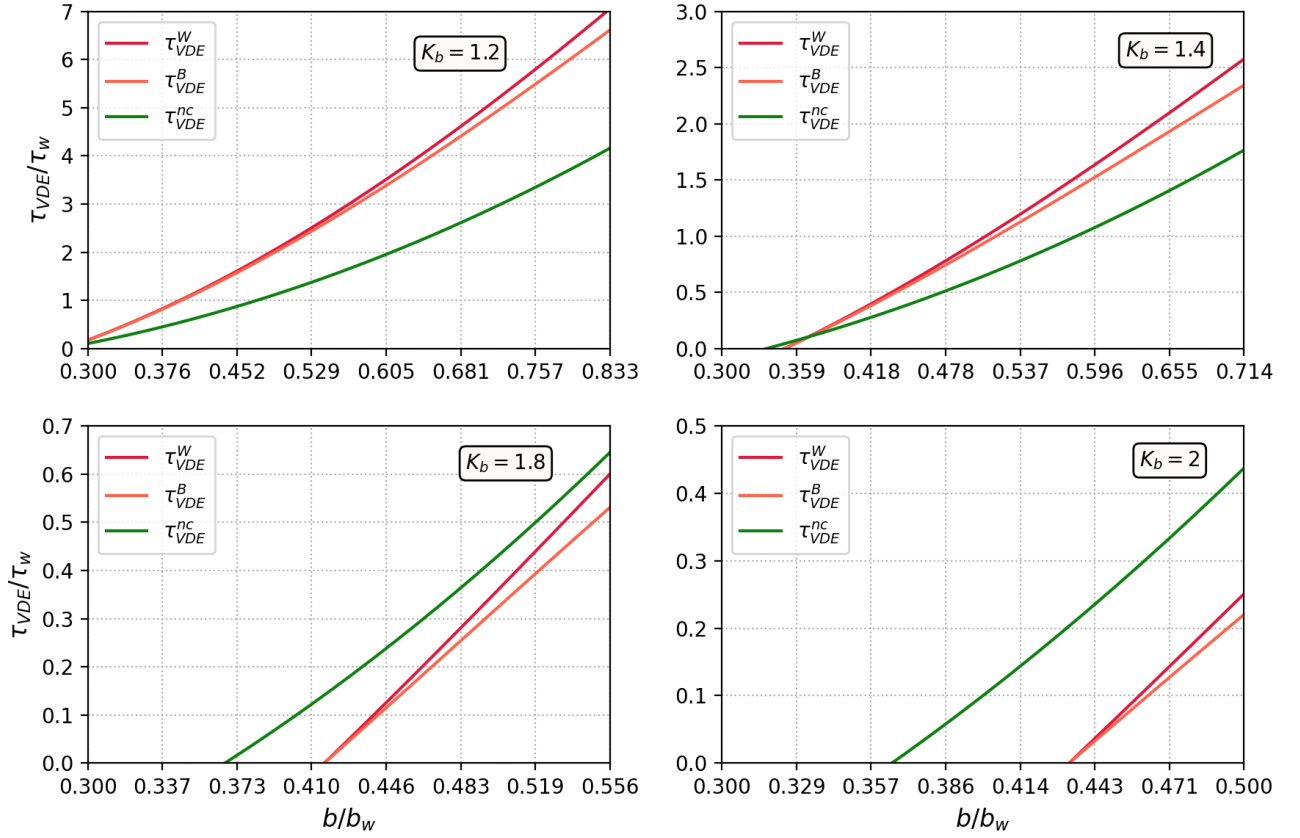


Рис. 21. Зависимости τ_{VDE} от b/b_w , предсказываемые оценками (4.2), (4.8) и (4.47) при $K_b = 1.2, 1.4, 1.8$ и 2 . На каждом из подграфиков горизонтальная ось ограничена максимально возможным $b_{max}/b_w = 1/K_b$. Индекс nc у τ_{VDE}^{nc} означает *non-confocal*.

ближении тонкой стенки, которое оправдано, когда τ_{VDE} не сильно отличается от τ_w . Для быстрых процессов с $\tau_{VDE} \ll \tau_w$ такое приближение неприменимо из-за сильного скин-эффекта в стенке. В этой области реакция стенки становится нелинейной. Плавный переход между режимами с тонкой и толстой стенками в токамаках был продемонстрирован численно в работе [202], а асимптотическое решение для быстрых VDE представлено формулой (21) в [78].

Таким образом, вертикальная неустойчивость плазмы с b/b_w ниже критической величины (4.48) не может быть стабилизирована даже идеально проводящей «круглой» стенкой, что выражается в отрицательном знаке τ_{VDE} в формуле (4.47). Аналогичная интерпретация отрицательного τ_{VDE} , предсказываемого формулой (4.1), предлагалась в монографии [92] и в работах [75–77]. Там, в частности, было установлено, что частичная стабилизация VDE конфокальной вакуумной камерой возможна тогда и только тогда, когда X-точки сепаратрисы находятся за пределами стенки. Действительно, используя геомет-

рическое соотношение

$$K = \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh} \mu} = \frac{e^{2\mu} + 1}{e^{2\mu} - 1}, \quad (4.53)$$

которое получается из (2.15) и (2.16), можно превратить формулу (4.2) в

$$\tau_{\text{VDE}}^B = \tau_w \frac{e^{4\mu_b} - e^{2\mu_w}}{e^{2\mu_w} + 1}. \quad (4.54)$$

Это равенство обращается в ноль при $\mu_w = 2\mu_b$. В то же время легко видеть, что при ψ_{eq} , заданном выражением (2.24), координаты X-точек, найденные как решения $\partial_\mu \psi_{eq} = \partial_\theta \psi_{eq} = 0$, равны $\mu_X = 2\mu_b$ и $\theta_X = \pm\pi/2$. Следовательно, положительные τ_{VDE}^B соответствуют $\mu < \mu_X$ в (4.54).

Последнее справедливо для конфокальной стенки, тогда как наша оценка (4.47) для случая с $K_w = 1$ может быть записана в виде

$$\tau_{\text{VDE}} = \frac{\tau_w}{2} \left[\frac{z_X^2}{2b_w^2} \frac{(K_b + 1)^2}{K_b^2 + 1} - 1 \right], \quad (4.55)$$

где вертикальная координата X-точки

$$z_X \equiv c_b \operatorname{ch} \mu_X = b \frac{K_b^2 + 1}{\sqrt{K_b^2 - 1}} \quad (4.56)$$

введена с использованием соотношений (2.15)-(2.17) и (2.26) и подстановки $\mu_X = 2\mu_b$. Поскольку $2(K_b^2 + 1) = (K_b + 1)^2 + (K_b - 1)^2$, отрицательные τ_{VDE} в (4.55) при $K_b > 1$ соответствуют области $z_X < b_w \sqrt{1 + e^{-2\mu_b}}$. Таким образом, если условие (4.7) нарушается, выход X-точек сепаратрисы за пределы вакуумной камеры уже не является критерием потери частичной стабилизации VDE стенкой. Данный пример показывает, что отклонение геометрии системы от формы, предписываемой (4.7), может качественно менять предсказания теории.

4.6. Выводы главы 4

Случай стенки круглого сечения ($K_w = 1$) был рассмотрен в этой главе как пример, лежащий далеко за пределами применимости выражений (4.1) и (4.2), ограниченными равенством (4.7). Результатом представленного исследования является вывод, что область замедления VDE за счёт токов индукции в резистивной стенке вакуумной камеры оказывается гораздо шире той, которую предсказывают оценки (4.1) и (4.2).

Так как новая формула (4.47) была получена для неконфокальной стенки круглого сечения, параметры K_b , b и b_w в (4.47) могут рассматриваться как независимые. Теперь они не подчиняются сильной связи (4.7), которая формально запрещает (в частности, при $K_w = 1$) прямые сравнения нашего результата (4.47) с оценками (4.1) и (4.2). Если, тем не менее, подставить $K_w = 1$ в последнюю пару, получится $\tau_{\text{VDE}} = -\tau_w < 0$. В то же время формула (4.47) подтверждает способность стенки круглого сечения обеспечивать частичную стабилизацию VDE, превращая последнее в относительно медленную моду с $\tau_{\text{VDE}}/\tau_w = O(1)$, что показано на Рис. 19 для нескольких значений b/b_w . Полученные результаты справедливы в области $b > b_{cr}$ с критическим значением малого радиуса плазмы, определённым (4.48).

Насколько нам известно, приведённая здесь аналитика служит первой демонстрацией ограничений, связанных с геометрическим условием (4.7), применявшимся в [73] и [55, 75, 76, 78]. Показано его сильное влияние на величину τ_{VDE} , что особенно заметно в пределе $K_w \rightarrow 1$. Чтобы выяснить величину ошибки, вносимую связью (4.7) в оценки (4.1) и (4.2) при $K_w > 1$, необходим дополнительный анализ с некруглой стенкой. Применявшийся здесь метод функции Грина позволил рассмотреть стенку с круглым сечением как пример простейшей геометрии, не конфокальной эллиптической границе плазмы. Однако выражение (4.34), предшествующее итоговому результату (4.47), подходит для камеры произвольной геометрии, поэтому используемая нами техника может быть обобщена для оценки τ_{VDE} в случае стенки вытянутой формы, см. пример вычислений в Приложении.

Заключение

В диссертации разработана аналитическая модель равновесия тороидальной плазмы токамака с эллиптическим сечением. Математическим выражением модели являются найденные в главе 1 распределения полоидального магнитного потока в вакуумном промежутке «плазма-стенка» (1.65) и (1.73). Эти формулы обобщают результаты классической теории равновесия [82–85], создававшейся ещё В. Д. Шафрановым [82] для «круглой плазмы», на случай характерной для современных токамаков конфигурации с вытянутой границей плазменного шнура. Включение вытянутости плазмы $K_b > 1$ в построения теории равновесия расширяет недавно представленный подход В. Д. Пустовитова [119, 120], позволивший описать тороидальное смещение плазмы при CQ, к анализу событий с её вертикальным смещением (VDE). Актуальность этой задачи обусловлена тем, что VDE представляют собой одну из наиболее серьёзных проблем магнитного удержания плазмы из-за тесной связи со срывами [6, 7]. Выражения (1.65) и (1.73) также могут быть полезны при выделении вкладов от тока плазмы и внешних токов в задачах магнитной диагностики, например, на токамаке Т-15МД, или будущих ИТЭР и ТРТ, на которых планируются эксперименты с сильно вытянутой плазмой.

Представленные в главе 1 результаты дают аналитическое описание необходимых для равновесия плазмы магнитных полей с учётом сразу нескольких эффектов: тороидальности плазменного шнура, вытянутости его сечения, неоднородности распределения тока внутри и электромагнитной реакции вакуумной камеры. Эти четыре элемента, ключевые в экспериментах на токамаках, ранее рассматривались лишь по отдельности [39, 68, 69, 82–85, 97, 119, 120]. Теперь они включены в общую модель, которая становится значительным шагом вперёд по сравнению с традиционными для аналитической теории подходами с заменой плазмы жестким кольцом с током [39, 67–70] или бесконечным цилиндром эллиптического сечения с однородным током [55, 74–77, 85, 97–101].

В задачах, где по тем или иным причинам можно пренебречь влиянием тороидальности системы, удобными оказываются упрощённые выражения (2.98) и (2.99). Они получаются путём исключения тороидальных поправок из

(1.65), (1.73) и в сумме дают полный полоидальный поток (2.100) вне плазмы. Это равенство похоже на известное цилиндрическое решение Р. Гаевского (2.24), успешно применявшееся во многих задачах [55, 74–77, 85, 97–101], но отличается от него двумя новыми элементами. Во-первых, равенство (2.100) содержит дополнительное слагаемое с величиной d_b , определённой (1.25) и учитывающей неоднородное распределение тока в плазме. Вместе с вириальными соотношениями [136, 163], связывающими d_b с интегральными параметрами разряда, такими как внутренняя индуктивность ℓ_i и полоидальная β_p , решение (2.100) позволяет расширить полученные в [55, 74–77, 85, 97–101] результаты на сценарии с $j_\zeta \neq \text{const}$.

Вторым отличием (2.100) от (2.24) является точно определённая константа интегрирования ψ_b . Приведённая в главе 2 аналитика показывает, что её знание является минимальным дополнением к стандартным построениям теории равновесия, необходимым для покрытия сценариев с $dJ/dt \neq 0$, например, срыва тока. Дело в том, что характерные времена крупномасштабных процессов в токамаке определяются скоростью затухания наведённых токов в вакуумной камере (т.е. резистивным временем стенки τ_w) [109, 153], поэтому учёт её динамической реакции обязателен в задачах эволюции равновесия. При этом константа ψ_b даёт конечный вклад в амплитуду наведённых токов (2.6), чем и объясняется потребность в точном вычислении ψ_b . В нашей работе её величина даётся формулой (2.84) и линейно выражается через ток плазмы J и полный ток в стенке J_w . Последний также зависит от J согласно уравнению (2.91), в связи с чем пренебрежение константой ψ_b или её замена некоторым удобным значением, как в [55, 74–77, 85, 97–101], в динамических задачах недопустимы. Таким образом, решения (2.100) в сочетании с равенством (2.84) достаточно для вычисления токов в резистивной стенке и замыкания задачи эволюции равновесия плазмы с учётом реакции вакуумной камеры.

Для вывода уравнения вертикального движения плазменного шнура при CQ, наподобие (110) в [120], выражение (2.100) с (2.84) нужно подставить в (2.86) и вычислить по формулам (2.73)–(2.77) полоидальный поток ψ^w , создаваемый токами индукции в стенке (2.70). Выражая затем этот поток через разность полного внешнего ψ^{ext} и слагаемого ψ^{ec} от полоидальных катушек, токи в

которых считаются заданными, можно получить дифференциальное уравнение, связывающее изменения вертикального смещения плазмы $\xi(t)$ и её тока $J(t)$. Наряду с выражением для константы интегрирования (2.84) и связью (2.86) формулы (2.73)-(2.77) представляют главный результат главы 2. В сочетании с равенством (2.100) они представляют аналитическую модель равновесия вытянутой плазмы, пригодную для использования в различных динамических задачах, таких как моделирование эволюции положения плазменного шнура и оценка инкрементов «горячего» и «холодного» VDE.

Следует заметить, что в главе 2 поток ψ^w фактически вычисляется для частного случая, когда полный внешний поток ψ^{ext} содержит всего три гармоники: нулевую (симметричную), первую (дипольную) и вторую (квадрупольную), см. (1.73). Поэтому в разложении тока (2.70), предшествующему (2.73), было также удержано только три слагаемых. Чтобы строго обосновать данное упрощение, в главе 3 приведено общее решение задачи нахождения токов индукции в стенке при произвольном внешнем возмущении. Для этого в предположении об аксиальной симметрии произведена редукция уравнений Максвелла и закона Ома в стенке к интегральному уравнению (3.6), описывающему динамику тороидальных токов. Его решение получено в виде обобщённого ряда Фурье (3.29) по системе собственных мод резистивной стенки, представляющих базисные функции на контуре её полоидального сечения. Явная пространственная структура мод (3.48)-(3.52) найдена аналитически для стенки с эллиптическим сечением с помощью стандартных методов теории интегральных уравнений. Также были вычислены времена затухания собственных мод (2.92) и (3.53), предсказывающие быстрое затухание высших (коротковолновых) мод тока. Этот результат, впервые предсказанный с помощью численного моделирования [111], подтвержден здесь аналитически из первых принципов. Показано почти полное согласие аналитики с точными численными расчётами.

Возможность описания тока в стенке с помощью всего нескольких гармоник полоидального угла позволяет минимизировать число элементов, необходимых для моделирования наводимого в стенке тока при заданном магнитном возмущении в системе, и имеет большую практическую ценность для приложений в аналитической теории равновесия и оценках сил на стенку при срыве. В

частности, формула (3.29) с найденными (3.48)-(3.53) и заданным магнитным возмущением $\partial\psi^s/\partial t$ позволяет сразу вычислить наведённый ток в резистивной стенке. Такие расчёты необходимы при вычислении действующих на неё сил [128], и представляют интерес для задачи выделения вклада токов в стенке в сигнал, измеряемый магнитными зондами.

Свойство быстрого затухания старших мод наведённого тока в вакуумной камере впоследствии используется в главе 4 при вычислении характерного времени τ_{VDE} , за которое развивается «горячее» VDE в токамаке с резистивной стенкой. Здесь эта задача решена в наиболее реалистической постановке, когда форма стенки не зависит от геометрии плазмы. С помощью развитой в диссертации техники вычисления интегралов с тороидальной функцией Грина (1.18) по контуру удалось найти τ_{VDE} без ранее неотъемлемого в теории VDE [55, 73, 75, 76, 78, 92] предположения о конфокальности эллиптических сечений плазмы и стенки. Как показал анализ в главе 4, это условие, формулируемое математически в виде связи (4.7), серьёзно ограничивает область применимости известных аналитических оценок времени VDE [55, 73, 75, 76, 78, 92], см. формулы (4.1) и (4.2).

Новая формула (4.47), полученная для случая вытянутой плазмы и круглой вакуумной камеры, демонстрирует величину неточности в предсказаниях τ_{VDE} с условием (4.7). Достаточно отметить, что при малой вытянутости вакуумной камеры известные оценки (4.1) и (4.2) предсказывают переход к быстрой (идеальной) МГД-неустойчивости. Наш результат в том же пределе даёт медленную неустойчивость с $\tau_{\text{VDE}} \sim \tau_w$ в достаточно широком диапазоне вытянутости плазмы K_b и относительной ширины вакуумного промежутка b/b_w , что хорошо согласуется с экспериментом. Таким образом, представленный в главе 4 анализ доказывает необходимость оценки τ_{VDE} без использования модели «конфокальной» стенки и даёт для этого всю необходимую базу. Рассмотрение вытянутой «неконфокальной» стенки представляет собой следующий шаг в создании более точной аналитической теории VDE, а разрешение возникающих на этом пути математических трудностей описано в Приложении.

Благодарности

Автор выражает самую глубокую благодарность своему научному руководителю, В. Д. Пустовитову, за многолетнее наставничество, постановку задач и помощь в совершенствовании методов их решения, критику и ценные замечания, за переданный опыт и, конечно, неоценимый труд учителя. Я также благодарю А. Портоне за численные расчёты собственных мод тока в стенке вакуумной камеры, послужившие основой для сравнения с аналитическими результатами главы 3, и плодотворные дискуссии на встречах группы ИГРА по МГД, управлению и срывам.

Автор крайне признателен А. В. Мельникову, заведующему Кафедрой физики и химии плазмы МФТИ, за всестороннюю помощь и огромное внимание, уделённое диссертации, Д. Ю. Сычугу, А. А. Степаненко, В. В. Солохе и Ю. В. Капустину за полезные замечания, а также А. Н. Чудновскому и С. В. Коновалову за поддержку и возможность работать в коллективе учёных, вносящих заметный вклад в теоретическую физику плазмы и проблему управляемого термоядерного синтеза. Мне приятно упомянуть здесь своих коллег Г. А. Саранчу, А. А. Кожурина и М. Е. Суховицкую за интересные дискуссии и неформальную часть научной жизни.

Эту работу я бы хотел посвятить своей семье и друзьям, в особенности своей маме, Чукашевой Марианне Милгереьевне. Её поддержка и любовь сопровождают меня на протяжении всей жизни и были моей опорой на каждом этапе: от сдачи выпускных экзаменов и поступления в МФТИ до подготовки кандидатской диссертации. Эта забота навсегда останется в каждом уравнении, написанном здесь. Я многим обязан своей жене Камилле Чукашевой, которая всегда была и остаётся рядом, и благодарю её за неустанную поддержку, веру в успех моих научных исследований и красавицу-дочку Агнию. Наконец, я хочу сказать спасибо своему отчиму С. С. Ухандееву, который стал мне практически отцом и сильно помогал на моём пути, и своей бабушке Н. С. Айдулиной за счастливое детство и лучшие в мире блинчики.



Приложение. Вычисление τ_{VDE} с учётом вытянутости стенки

Если стенка вакуумной камеры является тором с эллиптическим сечением, то при вычислении интеграла в (4.34) удобно использовать координаты (ν, ϑ) , подобные (μ, θ) , но с заменой c_b на

$$c_w = b_w \sqrt{K_w^2 - 1}. \quad (\text{П.1})$$

По аналогии с (2.15), (2.16) они задаются равенствами

$$x = c_w \operatorname{sh} \nu \cos \vartheta, \quad z = c_w \operatorname{ch} \nu \sin \vartheta, \quad (\text{П.2})$$

а поверхность стенки $\nu = \nu_w$. Здесь c_w считается независимым от c_b , что существенно расширяет область рассмотрения по сравнению с традиционным подходом с конфокальными эллипсами S_w и S_{pl} , т.е. при $c_w = c_b$ [55, 71–73, 75, 76, 78, 92]. Элемент длины такого контура в (4.34) выражается через угол на стенке $\vartheta = \vartheta_w$ как

$$d\ell_w \simeq b_w \sqrt{\frac{K^2 + 1}{2}} \left(1 + \frac{\epsilon_w}{2} \cos 2\vartheta_w \right) d\vartheta_w, \quad (\text{П.3})$$

где

$$\epsilon_w \equiv \frac{1}{\operatorname{ch} 2\nu_w} = \frac{K_w^2 - 1}{K_w^2 + 1}. \quad (\text{П.4})$$

В диапазоне $1 \leq K_w \leq 2$ этот параметр меняется от 0 до 0.6. Поэтому мы преобразуем точное выражение для $d\ell_w$ к виду (П.3) по формуле $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$, что при $x = 0.6$ соответствует замене 1.26 на 1.3.

Следуя алгоритму в разделе 4.4, аппроксимируем функцию Грина в (4.34) как $G \simeq G_0$, но теперь воспользуемся разложением (1.59) в эллиптических координатах (П.2). Подстановка в (4.34) с интегрированием с учётом (П.3) дают

$$\frac{c_b}{R_{pl}} \oint_w G \operatorname{sh}(2\mu_b - \mu_w) \sin \theta_w \frac{d\ell_w}{b_w} = \left[\frac{e^{-2\mu_b}}{\gamma \tau_w} + \sqrt{\frac{K_w^2 + 1}{2}} e^{-\nu_w} \sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k(\nu, \vartheta) \right] z \quad (\text{П.5})$$

с величиной

$$\gamma = \frac{e^{\nu_w - 2\mu_b}}{\tau_w} \sqrt{\frac{2}{K_w^2 + 1}} \left[A_1 + \frac{\epsilon_w}{4} (A_3 - A_1) \right]^{-1}. \quad (\text{П.6})$$

Как показано ниже, это и есть инкремент VDE. Здесь

$$A_m \equiv \frac{c_b}{\pi c_w} \int_0^{2\pi} \text{sh}(2\mu_b - \mu_w) \sin \theta_w \sin m\vartheta_w d\vartheta_w \quad (\text{П.7})$$

— коэффициенты Фурье, связанные с C_k в (П.5) выражением

$$C_k \equiv \frac{e^{-2k\nu_w}}{2k+1} \left[A_{2k+1} + \frac{\epsilon_w}{4} (A_{2k-1} + A_{2k+3}) \right], \quad (\text{П.8})$$

а

$$f_k(\nu, \vartheta) \equiv \frac{\text{ch}(2k+1)\nu}{\text{ch } \nu} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos 2n\vartheta \right). \quad (\text{П.9})$$

Отметим, что в (П.5) и (П.7) зависимость переменных (μ_w, θ_w) от угла ϑ_w определяется связью координат (2.15), (2.16) и (П.2).

При выводе (П.5) мы пользовались тем, что подынтегральная функция в (3.31) является нечетной функцией угла ϑ_w , так как в нашей задаче при $\xi = 0$ конфигурация «плазма-стенка» симметрична относительно плоскости $z = 0$. Это даёт $A_m \neq 0$ только для нечётных $m = 2k - 1$, что получается прямым вычислением коэффициентов Фурье. Применение стандартного представления $\text{sh}(\alpha + \beta)$ и связи систем координат (2.15), (2.16) и (П.2) превращает (П.7) в

$$A_m = \text{sh } 2\mu_b \text{ch } \nu_w \delta_{1m} - \text{ch } 2\mu_b \frac{c_b}{\pi c_w} \int_0^{2\pi} \text{sh } \mu_w \sin \theta_w \sin m\vartheta_w d\vartheta_w, \quad (\text{П.10})$$

где δ_{1m} означает дельту Кронекера. При $c_w = c_b$, соответствующем условию конфокальности (3), переменные θ_w и ϑ_w совмещаются и $A_m = \delta_{1m} \text{sh}(2\mu_b - \mu_w)$. В общем случае с $c_w \neq c_b$ коэффициенты A_m не равны нулю и при $m > 1$.

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью

$$\text{sh } \mu_w \sin \theta_w = \frac{1}{i} (\text{ch } \omega_w - \text{ch } \mu_w \cos \theta_w), \quad (\text{П.11})$$

где $\omega_w = \mu_w + i\theta_w$. Второе слагаемое здесь является четной функцией ϑ_w и даёт нулевой вклад в интеграл, который превращается в

$$\frac{c_b}{\pi c_w} \int_0^{2\pi} \text{sh } \mu_w \sin \theta_w \sin m\vartheta_w d\vartheta_w = \frac{i}{2} (e^{-m\eta_w} I_m^+ - e^{m\eta_w} I_m^-). \quad (\text{П.12})$$

В комплекснозначных коэффициентах

$$I_m^\pm = \frac{1}{\pi c_w^{m+1}} \oint_w \sqrt{\frac{c_b^2 + s_w^2}{c_w^2 + s_w^2}} \left(\sqrt{c_w^2 + s_w^2} \pm s_w \right)^m ds_w \quad (\text{П.13})$$

интегрирование производится против часовой стрелки по эллиптическому контуру S_w в комплексной плоскости, а $s_w = x_w + iz_w$. При получении (П.12) мы воспользовались равенствами $\sin m\vartheta_w = (e^{im\vartheta_w} - e^{-im\vartheta_w})/2i$ и $d\vartheta_w = -ids_w/\sqrt{c_w^2 + s_w^2}$.

Интеграл в (П.13) определён для регулярной ветви квадратного корня, которая существует во внешней области контура S_w , так как все точки ветвления $s_w = \{\pm c_b, \pm c_w\}$ находятся внутри S_w . Раскладывая скобку в (П.13) в бином Ньютона, получаем

$$I_m^\pm = -2\pi i \sum_{n=0}^m (\pm 1)^n \binom{m}{n} \text{Res}_\infty \Phi_{mn}(s_w), \quad (\text{П.14})$$

где $\binom{m}{n}$ — биномиальные коэффициенты, а

$$\Phi_{mn}(s_w) = \frac{1}{\pi c_w^{m+1}} (c_b^2 + s_w^2)^{\frac{1}{2}} (c_w^2 + s_w^2)^{\frac{m-n-1}{2}} s_w^n \quad (\text{П.15})$$

— главная ветвь подынтегральной функции. Её вычет равен коэффициенту ряда Лорана при s_w^{-1} в окрестности $s_w = \infty$ и имеет ненулевое значение при $m = 2k - 1 \ \forall k \geq 1$. Поэтому $\text{Res}_\infty \Phi_{2kn} = 0$, а

$$\text{Res}_\infty \Phi_{2k-1n} = -\frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^k \binom{1/2}{l} \binom{k-1-n/2}{k-l} \left(\frac{c_b}{c_w} \right)^{2l}. \quad (\text{П.16})$$

Таким образом, интегралы (П.13), а значит, и (П.12) не равны нулю только для нечётных m . При этом $I_{2k-1} = i\delta_{1k}$, что следует из теоремы Коши о вычетах. Подстановка (П.16) в (П.12) и (П.10) даёт значения коэффициентов A_m . В целях краткости записи мы выделяем выражение для главного коэффициента ($m = 1$)

$$A_1 = \text{sh}(2\mu_b - \nu_w) + \left(\frac{c_b^2}{c_w^2} - 1 \right) e^{-\nu_w} \text{ch } 2\mu_b, \quad (\text{П.17})$$

и общую формулу для старших коэффициентов

$$A_m = \text{ch } 2\mu_b e^{-m\nu_w} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}} \binom{1/2}{l} \binom{\frac{m-n-1}{2}}{\frac{m+1}{2}-l} \left(\frac{c_b}{c_w} \right)^{2l} \quad (\text{П.18})$$

с $m = 2k + 1$, где $k \geq 1$. Последнее предписывает экспоненциальный характер убывания коэффициентов Фурье с увеличением номера m .

Из этих выражений следует, что по отношению к первому коэффициенту старшие убывают экспоненциально как $A_{2k+1}/A_1 \sim e^{-(2k+1)\nu_w}$, где $\nu_w = \operatorname{arcth} K_w$. Величина ν_w равна 0.55 при $K_w = 2$ и 0.8 при $K_w = 1.5$, и $\nu_w \rightarrow \infty$ при $K_w \rightarrow 1$. Заметим, что в этом пределе слагаемые $C_k f_k$ в (П.5) стремятся к конечным выражениям, убывающим с k степенным образом, см. (4.42), а ряд (П.5) сходится к функции (4.40). Здесь для нас существенно лишь то, что для вакуумной камеры с $K_w \leq 2$ амплитуды $C_k \sim e^{-(4k+1)\nu_w}/(2k+1)$ в (П.5) дают поправку к основному слагаемому с $\gamma\tau_w$ менее чем 2.1% при $k = 1$ и 0.1% при $k = 2$, а вклад $\epsilon_w A_3/4$ в (П.6) составляет 2.8% по сравнению с A_1 . Поэтому в (П.6) можно ограничиться только слагаемыми с A_1 , а в правой части (П.5) в силу сходимости ряда достаточно сохранить первый член.

В приведенных оценках мы полагали $\gamma\tau_w \leq O(1)$, что согласуется со сделанными ранее пренебрежениями инерцией плазмы в (2) и скин-эффектом в (4.10), при которых была получена формула (4.34). Окончательно подстановка (П.5) превращает (4.34) в

$$\tau_{\text{VDE}} = \gamma^{-1} = \tau_1^- \left(1 - \frac{\epsilon_w}{4} \right) \left[\frac{K_b + 1}{K_b - 1} \frac{K_b^2 + 1}{K_w^2 + K_w} \frac{b^2}{b_w^2} - 1 \right], \quad (\text{П.19})$$

где

$$\tau_1^- = \tau_w \sqrt{\frac{K_w^2 + 1}{2}} \frac{K_w}{K_w + 1} \quad (\text{П.20})$$

— время затухания (3.53) дипольной моды токов индукции в вытянутой резистивной стенке, а величина ϵ_w определена равенством (П.4). Множитель $(1 - 0.25\epsilon_w)$ в (П.19) слабо зависит от K_w и меняется от 1 при $K_w = 1$ до 0.85 при $K_w = 2$. Результат (П.19) представляет собой обобщение оценки (4.47) на случай неконфокальной стенки вытянутого сечения.

Список литературы

1. Арцимович Л. А., Шафранов В. Д. Токамак с некруглым сечением плазменного витка // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15, №1. С. 72.
2. Мухоматов В. С. Токамаки // Итоги науки и техники, серия «Физика плазмы». Т. 1, ч. 1 / Под ред. В. Д. Шафранова. М.: ВИНТИ, 1980. С. 6.
3. Мурнов С. В. Физические процессы в плазме токамака // М.: Энергоатомиздат, 1985.
4. *ITER Physics Expert Group on Disruptions, Plasma Control, and MHD and ITER Physics Basis Editors*. Chapter 3: MHD stability, operational limits and disruptions // Nuclear Fusion. 1999. Vol. 39, №12. P. 2251.
5. *Shimada M. et al.* Progress in the ITER Physics Basis. Chapter 1: Overview and summary // Nuclear Fusion. 2007. Vol. 47, №6. P. S1.
6. *Hender T. C. et al.* Progress in the ITER Physics Basis. Chapter 3: MHD stability, operational limits and disruptions // Nuclear Fusion. 2007. Vol. 47, №6. P. S128.
7. *Bandyopadhyay I. et al.* MHD, disruptions and control physics: Chapter 4 of the special issue: on the path to tokamak burning plasma operation // Nuclear Fusion. 2025. Vol. 65, №10. P. 103001.
8. *Minaev V. B. et al.* Spherical tokamak Globus-M2: design, integration, construction // Nuclear Fusion. 2017. Vol. 57, №6. P. 066047.
9. *Bakhrev N. N. et al.* Recent advances at the Globus-M2 tokamak // In 30th IAEA Fusion Energy Conference FEC 2025 (Chengdu, China, 13-18 October 2025).
10. Велихов Е. П. и др. Программа физических исследований на токамаке Т-15МД // Вопросы атомной науки и техники. Серия Термоядерный синтез. 2024. Т. 47, Вып. 4. С. 9.

11. *Kirneva N. A. et al.* T-15MD: mission and recent experimental results // In 30th IAEA Fusion Energy Conference FEC 2025 (Chengdu, China, 13-18 October 2025).
12. *Красильников А. В. и др.* Токамак с реакторными технологиями (TRT): концепция, миссии, основные особенности и ожидаемые характеристики // Физика плазмы. 2021. Т. 47, №11. С. 970.
13. *Tanna R. L. et al.* Overview of physics results from the ADITYA-U tokamak and future experiments // Nuclear Fusion. 2024. Vol. 64, №11. P. 112011.
14. *Bucalossi J. et al.* Operating a full tungsten actively cooled tokamak: overview of WEST first phase of operation // Nuclear Fusion. 2022. Vol. 62, №4. P. 042007.
15. *Saxena Y. T., SST-1 Team.* Present status of the SST-1 project // Nuclear Fusion. 2000. Vol. 40, №6. P. 1069.
16. *Meyer H. for the AUG team.* Overview of physics studies on ASDEX Upgrade // Nuclear Fusion. 2019. Vol. 59, №1. P. 112014.
17. *Duan X. R. et al.* Recent advance progress of HL-3 experiments // Nuclear Fusion. 2024. Vol. 64, №11. P. 112021.
18. *Duval B. P. et al.* Experimental research on the TCV tokamak // Nuclear Fusion. 2024. Vol. 64, №11. P. 112023.
19. *Panek R. et al.* Status of the COMPASS tokamak and characterization of the first H-mode // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2016. Vol. 58, №1. P. 014015.
20. *Kamada Y. et al.* Completion of JT-60SA construction and contribution to ITER // Nuclear Fusion. 2022. Vol. 62. P. 042002.
21. *Garcia J. et al.* First JT-60SA plasma operation and plans in view of ITER and DEMO // In 30th IAEA Fusion Energy Conference FEC 2025 (Chengdu, China, 13-18 October 2025).

22. *Gong X. on behalf of EAST Team and Collaborators.* Overview of recent experimental results on the EAST Tokamak // Nuclear Fusion. 2024. Vol. 64, №11. P. 112013.
23. *Nam Y. U. et al.* Overview of the KSTAR experiments and future plan // In 30th IAEA Fusion Energy Conference FEC 2025 (Chengdu, China, 13-18 October 2025).
24. *Rothstein A. et al.* Assessing the numerical stability of physics models to equilibrium variation through database comparisons on DIII-D // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2025. Vol. 67, №11. P. 015006.
25. *Crisanti F. et al.* Physics basis for the divertor tokamak test facility // Nuclear Fusion. 2024. Vol. 64, №10. P. 106040.
26. *Romanelli F. on behalf of DTT contributors.* The Divertor Tokamak Test project: progress towards the initial operation // In 30th IAEA Fusion Energy Conference FEC 2025 (Chengdu, China, 13-18 October 2025).
27. *Campbell D. J. et al.* Introduction and overview: Chapter 1 of the special issue: on the path to tokamak burning plasma operation // Nuclear Fusion. 2025. Vol. 65, №9. P. 093002.
28. *Yan J., Kong D. and BEST team.* Overview and updates of the Burning Plasma Experimental Superconducting Tokamak (BEST) // In 9th DEMO and Fusion Plants Workshop (Aomori, Japan, 10-13 June 2025).
29. *Creely A. J. et al.* Overview of the SPARC tokamak // Journal of Plasma Physics. 2020. Vol. 86, №5. P. 865860502.
30. *Utoh H. et al.* Progress on reliability of remote maintenance concept for JA DEMO // Fusion Engineering and Design. 2019. Vol. 146, Part B. P. 1583.
31. *Panek R. et al.* Conceptual design of the COMPASS upgrade tokamak // Fusion Engineering and Design. 2017. Vol. 123. P. 11.
32. *Sorbom B. N. et al.* ARC: A compact, high-field, fusion nuclear science facility and demonstration power plant with demountable magnets // Fusion Engineering and Design. 2015. Vol. 100. P. 378.

33. *Zhuang G. et al.* Progress of the CFETR design // Nuclear Fusion. 2019. Vol. 59, №11. P. 112010.
34. *Xue L. et al.* Effects of the second X-point on hot VDE in HL-2M // Nuclear Fusion. 2017. Vol. 57, №5. P. 056029.
35. *Pfefferle D. et al.* Modelling of NSTX hot vertical displacement events using M3D-C1 // Physics of Plasmas. 2018. Vol. 25, №5. P. 056106.
36. *Qiu Q. et al.* Simulation of hot VDE disruption in EAST by using the TSC code // Fusion Engineering and Design. 2020. Vol. 150. P. 111358.
37. *Artola F. J. et al.* Understanding the reduction of the edge safety factor during hot VDEs and fast edge cooling events // Physics of Plasmas. 2020. Vol. 27, №3. P. 032501.
38. *Krebs I. et al.* Axisymmetric simulations of vertical displacement events in tokamaks: A benchmark of M3D-C¹, NIMROD, and JOREK // Physics of Plasmas. 2020. Vol. 23, №2. P. 022505.
39. *Kiramov D. I. Breizman B. N.* Bifurcation-driven vertical plasma displacement // Physics of Plasmas. 2022. Vol. 29, №5. P. 054502.
40. *Schwarz N. et al.* Experiments and non-linear MHD simulations of hot vertical displacement events in ASDEX-Upgrade // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2023. Vol. 65, №5. P. 054003.
41. *Artola F. J. et al.* Modelling of vertical displacement events in tokamaks: status and challenges ahead // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2024. Vol. 66, №5. P. 055015.
42. *Kiramov D. I., Breizman B. N.* Force-free motion of a cold plasma during the current quench // Physics of Plasmas. 2018. Vol. 25, №9. P. 092501.
43. *Clauser C. F., Jardin S. C.* ITER cold VDEs in the limit of perfectly conducting walls // Physics of Plasmas. 2021. Vol. 28, №1. P. 012511.
44. *Bandaru V. et al.* Axisymmetric predictions for mitigated and vertically unstable disruptions in ITER with runaway electrons // Journal of Plasma Physics. 2025. Vol. 91, №1. P. E21.

45. *Wang C. et al.* The effect of vertical displacements on the runaway electron avalanche in ITER mitigated disruptions // Nuclear Fusion. 2025. Vol. 65, №1. P. 016012.
46. *Villone F. et al.* Coupling of nonlinear axisymmetric plasma evolution with three-dimensional volumetric conductors // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2013. Vol. 55, №9. P. 095008.
47. *Villone F., Ramogida G. and Rubinacci G.* Electromagnetic disruption analysis in IGNITOR // Fusion Engineering and Design. 2015. Vol. 93. P. 57.
48. *Chen S. L. et al.* Disruptive plasma simulations in the EAST tokamak including three-dimensional effects // Nuclear Fusion. 2019. Vol. 59, №10. P. 106039.
49. *Yanovskiy V. V. et al.* Comparison of approaches to the electromagnetic analysis of COMPASS-U vacuum vessel during fast transients // Fusion Engineering and Design. 2019. Vol. 146, Part B. P. 2338.
50. *Isernia N. et al.* Cross-validation of analytical models for computation of disruption forces in tokamaks // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2019. Vol. 61, №11. P. 115003.
51. *Yanovskiy V. V. et al.* Global forces on the COMPASS-U wall during plasma disruptions // Nuclear Fusion. 2021. Vol. 61, №9. P. 096016.
52. *Yanovskiy V. V. et al.* Sideways forces on asymmetric tokamak walls during plasma disruptions // Nuclear Fusion. 2022. Vol. 62, №8. P. 086001.
53. *Clauser C. F. et al.* Vertical forces during vertical displacement events in an ITER plasma and the role of halo currents // Nuclear Fusion. 2019. Vol. 59, №12. P. 126037.
54. *Sovinec C. R., Bunkers K. J.* Effects of asymmetries in computations of forced vertical displacement events // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2019. Vol. 61. P. 024003.
55. *Banerjee D. et al.* Linear NIMROD simulations of $n = 0$ modes for straight tokamak configuration and comparison with analytic results // Physics of Plasmas. 2024. Vol. 31, №2. P. 023904.

56. *Barberis T. et al.* Simulations of vertical displacement oscillatory modes and global Alfvén Eigenmodes in JET geometry // Nuclear Fusion. 2024. Vol. 64, №12. P. 126064.
57. *Artola F. J. et al.* Non-axisymmetric MHD simulations of the current quench phase of ITER mitigated disruptions // Nuclear Fusion. 2022. Vol. 62, №5. P. 026023.
58. *Isernia N. et al.* Self-consistent coupling of JOREK and CARIDDI: On the electromagnetic interaction of 3D tokamak plasmas with 3D volumetric conductors // Physics of Plasmas. 2023. Vol. 30, №11. P. 113901.
59. *Miyamoto S. et al.* Simulation of VDE under intervention of vertical stability control and vertical electromagnetic force on the ITER vacuum vessel // Fusion Engineering and Design. 2012. Vol. 87. P. 1816.
60. *Miyamoto S. et al.* Inter-code comparison benchmark between DINA and TSC for ITER disruption modelling // Nuclear Fusion. 2014. Vol. 54, №8. P. 083002.
61. *Gribov Y. et al.* Plasma vertical stabilisation in ITER // Nuclear Fusion. 2015. Vol. 55, №7. P. 073021.
62. *Khayrutdinov R. R., Lukash V. E. and Pustovitov V. D.* Local and integral forces on the vacuum vessel during thermal quench in the ITER tokamak // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2016. Vol. 58. P. 115012.
63. *Хайрутдинов Р. Р., Лукаш В. Э., Пустовитов В. Д.* Анализ электромагнитных нагрузок на вакуумную камеру при тепловом срыве в токамаке TRT // Физика плазмы. 2021. Т. 47, №11. С. 1007.
64. *Sayer R. O. et al.* TSC plasma halo simulation of a DIII-D vertical displacement episode // Nuclear Fusion. 1993. Vol. 33, №7. P. 969.
65. *Qiu Q. et al.* Simulation of EAST vertical displacement events by tokamak simulation code // Nuclear Fusion. 2016. Vol. 56, №10. P. 106029.
66. *Gruber O. et al.* Vertical displacement events and halo currents // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1993. Vol. 35. P. B191.

67. *Riccardo V., Walker S. and Noll P.* Modelling magnetic forces during asymmetric vertical displacement events in JET // Fusion Engineering and Design. 2000. Vol. 47. P. 389.
68. *Kiramov D. I., Breizman B. N.* Model of vertical plasma motion during the current quench // Physics of Plasmas. 2017. Vol. 24. P. 100702.
69. *Pfefferle D., Bhattacharjee A.* Algebraic motion of vertically displacing plasmas // Physics of Plasmas. 2018. Vol. 25. P. 022516.
70. *Bardsley O. P., Hender T. C.* On the axisymmetric stability of tokamaks with ferromagnetic walls // Physics of Plasmas. 2020. Vol. 27. P. 102508.
71. *Laval G., Pellat R. and Soule J. S.* Hydromagnetic stability of a current-carrying pinch with noncircular cross section // Physics of Fluids. 1974. Vol. 17, №4. P. 835.
72. *Haas F. A.* Stability of a high- β tokamak to uniform vertical displacements // Nuclear Fusion. 1975. Vol. 15, №3. P. 407.
73. *Wesson J. A.* Hydromagnetic stability of tokamaks // Nuclear Fusion. 1978. Vol. 18, №1. P. 87.
74. *Porcelli F. et al.* Resonant Axisymmetric Modes // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1785. P. 012004.
75. *Barberis T., Porcelli F. and Yolbarsop A.* Fast-ion-driven vertical modes in magnetically confined toroidal plasmas // Nuclear Fusion. 2022. Vol. 62, №6. P. 064002.
76. *Barberis T., Yolbarsop A. and Porcelli F.* Vertical displacement oscillatory modes in tokamak plasmas // Journal of Plasma Physics. 2022. Vol. 88. P. 905880511.
77. *Yolbarsop A. et al.* Analytic theory of ideal-MHD vertical displacements in tokamak plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2022. Vol. 64, №10. P. 105002.

78. *Porcelli F., Barberis T. and Yolbarsop A.* Vertical displacements close to ideal-MHD marginal stability in tokamak plasmas // *Fundamental Plasma Physics*. 2023. Vol. 5. P.100017.
79. *Haney S. W., Freidberg J. P.* Variational methods for studying tokamak stability in the presence of a thin resistive wall // *Physics of Fluids B*. 1989. Vol. 1, №8. P. 1637.
80. *Nakamura Y. et al.* Mechanism of vertical displacement events in JT-60U disruptive discharges // *Nuclear Fusion*. 1996. Vol. 36, №5. P. 643
81. *Nakamura Y. et al.* Acceleration Mechanism of Vertical Displacement Event and its Amelioration in Tokamak Disruptions // *Journal of Nuclear Science and Technology*. 1996. Vol. 33, №8. P. 609.
82. *Шафранов В. Д.* Равновесие тороидального плазменного шнура в магнитном поле // *Атомная энергия*. 1962. Т. 13. С. 521.
83. *Шафранов В. Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле // *Вопросы теории плазмы*. Вып. 2 / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 92.
84. *Mukhovatov V. S., Shafranov V. D.* Plasma equilibrium in a Tokamak // *Nuclear Fusion*. 1971. Vol. 11. P. 605. (Равновесие плазмы в токамаке // Препринт ИАЭ им. И. В. Курчатова–2063. М.: Институт атомной энергии, 1971).
85. *Захаров Л. Е., Шафранов В. Д.* Равновесие плазмы с током в тороидальных системах // *Вопросы теории плазмы*. Вып. 11 / Под ред. М. А. Леонтовича и Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. С. 147.
86. *Захаров Л. Е.* Виталий Д. Шафранов и необходимые условия для термоядерного синтеза // *Физика плазмы*. 2019. Т. 45, №12. С. 1059.
87. *Пустовитов В. Д.* Разрешение противоречий экспериментов Арцимовича с теорией равновесия Шафранова // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. 2025. Т. 168, №2. С. 255.

88. *Осовец С. М.* Плазменный виток в электромагнитном поле // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. I. / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Издательство АН СССР, 1958. с. 3.
89. *Fukuyama A. et al.* Positional Instabilities in a Tokamak with a Resistive Shell // Japanese Journal of Applied Physics. 1975. Vol. 14, №6. P. 871.
90. *Lazarus E. A. et al.* Control of the vertical instability in tokamaks // Nuclear Fusion. 1990. Vol. 30, №1. P. 111.
91. *Миямото К.* Основы физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза // М.: Физматлит, 2007.
92. *Wesson J. A.* Tokamaks // Oxford: Clarendon Press, 2004.
93. *Goedbloed J. P., Keppens R. and Poedts S.* Advanced Magnetohydrodynamics with Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas // Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
94. *Stacey W. M.* Fusion Plasma Physics // Weinheim: Wiley, 2012.
95. *Freidberg J. P.* Ideal MHD // New York: Cambridge University Press, 2014.
96. *Zohm H.* Magnetohydrodynamic Stability of Tokamaks // Weinheim: Wiley, 2014.
97. *Gajewski R.* Magnetohydrodynamic Equilibrium of an Elliptical Plasma Cylinder // Physics of Fluids. 1972. Vol. 15, №1. P. 70.
98. *Strauss H. R.* Bifurcation of elliptic equilibrium // Physics of Fluids. 1974. Vol. 17, №5. P. 1040.
99. *Papaloizou J. C. B. et al.* Magnetohydrodynamic equilibria in a straight magnetic quadrupole field // Nuclear Fusion. 1977. Vol. 17, №1. P. 33.
100. *Goedbloed J. P., Zakharov L. E.* Helical equilibria of a plasma column with a diffuse current distribution // Nuclear Fusion. 1980. Vol. 20, №12. P. 1515.
101. *Coelho R., Porcelli F.* Ideal stability of an elliptical plasma column in the presence of external feedback currents // Physics of Plasmas. 2003. Vol. 10, №4. P. 930.

102. *Porcelli F., Yolbarsop A.* Analytic equilibrium of “straight tokamak” plasma bounded by a magnetic separatrix // *Physics of Plasmas*. 2019. Vol. 26. P. 054501.
103. *Pustovitov V. D., Chukashev N. V.* Toroidal vs cylindrical analytical description of the magnetic field outside the elongated evolving plasma in tokamaks // *Physics of Plasmas*. 2023. Vol. 30, №4. P. 042505.
104. *Bernstein I. B. et al.* An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1958. Vol. 244, №1236. P. 17.
105. *Кадомицев Б. Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // *Вопросы теории плазмы*. Вып. 2 / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 132.
106. *Михайловский А. Б.* Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках // М.: Атомиздат, 1978.
107. *Бейтман Г.* МГД-неустойчивости // М.: Энергоиздат, 1982.
108. *Кадомицев Б. Б.* Коллективные явления в плазме // М.: Наука, 1988.
109. *Chu M. S., Okabayashi M.* Stabilization of the external kink and the resistive wall mode // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2010. Vol. 52, №12. P. 123001.
110. *Reimerdes H. et al.* Cross-machine comparison of resonant field amplification and resistive wall mode stabilization by plasma rotation // *Physics of Plasmas*. 2006. Vol. 13, №5. P. 056107.
111. *Portone A.* The stability margin of elongated plasmas // *Nuclear Fusion*. 2005. Vol. 45, №8. P. 926.
112. *Portone A.* Active and passive stabilization of $n = 0$ RWMs in future tokamak devices // *Nuclear Fusion*. 2017. Vol. 57, №12. P. 126060.
113. *Пустовитов В. Д.* Радиальная сила, действующая на стенку вакуумной камеры токамака при тепловых срывах // *Физика плазмы*. 2015. Т. 41, №12. С. 1029.

114. *Pustovitov V. D.* General approach to the problem of disruption forces in tokamaks // Nuclear Fusion. 2015. Vol. 55. P. 113032.
115. *Zakharov L. E., Li X.* Tokamak magneto-hydrodynamics and reference magnetic coordinates for simulations of plasma disruptions // Physics of Plasmas. 2015. Vol. 22. P. 062511.
116. *Mironov D. V., Pustovitov V. D.* Sideways force due to coupled kink modes in tokamaks // Physics of Plasmas. 2017. Vol. 24, №9. P. 092508.
117. *Pustovitov V. D., Rubinacci G. and Villone F.* On the computation of the disruption forces in tokamaks // Nuclear Fusion. 2017. Vol. 57, №12. P. 126038
118. *Pustovitov V. D., Kiramov D. I.* Local and integral disruption forces on the tokamak wall // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2018. Vol. 60, №4. P. 045011.
119. *Pustovitov V. D.* Reaction of the toroidal resistive wall on the magnetic field variations in tokamak-like systems // Physics of Plasmas. 2018. Vol. 25. P. 062510.
120. *Пустовитов В. Д.* Расширение теории равновесия Шафранова на описание срывов тока при учете диссипации в резистивной стенке в токамаках // Физика плазмы. 2019. Т. 45, №12. С. 1088.
121. *Пустовитов В. Д., Чукашев Н. В.* Аналитическое решение внешней задачи равновесия плазмы эллиптического сечения в токамаке // Физика плазмы. 2021. Т. 47, №10. С. 876.
122. *Pustovitov V. D., Chukashev N. V.* General Approach to the Evolving Plasma Equilibria with a Resistive Wall in Tokamaks // Mathematics. 2023. Vol. 11, №8. P. 1885.
123. *Pustovitov V. D.* Determination of plasma shift in a stellarator from magnetic measurements // Nuclear Fusion. 1990. Vol. 30, №8. P. 1523.
124. *Пустовитов В. Д.* Основы МГД-теории стеллараторов // Итоги науки и техники, серия «Физика плазмы». Т. 13 / Под ред. В. Д. Шафранова. М.: ВИНТИ, 1993. С. 3.

125. *Pustovitov V. D.* Theoretical principles of the plasma-equilibrium control in stellarators // Reviews of Plasma Physics. Vol. 21 / Ed. by B. B. Kadomtsev and V. D. Shafranov. New York: Consultants Bureau, 2000. P. 1.
126. *Dubrov M. L., Pustovitov V. D.* Diamagnetic diagnostics of rapid events in the T-15MD tokamak // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2019. Vol. 61. P. 065018.
127. *Chukashev N. V., Pustovitov V. D.* Analytical estimates of the vertical displacement growth rate in tokamaks with a resistive wall // Physics of Plasmas. 2025. Vol. 32, №3. P. 032511.
128. *Pustovitov V. D.* Analytical approach to calculation of disruption-induced vertical force on the tokamak wall // In 30th IAEA Fusion Energy Conference FEC 2025 (Chengdu, China, 13-18 October 2025).
129. *Pautasso G., Fable E. and the ASDEX Upgrade Team.* Reduced models for the maximum vertical force in a tokamak device // Nuclear Fusion. 2025. Vol. 65, №5. P. 056004.
130. *Portone A.* Force scaling for $n = 0$ RWMs // Nuclear Fusion. 2019. Vol. 59. P. 024002.
131. *Pustovitov V. D.* Dependence of the disruption forces on the plasma position inside the vacuum vessel in tokamaks // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2020. Vol. 62. P. 065003.
132. *Андреев В. Ф. и др.* Моделирование магнитных измерений на токамаке Т-15МД с учётом наведённых токов в вакуумной камере // Вопросы атомной науки и техники. Серия Термоядерный синтез. 2021. Т. 44, №4. С. 25.
133. *Chukashev N. V.* Toroidal current eigenmodes in the vacuum vessel of an elliptical cross-section tokamak // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2025. V. 67, №3. P. 035007.
134. *Pustovitov V. D.* Plasma stability theory including the resistive wall effects // Journal of Plasma Physics. 2015. Vol. 81. P. 905810609.

135. *Pustovitov V. D.* General dispersion relations for resistive wall modes in tokamaks // Physics of Plasmas. 2023. Vol. 30, №9. P. 092504.
136. *Pustovitov V. D.* Theory based recommendations to the resistive wall mode stability studies in tokamaks // Physics of Plasmas. 2024. Vol. 31, №2. P. 020601.
137. *Wootton A. J.* Measurements of plasma shape in a tokamak // Nuclear Fusion. 1979. Vol. 19, №7. P. 987.
138. *Swain D. W., Neilson G. H.* An efficient technique for magnetic analysis of non-circular, high-beta tokamak equilibria // Nuclear Fusion. 1982. Vol. 22, №8. P. 1015.
139. *Lao L. L. et al.* Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks // Nuclear Fusion. 1985. Vol. 25, №11. P. 1611.
140. *Braams B. J.* The interpretation of tokamak magnetic diagnostics // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1991. Vol. 33, №7. P. 715.
141. *Strait E. J.* Magnetic diagnostic system of the DIII-D tokamak // Review of Scientific Instruments. 2006. Vol. 77, №2. P. 023502.
142. *Pustovitov V. D.* Decoupling in the problem of tokamak plasma response to asymmetric magnetic perturbations // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2008. Vol. 50. P. 105001.
143. *Stratton J. A.* Electromagnetic Theory // New York & London: McGraw-Hill, 1941.
144. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика // М.: «Мир», 1965.
145. *Морозов А. И., Соловьёв Л. С.* Геометрия магнитного поля // Вопросы теории плазмы. Вып. 2 / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 3.
146. *Shafranov V. D., Zakharov L. E.* Use of the virtual-casing principle in calculating the containing magnetic field in toroidal plasma systems // Nuclear Fusion. 1972. Vol. 12. P. 599.

147. *Zakharov L. E.* Numerical methods for solving some problems of the theory of plasma equilibrium in toroidal configurations // Nuclear Fusion. 1973. Vol. 13. P. 595.
148. *Lackner K.* Computation of ideal MHD equilibria // Computer Physics Communications. 1976. Vol. 12, №1. P. 33.
149. *Strumberger E. et al.* Numerical computation of magnetic fields of two- and three-dimensional equilibria with net toroidal current // Nuclear Fusion. 2002. Vol. 42, №7. P. 827.
150. *Sparago R., Artola F. J. and Hoelzl M.* Self-consistent full MHD coupling of JOREK and STARWALL for advanced plasma free boundary simulation // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2025. Vol. 67, №4. P. 045021.
151. *Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д.* Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы. Вып. 15 / Под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1987. С. 146.
152. *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Table of Integrals, Series and Products // Academic Press, 2007.
153. *Myers C. E. et al.* A multi-machine scaling of halo current rotation // Nuclear Fusion. 2018. Vol. 58, №1. P. 016050.
154. *Дубров М. Л. и др.* Анализ электромагнитных сил в вакуумной камере токамака за счёт индуцированного полоидального тока при срыве // Вопросы атомной науки и техники. Серия Термоядерный синтез. 2019. Т.42, №1. С. 39.
155. *Pustovitov V. D.* Disruption-induced poloidal currents in the tokamak wall // Fusion Engineering and Design. 2017. Vol. 117. P. 1.
156. *Pustovitov V. D.* Extended theory of diamagnetic measurements with account of the wall currents in tokamaks // Fusion Engineering and Design. 2019. Vol. 138. P. 53.
157. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред // М.: Физматлит, 2016.

158. *Pustovitov V. D.* Resolution of the paradox discovered by Freidberg in the Shafranov's theory on plasma equilibrium // *Physics of Plasmas*. 2020. Vol. 27, №10. P. 102503.
159. *Pustovitov V. D., Yanovskiy V. V.* Ferromagnetic effects in the theory of slow and fast resistive wall modes in tokamaks // *Physics of Plasmas*. 2014. Vol. 21, №2. P. 022516.
160. *Riccardo V. et al.* JET disruption studies in support of ITER // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2010. Vol. 52, №12. P. 124018.
161. *Pautasso G. et al.* The halo current in ASDEX Upgrade // *Nuclear Fusion*. 2011. Vol. 51, №4. P. 043010.
162. *Gerasimov S. N. et al.* Overview of disruptions with JET-ILW // *Nuclear Fusion*. 2020. Vol. 60, №6. P. 066028.
163. *Pustovitov V. D.* Virial relations for elongated plasmas in a tokamak and their potential use in magnetic diagnostics // *Physics of Plasmas*. 2022. Vol. 29, №9. P. 092507.
164. *Pustovitov V. D.* Theoretically assisted and empirical scalings in the problem of determination of internal inductance in tokamaks // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2023. Vol. 65, №11. P. 115004.
165. *Соловьев Л. С., Шафранов В. Д.* Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы // *Вопросы теории плазмы. Вып. 5 / Под ред. М. А. Леонтовича*. М.: Атомиздат, 1967. С. 3.
166. *Jardin S. C., Pomphrey N. and DeLucia J.* Dynamic Modeling of Transport and Positional Control of Tokamaks // *Journal of Computational Physics*. 1986. Vol. 66. P. 481.
167. *Kumar R. et al.* Estimation of vacuum vessel time-constant in ADITYA-U tokamak // *Fusion Engineering and Design*. Vol. 177. P. 113055.
168. *Hoelzl M. et al.* Coupling JOREK and STARWALL Codes for Non-linear Resistive-wall Simulations // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 401. P. 012010.

169. *Ludwig G. O., Del Bosco E. and Ferreira J. G.* Eddy currents in the vacuum vessel of the ETE spherical tokamak // Nuclear Fusion. 2005. Vol. 45, №7. P. 675.
170. *Kriezis E. E., Tegopoulos J. A.* Transient eddy current distribution in cylindrical shells // IEEE Transactions on Magnetics. 1975. Vol. 11, №5. P. 1529.
171. *Dialetis D. et al.* Diffusion of magnetic fields in a toroidal conducting shell of circular cross section // Journal of Applied Physics. 1991. Vol. 69, №4. P. 1813.
172. *Chance M. S. et al.* Theoretical modelling of the feedback stabilization of external MHD modes in toroidal geometry // Nuclear Fusion. 2002. Vol. 42, №3. P. 295.
173. *Chu M. S. et al.* Normal mode approach to modelling of feedback stabilization of the resistive wall mode // Nuclear Fusion. 2003. Vol. 43, №6. P. 441.
174. *Chu M. S., Ichiguchi K.* Effect of the resistive wall on the growth rate of weakly unstable external kink mode in general 3D configurations // Nuclear Fusion. 2005. Vol. 45, №8. P. 804.
175. *In Y. et al.* Model-based dynamic resistive wall mode identification and feedback control in the DIII-D tokamak // Physics of Plasmas. 2006. Vol. 13, №6. P. 062512.
176. *Pustovitov V. D.* General formulation of the resistive wall mode coupling equations // Physics of Plasmas. 2008. Vol. 15, №7. P. 072501.
177. *Chance M. S.* Vacuum calculations in azimuthally symmetric geometry // Physics of Plasmas. 1997. Vol. 4, №6. P. 2161.
178. *Toler E., Cerfon A. J. and Malhotra D.* A fast, accurate and easy to implement Kapur–Rokhlin quadrature scheme for singular integrals in axisymmetric geometries // Journal of Plasma Physics. 2023. Vol. 89, №2. P. 905890210.
179. *Malhotra D. et al.* Efficient high-order singular quadrature schemes in magnetic fusion // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2019. Vol. 62, №2. P. 024004.

180. *Cohl H. S., Tohline J. E.* A compact cylindrical Green's function expansion for the solution of potential problems // The Astrophysical Journal. 1999. Vol. 527. P. 86.
181. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1,2 // М.: ИЛ, 1958.
182. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики // М.: Наука, 1971.
183. *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* Интегральные уравнения // М.: Изд-во МГУ, 1989.
184. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике // М.: Издательство Московского университета, 1993.
185. *Zemyan S. M.* The Classical Theory of Integral Equation: A Concise Treatment // Springer Science & Business Media, 2012.
186. *Kanwal R. P.* Linear Integral Equations: Theory & Technique, 2nd ed. // Springer Science & Business Media, 2012.
187. *Su Z. et al.* Monotonicity based imaging method for time-domain eddy current problems // Inverse Problems. 2017. Vol. 33, №12. P. 125007.
188. *Tamburrino A., Piscitelli G. and Zhou Z.* // Inverse Problems. 2021. Vol. 37, №9. P. 095003.
189. *Hromadka J. et al.* Electromagnetic model for finite element analyses of plasma disruption events used in the design phase of the COMPASS-U tokamak // Fusion Engineering and Design. Vol. 167. P. 112369.
190. *Riccardo V. et al.* Analysis of JET halo currents // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2004. Vol. 46, №6. P. 925.
191. *Garcia J. et al.* Physics comparison and modelling of the JET and JT-60U core and edge: towards JT-60SA predictions // Nuclear Fusion. 2014. Vol. 54, №9. P. 093010.
192. *Rappe G. H.* The J.E.T. (Joint European Torus) vacuum vessel // Revue de Physique Appliquee. 1977. Vol. 12, №10. P. 1735.

193. *Lackner K., Macmahon A. B.* Numerical study of displacement instability in elongated tokamak // Nuclear Fusion. 1974. Vol. 14, №4. P. 565.
194. *Granetz R. S. et al.* Disruptions and halo currents in Alcator C-Mod // Nuclear Fusion. 1996. Vol. 36, №5. P. 545.
195. *Nakamura Y. et al.* β_p -collapse-induced vertical displacement event in high β_p tokamak disruption // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1996. Vol. 38, №10. P. 1791.
196. *Albanese R., Mattei M. and Villone F.* Prediction of the growth rates of VDEs in JET // Nuclear Fusion. 2004. Vol. 44, №9. P. 999.
197. *Sehmer T. et al.* Growth of Axisymmetric Instabilities in ASDEX Upgrade // Fusion Science and Technology. 2016. Vol. 70, №1. P. 73.
198. *Hofmann F., Moret J.-M. and Ward D. J.* Stability analysis of the vertical position control loop in TCV using rigid and deformable plasma models // Nuclear Fusion. 1998. Vol. 38, №12. P. 1767.
199. *Vondracek P. et al.* Preliminary design of the COMPASS upgrade tokamak // Fusion Engineering and Design. 2021. Vol. 169. P. 112490.
200. *Greenwald M. et al.* 20 years of research on the Alcator C-Mod tokamak // Physics of Plasmas. 2014. Vol. 21, №11. P. 110501.
201. *Takahashi H. et al.* Experimental determination of vertical instability strength in PDX tokamak // Nuclear Fusion. Vol. 22, №12. P. 1597.
202. *Villone F., Pustovitov V. D.* Skin effect modifications of the Resistive Wall Mode dynamics in tokamaks // Physics Letters A. 2013. Vol. 377. P. 2780.