

Национальный исследовательский центр
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

На правах рукописи



СОРОКИНА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСЕЕВНА

**КРУПНОМАСШТАБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ТЕЧЕНИЯ В
ЛАБОРАТОРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМАХ**

Специальность 1.3.9. Физика плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва
2026

Оглавление

Введение	5
1 Магнитогидродинамические модели и равновесие плазмы	25
1.1 Проблема существования трёхмерного равновесия плазмы	29
1.1.1 Модель 3D равновесия с осесимметричными магнитными поверхностями	32
1.1.2 Цилиндрические решения и проявление резонансов	36
1.1.3 Тороидальные конфигурации с истинными магнитными поверхностями	45
1.1.4 Общее решение с тороидальной асимметрией $n = 1$	51
1.1.5 Гипотеза Грэда и логика используемых приближений	55
1.2 Одножидкостная МГД-модель плазмы со стационарными течениями	59
1.2.1 Исходные МГД-уравнения	60
1.2.2 Равновесие плазмы со стационарным течением . .	60
1.2.3 МГД-модель крупномасштабных низкочастотных волн в токамаке с тороидальным вращением плазмы	62
1.3 Двухжидкостная модель частично замагниченной плазмы в скрещенных полях	64
1.3.1 Исходные уравнения двухжидкостной модели . . .	64
1.3.2 Равновесие двухкомпонентной плазмы в скрещенных полях	67
1.3.3 Осевые профили равновесных параметров плазмы в стационарном плазменном двигателе	69
1.3.4 Модель электромагнитной конфигурации СПД . .	70
1.4 Резюме главы 1	71
2 Низкочастотные колебания и течения в тороидальных системах магнитного удержания плазмы	73
2.1 Влияние магнитной конфигурации токамака на частоту сплошного МГД-спектра ГАМ	75

2.1.1	Общая теория радиально локализованных ГАМ сплошного спектра	76
2.1.2	ГАМ в токамаке некруглого сечения	79
2.1.3	Роль тороидальной гофрировки магнитного поля	82
2.2	Общее описание глобальных ГАМ и ЗТ в токамаке с тороидальным вращением плазмы	88
2.3	Глобальные геодезические акустические моды	90
2.3.1	Уравнения глобальных ГАМ	90
2.3.2	Глобальные ГАМ в токамаке с положительным магнитным широм и монотонным профилем температуры	91
2.3.3	Глобальные ГАМ в токамаке с максимумом локальной частоты ГАМ	97
2.3.4	О соотношении теории и эксперимента по глобальным ГАМ	98
2.4	Глобальные моды зональных течений в токамаке с тороидальным вращением плазмы	100
2.4.1	Аналитическое решение, описывающее структуру апериодически неустойчивого ЗТ	101
2.4.2	Численные решения с учётом эффектов равновесного продольного тока	106
2.5	Нелинейное взаимодействие ГАМ-ЗТ	108
2.5.1	МГД-модель нелинейной динамики флуктуаций электрического потенциала плазмы в токамаке	110
2.5.2	Теоретическая модель сателлитов ГАМ	112
2.5.3	Численное моделирование нелинейной динамики линейно неустойчивых $n = 0$ электростатических возмущений	119
2.5.4	Самосогласованная эволюция собственных мод ГАМ и ЗТ	140
2.5.5	Замечания о проявлении нелинейности	145
2.6	Резюме главы 2	147
3	Градиентно-дрейфовые волны в частично замагниченной плазме в скрещенных полях	149
3.1	Градиентно-дрейфовая неустойчивость. Формальный анализ	151

3.1.1	Общий закон дисперсии электростатических возмущений	152
3.1.2	Анализ устойчивости градиентно-дрейфовых волн	154
3.1.3	Уравнения глобальных мод в холловской плазме .	164
3.1.4	Глобальные градиентно-дрейфовые моды в цилиндрической конфигурации скрещенных полей с однородным магнитным полем	166
3.1.5	Область применения и место полученных результатов	169
3.2	Устойчивость нижнегибридных колебаний в стационарном плазменном двигателе	170
3.2.1	Анализ устойчивости локализованных мод в ускоряющем канале СПД	171
3.2.2	Глобальные моды в СПД	179
3.2.3	Общая картина ГДН в СПД	183
3.3	Резюме главы 3	185
4	Потоки частиц плазмы в присутствии электрического поля	186
4.1	Дрейфовая теория в случае сильного электрического поля	188
4.1.1	Обобщение лагранжиана Литтлджона	189
4.1.2	Примеры дрейфового движения заряженных частиц в сильном электрическом поле	194
4.2	Динамика электронов в стационарном плазменном двигателе	200
4.3	Вращение ансамбля частиц плазмы в радиальном электрическом поле токамака	209
4.3.1	Бесстолкновительная функция распределения и скорость макроскопического вращения	211
4.3.2	Тороидальная прецессия заряженной частицы в электрическом поле	213
4.3.3	К вопросу о возможности спонтанной генерации вращения и его асимметрии	227
4.4	Резюме главы 4	228
	Заключение	230
	Литература	233

Введение

Вопросы динамики и устойчивости неоднородной движущейся плазмы, т. е. плазмы со стационарными и осциллирующими во времени течениями, равно как и вопрос генерации таких течений и сопутствующих электрических и магнитных полей, относятся к числу первоочередных в иерархии проблем современной физики плазмы и её приложений. В лабораторных установках магнитного удержания плазмы, в том числе в наиболее перспективных с точки зрения проблемы управляемого термоядерного синтеза – токамаках и стеллараторах – скорость тороидального вращения плазмы может достигать величины порядка ионно-звуковой скорости – см. обзоры [1–3]. Вращение возникает как вследствие прямого воздействия на плазму, например, в виде несбалансированной тангенциальной инжекции пучков нейтральных атомов, так и самопроизвольным образом, т. е. без явного привнесения в систему внешнего момента механического импульса. В настоящее время природа “спонтанного” вращения является предметом активных исследований [4, 5] и до сих пор не получила исчерпывающего теоретического объяснения.

Хотя первоначальная концепция магнитной термоизоляции плазмы основывалась на идее статического равновесия плазмы в магнитном поле, к настоящему времени достоверно установлено, что режимы наилучшего удержания, характеризующиеся значительным снижением коэффициентов переноса и повышением удельного энергосодержания плазмы, – так называемая H -мода [6–8] и режимы с внутренними транспортными барьерами [9, 10] – реализуются именно во вращающейся плазме, а переход к ним тесно связан с перестройкой профиля радиального электрического поля [11–14].

Доминирует представление о том, что наблюдаемое улучшение удержания связано со снижением уровня мелкомасштабной дрейфовой турбулентности и сопутствующих ей потоков частиц и тепла в присутствии дифференциального вращения плазмы в форме широких¹ течений [15, 16]. В этой связи в токамаках особое внимание уделяют наблюдаемым крупномасштабным флуктуациям плазмы, однородным в тороидальном направлении и связанным с дрейфом в скрещенных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях. Среди таких

¹от англ. shear – сдвиг, скол, срез

флуктуаций выделяют два типа [17, 18]: сверхнизкочастотные течения, связанные с тороидально ($n = 0$, где n – тороидальное волновое число) и полоидально² ($m = 0$, где m – полоидальное волновое число) симметричными колебаниями электрического потенциала плазмы с частотой ~ 1 кГц, которые называют зональными течениями (ЗТ) по аналогии с течениями в атмосфере Земли и в океанах, и геодезические акустические моды (ГАМ) – осциллирующие потоки, возбуждаемые колебаниями электрического потенциала ($n = 0, m = 0$) конечной частоты $\sim 10 - 30$ кГц и сопровождаемые, в отличие от ЗТ, возмущением давления плазмы $m = 1, n = 0$.

Распространена точка зрения, что шировые течения генерируются обратным каскадом энергии дрейфовой турбулентности, в результате которого часть энергии мелкомасштабных колебаний, являющихся первопричиной аномального переноса плазмы, переходит в энергию крупномасштабного осесимметричного движения. Кроме того, такие течения способны воздействовать на уровень аномального переноса посредством разрыва турбулентных завихрений и уменьшения корреляционной длины [19–22]. Такое воздействие сегодня считается основным механизмом, контролирующим аномальный перенос в токамаках, хотя изложенная гипотеза до сих пор не нашла исчерпывающего экспериментального подтверждения. Тем не менее, свидетельства о модуляции уровня турбулентности флуктуациями ГАМ имеются на токамаках JFT-2M [23], DIII-D [24], HL-2A [25, 26], ФТ-2 [27, 28].

По другой из версий положительная роль вращения в удержании высокотемпературной плазмы связана со стабилизацией некоторых типов магнитогидродинамических (МГД) неустойчивостей, хотя в целом роль течений в устойчивости плазменных и гидродинамических систем весьма неоднозначна. Плазменные потоки существенным образом влияют на различные типы волн в плазме, их дисперсионные характеристики, пороги и инкременты неустойчивости. Известно, что вращение плазмы способно стабилизировать винтовые моды в присутствии проводящей стенки [29–31]. Во множестве экспериментов на токамаках показано, что снижение скорости тороидального вращения плазмы в направлении основного тока приводит к понижению порогового значения β (отношение давления плазмы к давлению магнитного поля) по отношению к неоклассической тиринг моде [32]. В ряде

²полоидальным направлением в токамаке называют направление, перпендикулярное тороидальному току

работ указана возможность стабилизации вращением неустойчивостей типа Рэля-Тейлора, наиболее известным проявлением которой в физике плазмы служит желобковая неустойчивость. В [33] продемонстрировано снижение инкрементов желобковых возмущений во вращающейся плазме. В [34, 35] показано, что при определённых профилях плазменных течений экспоненциально растущие возмущения не могут удовлетворить граничным условиям, при этом собственные моды отсутствуют как таковые. В то же время в [35] доказана теорема о дестабилизирующей роли вращения в смысле снижения порога желобковой неустойчивости. Однозначного вывода о роли вращения в устойчивости желобковых возмущений на основании экспериментальных данных также сделать не удаётся [36].

Кроме того, шир скорости является причиной развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [37, 38], а плазменные потоки выступают в качестве источника свободной энергии, наличие которого может провоцировать рост амплитуд волн различных типов и их последующее взаимодействие, приводящее к турбулентному состоянию плазменного объекта. При этом сценарии и последствия развития турбулентности в плазме бывают весьма различны: от хаотизации и интенсивного перемешивания плазмы в области турбулентности до формирования относительно крупномасштабных структур и образований, генерации макроскопических потоков и полей. Таким образом, макро- и микроскопические (по отношению к характерному масштабу рассматриваемых плазменных объектов) потоки плазмы могут выступать в качестве стабилизатора, источника, промежуточного агента или результата турбулентной эволюции плазмы.

Наряду с установками УТС мощные направленные потоки характерны и для систем с частично замагниченной плазмой в скрещенных электрическом и магнитном полях, которую также называют “холловской”. В системе отсчёта, связанной с массовой скоростью такой плазмы, присутствует электрическое поле, что соответствует эффекту Холла для её заряженных компонент. Холловская плазма широко распространена и в природе, примером чего могут служить ионосферы планет, и в лабораторных плазмодинамических системах – в ЭЦР-источниках плазмы, магнетронах, приборах для плазменной обработки и напыления материалов, магнитных фильтрах, плазменных ракетных двигателях, к которым, в частности, относится стационарный плазменный двигатель (СПД) А. И. Морозова. “Замагни-

ченность” электронов в холловских плазменных установках позволяет значительно превысить предел по плотности тока, ограниченного классическим законом Чайлда-Ленгмюра.

Холловская плазма подвержена множеству турбулентных флуктуаций, генерируемых за счёт свободной энергии, связанной с градиентом электронной плотности и равновесным электронным дрейфом в электрическом поле, перпендикулярном магнитному полю. Несмотря на значительный прогресс в понимании поведения плазмы в рассматриваемых условиях, всё ещё существуют крупные теоретические проблемы и связанные с ними значительные расхождения между предсказаниями теории и экспериментальными наблюдениями.

Сегодня основной акцент в теоретических исследованиях холловской плазмы направлен на объяснение аномальной проводимости электронов поперёк внешнего магнитного поля, наблюдаемой во многих экспериментах. Существует две главенствующие интерпретации данного явления. Это концепция пристеночной проводимости, активно развивавшаяся самим Морозовым, но в настоящее время считающаяся недостоверной из-за наблюдаемого объёмного характера переноса, и идея об аномальном переносе электронов на флуктуациях азимутального электрического поля, связанных с развитием неустойчивостей в плазме, сопровождающихся формированием крупномасштабных пространственных структур.

В плазме холловских двигателей, в частности, известно наличие так называемых “спиц”³ [39–42] – крупномасштабных структур с азимутальными волновыми числами $m = 1 \div 5$, медленно вращающихся в направлении стационарного $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа электронов. Считается, что азимутальное электрическое поле, ассоциируемое с вращением спиц, приводит к аномальному переносу электронов вдоль оси ускоряющего канала, критическим образом влияющему на рабочие характеристики разряда [43]. Интересно, что формирование спиц может сопровождаться как ухудшением параметров разряда, связанным с усилением электронного тока, что характерно, в частности, для миниатюрных цилиндрических плазменных двигателей (СНТ – Cylindrical Hall Thruster) [44], так и переходом в улучшенные режимы работы [41]. Эксперименты с использованием сегментированного анода в двигателе Н6 с центральным расположением катода [45] и в СНТ [46] показали, что в холловских двигателях спицы локализо-

³spokes в англоязычной литературе

ваны в прианодной области и переносят до половины тока разряда. Именно с выявлением природы физических процессов, ответственных за формирование вращающихся структур в плазме холловских двигателей, в последнее время связывают возможности дальнейшего развития таких систем, крайне актуальных для современной космонавтики в области как больших (~ 100 кВт), так и малых мощностей (~ 100 Вт).

Явления, аналогичные наблюдаемым в плазменных двигателях, известны и в классических разрядах Пеннинга [47], ионных магнетронах [48–50] и пр. Сходные образования наблюдаются и в космической плазме, в частности, в некоторых типах звёздного ветра и джетов, а также в пристеночной плазме токамаков. Так, пристальный интерес в последние годы вызывают пятнообразные структуры⁴, формирующиеся в периферийной области плазмы установок термоядерного синтеза (см., например, [51, 52] и ссылки в них). Считается, что такие структуры могут быть ответственны не менее чем за половину потоков выносимых из плазмы частиц и энергии.

Общепризнанного механизма формирования крупномасштабных структур в холловской плазме не существует. Осесимметричные ($m = 0$) низкочастотные колебания тока разряда⁵ связывают с аксиальной неустойчивостью фронта ионизации плазмы [53, 54]. С ионизационными процессами, а именно с концепцией критической скорости ионизации (CIV – Critical Ionization Velocity), предложенной Альфвеном [55], многие авторы, следуя пионерской работе [56], связывают и явление формирования спиц [49, 57, 58]. CIV-механизм даёт близкую оценку для скорости вращения азимутальных структур, однако при этом не является предсказательным, поскольку не несёт информацию об источнике самих ионизационных волн [45].

Между тем, плазма холловских разрядов подвержена развитию множества неустойчивостей: ионно-пучковой [59] и двухпоточковой [60] неустойчивостей, электронной- [61] и электрон-циклотронной [62] дрейфовых неустойчивостей, ионно-звуковой неустойчивости [63], различных модификаций градиентно-дрейфовых неустойчивостей (ГДН) и др. К последним, в частности, относится бесстолкновительная неустойчивость электростатических волн типа Саймона-Хо [64, 65], развивающаяся в пространственно неоднородной плаз-

⁴blobs в англоязычной литературе

⁵breathing mode в англоязычной литературе

ме при наличии источника свободной энергии в виде поперечного к внешнему магнитному полю тока [66]. При ГДН возмущение концентрации электронов в неоднородной плазме и соответствующее возмущение электрического поля нарастают во времени, приводя дополнительный (дрейфовый) вклад в электрический ток поперёк магнитного поля. Понятно, что если этот процесс носит нелокальный характер, то в плазме могут формироваться макроскопические структурные образования (например, неоднородности плотности) или, наоборот, могут разрушаться имеющиеся. Градиентно-дрейфовая неустойчивость активно исследуется в физике ионосферы и, в частности, является общепринятым механизмом измельчения нерегулярных структур в F -слое (см., например, [67]).

Характеристики плазменных течений тесно связаны со структурой электрического и магнитного полей, которые могут служить важным средством регулирования и оптимизации лабораторных систем. Таким образом, исследование крупномасштабных колебаний и течений плазмы в различных лабораторных системах и выявление связи их характеристик с параметрами рассматриваемых систем представляются весьма актуальными не только с точки зрения фундаментальной науки, но и для широкого ряда практических приложений.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются некоторые ключевые аспекты эволюции электрического потенциала плазмы и сопутствующих $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -течений в лабораторных системах удержания и ускорения плазмы с акцентом на анализ условий возникновения, характеристик и динамики крупномасштабных структурных образований. Большое внимание уделяется взаимодействию усреднённых и осциллирующих течений, где первые могут возникать и из-за внешних источников момента импульса, таких, например, как пучки нейтральных атомов или внешнее электрическое поле, и в результате самоорганизации плазмы. Ключевой особенностью формирования и, как следствие, способов описания крупномасштабных течений является их “привязка” к структуре вложенных магнитных поверхностей. При этом сам вопрос существования таких поверхностей в реальной трёхмерной (3D) геометрии магнитных полей, не обладающих строгой пространственной симметрией, долгое время оставался нерешённой проблемой теории равновесия – см., например, [68–72]. Поэтому сопутствующей задачей, обсуждаемой в диссертации, является поиск невырожденных трёхмерных равновесных плазменных

конфигураций со структурой вложенных магнитных поверхностей во всём объёме плазмы в контексте их дальнейшего использования в качестве начального состояния при анализе динамики флуктуаций.

Цель и задачи диссертационной работы

Цель диссертационной работы состоит в выяснении физической природы, а также в математическом описании и компьютерном моделировании экспериментально наблюдаемых в различных лабораторных системах крупномасштабных течений компонент плазмы. Характер таких течений в магнитном поле, как квазистационарных, так и носящих колебательный или волновой характер, во многом определяется структурой электрического поля, внешнего или самосогласованно возникающего в плазме, в том числе, связанного с собственными модами колебаний.

Для достижения указанной цели были выполнены комплексные исследования, решающие следующие задачи:

- выбор равновесной плазменной конфигурации со вложенными магнитными поверхностями в качестве исходного состояния при анализе динамики флуктуаций;
- развитие теории низкочастотных колебаний, свойственных тороидальным системам магнитного удержания плазмы: геодезических акустических мод и низкочастотных зональных течений;
- исследование собственных мод и механизмов формирования крупномасштабных вращающихся структур в холловских плазменных разрядах;
- моделирование генерации направленных потоков компонент плазмы в лабораторных плазмодинамических системах в присутствии сильного электрического поля.

Научная новизна работы

Следующие новые научные результаты, представленные в диссертационной работе, могут быть отнесены к числу основных.

- Аналитически доказана возможность существования глобальных геодезических акустических мод – собственных мод с постоянной частотой колебаний во всём объёме плазменного шнура.

Получено интегральное условие их существования. Построены показательные примеры собственных (глобальных) ГАМ как в плазме токамака с обратным широм магнитного поля, так и для монотонных профилей коэффициента запаса устойчивости $q(r)$.

- Впервые рассчитана структура и собственные частоты глобальных мод ЗТ, в том числе неустойчивых, в тороидально вращающейся плазме токамака с полым профилем тороидального числа Маха.
- Впервые в рамках идеальной МГД-модели плазмы исследовано влияние магнитной конфигурации токамака (формы магнитных поверхностей плазмы и тороидальной гофрировки магнитного поля) на частоту и полоидальную структуру ГАМ сплошного спектра.
- Разработана нелинейная МГД модель, описывающая самосогласованную динамику ГАМ и ЗТ, индуцированных тороидальным вращением плазмы в токамаке. В приближении слабой турбулентности получено аналитическое решение нелинейных уравнений, описывающее возникновение гармоник ГАМ на сумме и разности частот ГАМ и ЗТ. Выполнено численное моделирование различных режимов нелинейных колебаний, демонстрирующее стабилизацию линейно неустойчивых мод ЗТ, генерацию высших гармоник ЗТ и формирование тонкой структуры спектра ГАМ, наблюдаемой в экспериментах.
- Выведены общие уравнения равновесия плазмы в системах с магнитными поверхностями, обобщающие классическое уравнение Грэда-Шафранова (УГШ) на случай произвольной трёхмерной геометрии. Показано, что любое осесимметричное равновесие в токамаке, удовлетворяющее УГШ, допускает слабо асимметричную деформацию $n = 1$, не нарушающую условия равновесия и вложенности магнитных поверхностей. Представлен регулярный способ построения таких деформаций.
- Разработан универсальный аналитический подход для единообразного описания усреднённых характеристик траекторного движения (средней тороидальной скорости, баунс-периода, скорости прецессии) пролётных и запертых частиц в токамаке, в том чис-

ле при наличии радиального электрического поля, применимый во всём объёме плазменного шнура.

- Обоснована и описана генерация макроскопического вращения плазмы в токамаке, связанная с бесстолкновительной релаксацией первоначально изотропной функции распределения заряженных частиц в присутствии радиального электрического поля. Показана разнонаправленность такого вращения плазмы в тороидальном направлении на внутреннем и внешнем обводах тора, обусловленная различием движения пролётных и запертых частиц в токамаке.
- Получен обобщённый лагранжиан Литтлджона для описания движения заряженных частиц в скрещенных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ полях с сильной электрической компонентой, в которых скорость электрического дрейфа сопоставима со скоростью движения частицы. Показана возможность ускорения частицы из-за появления компоненты дрейфового движения вдоль сильного электрического поля.
- Исследована устойчивость, определены область локализации и глобальная структура колебаний в ускоряющем канале стационарного плазменного двигателя. Учтены особенности квазистационарного движения электронов и ионов, неоднородности магнитного поля и плотности плазмы, инерция электронов, дебаевские эффекты и эффекты конечного ларморовского радиуса (КЛР). Установлено, что характер движения электронов критически зависит от положения точки старта вдоль оси ускоряющего канала. В прикатодной области движение электронов является регулярным, тогда как при приближении к аноду наблюдается выраженная эргодизация траекторий, сопровождаемая значительным увеличением подвижности частиц вдоль оси системы.
- Предложена физическая трактовка крупномасштабных осцилляций в холловских плазменных разрядах. Для магнетронной конфигурации и конфигурации типа СПД рассчитаны частоты собственных мод градиентно-дрейфовой неустойчивости и структура собственных функций. Показано, что динамика волновых пакетов, формируемых на линейной стадии развития неустойчивости, объясняет наблюдаемые в существующих

холловских плазменных ускорителях и магнетронных разрядах крупномасштабные вращающиеся структуры.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты выполненных в диссертации исследований имеют важное практическое значение для объяснения фундаментальных физических явлений, характерных для полностью и частично замагниченной движущейся плазмы и наблюдаемых в различных лабораторных плазменных системах, а также для дальнейшей оптимизации таких систем и их рабочих режимов. В частности,

- Полученные аналитические решения в виде глобальных ГАМ объясняют независимость частоты колебаний электрического потенциала плазмы от радиуса плазменного шнура, регистрируемую экспериментально на множестве токамаков – см., например, [73–77]. Найденное интегральное условие позволяет определить возможность существования глобальной ГАМ, область её локализации и частотный интервал для наблюдения в эксперименте. Полученные аналитические решения могут быть использованы для верификации численных кодов расчёта спектра МГД-колебаний. Отдельное методическое и практическое значение имеют разработанные методы численного моделирования глобальных низкочастотных осесимметричных мод колебаний электрического потенциала в токамаках с тороидальным вращением плазмы.
- Обнаруженная неустойчивость глобальных мод 3Т может служить механизмом генерации шировых течений, наблюдаемых на периферии плазмы, в частности, в экспериментах на токамаках DIII-D [78], HT-7 [79], JFT-2M [80], HL-2A [81].
- Полученное выражение для частоты сплошного спектра ГАМ в некруглой плазме следует использовать для расчёта частоты ГАМ в установках диверторного типа и сферических токамаках. Существенное снижение частоты ГАМ с ростом вытянутости плазмы подтверждается результатами наблюдений с токамаков ASDEX Upgrade [82] и DIII-D [83]; зависимость от треугольности согласуется с наблюдениями на токамаке TCV [84,85]. Развита теория ГАМ для токамака с гофрированным магнитным полем обосновывает применимость стандартного выражения для

частоты сплошного спектра ГАМ для описания колебаний в реальных условиях эксперимента, когда тороидальное магнитное поле создаётся дискретным набором магнитных катушек.

- Предложенный механизм нелинейного взаимодействия ГАМ и ЗТ объясняет ряд специфических особенностей спектров колебаний, наблюдаемых в экспериментах с плазмой на токамаках и до сих пор не имевших удовлетворительного объяснения в рамках теории, как-то: модуляция амплитуды ГАМ [80,81], расщепление спектрального пика [82], формирование сателлитов ГАМ [86], перемежаемость и вспыхивающий характер [87–90]. Разработанная теория позволяет установить наличие ЗТ и определить его частоту по наблюдаемому расщеплению спектрального пика ГАМ, тогда как прямая идентификация ЗТ в экспериментах на токамаках является весьма сложной задачей.
- Полученные явные аналитические примеры гладких невырожденных равновесных плазменных конфигураций в отсутствие пространственной симметрии опровергают известную гипотезу Грэда [68] о несуществовании трёхмерного равновесия плазмы и демонстрируют возможность реализации систем со вложенными магнитными поверхностями во всём объёме плазменного шнура. Показана несостоятельность использования простых цилиндрических моделей для предсказательных выводов о равновесии плазмы тороидальной топологии. Полученный класс равновесных магнитных конфигураций с $n = 1$ тороидальной деформацией магнитных поверхностей может быть использован в системах управления разрядами в токамаках, снабжённых катушками для подавления ЭЛМов (ELM – Edge Localized Modes) [91] и тестовыми модулями blankets [92].
- Разработанный аналитический формализм расчёта усреднённых характеристик движения пролётных и запертых частиц в магнитной конфигурации токамака позволяет верифицировать соответствующие кинетические численные коды. Найденное выражение для скорости тороидальной прецессии пролётных частиц необходимо для анализа резонансного взаимодействия быстрых ионов с осенесимметричными возмущениями магнитного поля (error fields) в токамаке [93].

- Анализ бесстолкновительной релаксации максвелловского ансамбля заряженных частиц в радиальном электрическом поле токамака объясняет полоидальную асимметрию тороидального вращения плазмы, наблюдаемую посредством метода рекомбинационной спектроскопии (CXRS – Charge eXchange Recombination Spectroscopy) в токамаках [94], и позволяет предсказать её возникновение.
- Эффекты сильного электрического поля существенны для моделирования начальной стадии пробоя плазменного разряда токамака [95], для корректной интерпретации результатов кинетического моделирования холловских плазменных разрядов [96,97], а также для учёта при проектировании и оптимизации устройств, принцип действия которых основан на дрейфе заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях, таких, например, как плазменный рекуператор [98], осуществляющий преобразование тепловой энергии плазмы в энергию электрического поля.
- Расчёт характеристик неустойчивых мод в различных точках ускоряющего канала двигателя СПД-100, основанный на экспериментальных данных о профилях параметров плазмы, с выявлением источников неустойчивости наиболее опасных возмущений необходим для описания и контроля экспериментально наблюдаемых осцилляций разряда в ускорителях холловского типа с целью возможной оптимизации их рабочих режимов. Обнаруженная эргодизация траекторий электронов в модельной конфигурации СПД может быть источником аномальной подвижности электронов в холловских ускорителях наряду с механизмами турбулентности и пристеночной проводимости.
- Соответствие между рассчитанными характеристиками волновых пакетов, формируемых глобальными градиентно-дрейфовыми модами, и параметрами крупномасштабных азимутальных структур, наблюдаемых в холловских плазменных разрядах [42, 46, 48, 99], позволяет сделать вывод о том, что именно ГДН является вероятным механизмом возникновения макроскопических структур в виде спиц в холловской плазме. Разработанная теория допускает прямую экспериментальную проверку и предлагает способы контроля таких структур.

Публикации, апробация работы

По теме диссертации опубликовано 36 научных работ (не считая аннотаций докладов) [35, 100–134], 21 из которых – статьи в рецензируемых журналах [35, 100, 101, 104–106, 108, 111, 115–119, 122, 123, 125, 127–131], 6 программ для ЭВМ [102, 107, 112, 113, 120, 132] и 9 трудов ведущих тематических международных конференций [103, 109, 110, 114, 121, 124, 126, 133, 134]. Результаты работ обсуждались на семинарах в НИЦ “Курчатовский институт”, в Национальном исследовательском ядерном университете "МИФИ" и в Физическом институте имени П. Н. Лебедева РАН, а также на тематических российских и международных конференциях, таких как:

- XXXVI, XL, XLIII, XLIV, XLV, XLVI, XLVII, XLVIII Международные Звенигородские конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу: Звенигород, 2009, 2013, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2024 (пленарный доклад);
- 40-я, 44-я, 45-я, 46-я Конференции Европейского физического общества по физике плазмы (EPS Conference on Plasma Physics): Эспу, Финляндия, 2013; Белфаст, Северная Ирландия, 2017; Прага, Чехия, 2018; Милан, Италия, 2019;
- 6-ое Техническое совещание МАГАТЭ по “Теории плазменных неустойчивостей” (6th IAEA Technical Meeting on “Theory of Plasma Instabilities”): Вена, Австрия, 2013;
- 17-й и 18-й Международные конгрессы по физике плазмы (International Congress on Plasma Physics): Лиссабон, Португалия, 2014; Гаосюн, Тайвань, 2016;
- 59-е Ежегодное собрание Отделения физики плазмы Американского физического общества (59th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics): Висконсин, США, 2017;
- 25-я, 28-я, 29-я, 30-я Конференции МАГАТЭ по энергии термоядерного синтеза (IAEA Fusion Energy Conference): Санкт-Петербург, 2014; онлайн, 2021; Лондон, Великобритания, 2023; Чэнду, Китай, 2025.

Методы исследования

При выполнении диссертационной работы использовались аналитические методы математической физики, физики плазмы и теории устойчивости, а также численные расчёты, реализованные с помощью авторских компьютерных кодов. Анализ волн в плазме токамака базировался на идеальной (бездиссипативной) МГД-теории. Для исследования волн в частично замагниченной плазме использовались двухжидкостные моментные уравнения, явно учитывающие холловские эффекты.

При анализе движения отдельных частиц использовалась как стандартная дрейфовая теория, так и её обобщение на случай сильного электрического поля с соответствующими численными реализациями, а также коды, основанные на точных (без усреднения по ларморовским орбитам) уравнениях движения, что необходимо при слабой замагниченности компонент плазмы. Кинетические расчёты проведены с использованием авторского метода решения кинетического уравнения с источником, основанного на процедуре обратного интегрирования вдоль траекторий движения заряженных частиц и последующего усреднения функции распределения по времени.

Личный вклад автора

В диссертации представлены теоретические результаты, полученные лично соискателем или в соавторстве при его непосредственном активном участии. В работах по исследованию низкочастотных зональных течений в плазме токамака автором найдены аналитические решения, описывающие глобальные моды ГАМ и ЗТ, получено и проанализировано условие их существования, разработан численный код решения задачи на собственные значения, разработана нелинейная модель взаимодействия ГАМ-ЗТ, проведены соответствующие численные расчёты. Применительно к проблеме трёхмерного равновесия плазмы в магнитном поле автором получена система уравнений, обобщающая уравнение Грэда-Шафранова на случай тороидально асимметричных равновесий, получены её решения. Автором разработан новый подход для анализа траекторий и расчёта бесстолкновительной функции распределения в токамаке с радиальным электрическим полем, аналитически рассчитаны усреднённые характеристики движения пролётных и запертых частиц, численно

проведены расчёты функции распределения. Анализ характеристик нижнегибридных волн и условий формирования крупномасштабных структур в холловской плазме проводился при непосредственном руководстве автора.

Структура и содержание диссертации

Диссертация состоит из 4 глав, 17 разделов и 39 подразделов.

Первая глава содержит подробное описание используемых моделей и рассчитанных с их помощью типовых равновесий плазмы, допускающих наличие поперечного электрического поля и являющихся базисом последующего анализа в диссертационной работе. В разделе 1.1 представлено обоснование использования гидродинамической модели изотропного равновесия плазмы в системе тороидально вложенных магнитных поверхностей в качестве исходного состояния при анализе динамики флуктуаций в токамаке. Отсутствие примеров гладких решений уравнений равновесия, не обладающих пространственной симметрией, в течение многих лет служило аргументом в поддержку гипотезы Гарольда Грэда [68] о несуществовании невырожденного трёхмерного равновесия плазмы. В основу подхода для построения явных аналитических контрпримеров к гипотезе Грэда положено смешанное представление для магнитного поля, аналогичное используемому при выводе классического УГШ, но модифицированное на общий случай осевой асимметрии магнитных поверхностей. Получена система уравнений, описывающая статическое 3D равновесие плазмы в магнитном поле с магнитными поверхностями и представлены примеры её решений, характеризуемые цилиндрической и тороидальной топологией магнитных силовых линий. Предложен общий подход к построению равновесия плазмы в токамаке с $n = 1$ нарушением тороидальной симметрии. В разделе 1.2 рассматривается одножидкостная МГД-модель сильностолкновительной плазмы, допускающая наличие стационарного тороидального течения. Равновесное состояние такой плазмы описывается уравнением типа УГШ при четырёх заданных поверхностных функциях, характеризующих полоидальный ток, поле стационарных скоростей и термодинамическое состояние плазмы. Представлена система редуцированных уравнений, используемая для описания крупномасштабных низкочастотных мод в токамаке при наличии стационарного тороидального вращения плазмы. В разделе 1.3 представлены двухжидкостные моментные урав-

нения для описания частично замагниченной плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях, учитывающие тепловые эффекты в движении электронов. Эффекты конечного ларморовского радиуса электронов включены в модель посредством тензора бесстолкновительной вязкости в неоднородном магнитном поле. Представлены типичные профили параметров плазмы и конфигурация электромагнитного поля в канале холловского двигателя семейства СПД. В разделе 1.4 дано краткое резюме главы 1.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию динамики крупномасштабных колебаний и течений в тороидальной плазме токамака. Проведён анализ влияния формы магнитных поверхностей плазмы, в том числе их тороидальной асимметрии, а также эффектов вращения, нелинейности и глобальной структуры мод на характеристики ГАМ и ЗТ. В разделе 2.1 представлены результаты исследования влияния специфики магнитной конфигурации токамака на ГАМ непрерывного спектра в статической плазме. Рассчитаны частота и полоидальная структура ГАМ с учётом эффектов некруглости (вытянутости, треугольности) магнитной поверхности, тороидальной гофрировки магнитного поля и конечного обратного аспектного отношения установки. В разделе 2.2 МГД-модель крупномасштабных низкочастотных мод в токамаке адаптирована для исследования осесимметричных флуктуаций электрического потенциала плазмы низкого давления. В разделе 2.3 исследован вопрос формирования глобальных ГАМ. Задача на собственные значения для возмущений электрического потенциала и продольного смещения плазмы сформулирована в виде рекуррентного ряда уравнений для полоидальных Фурье-гармоник. Получено интегральное условие существования глобальных ГАМ и показано, что тип глобального решения зависит от радиального профиля частоты сплошного спектра ГАМ. В случае, если частота сплошного спектра ГАМ имеет максимум на радиусе плазменного шнура, электрическое поле собственной моды строго локализовано вблизи этого радиуса. При монотонной зависимости локальной частоты ГАМ от радиуса глобальная мода не локализована вблизи выделенной магнитной поверхности и обладает заметной амплитудой в центре плазмы. Таким образом показано, что требование о наличии внеосевого максимума у частоты сплошного спектра ГАМ не является необходимым для формирования глобальной моды; представлен показательный пример такого решения. В раз-

деле 2.4 исследовано влияние вращения на спектр собственных мод ГАМ и ЗТ в плазме токамака. Показано, что вращение плазмы приводит к существованию низкочастотной ветви зональных течений, в спектре которых реализуются глобальные решения, локализованные преимущественно на периферии плазменного шнура. Раздел 2.5 посвящён исследованию нелинейного взаимодействия ГАМ и ЗТ в тороидально вращающейся плазме токамака. Показано, что в режиме слабой нелинейности взаимодействие ГАМ с ЗТ приводит к появлению в спектре колебаний гармоник на сумме и разности частот ГАМ и ЗТ. В режиме сильной нелинейности происходит генерация высших гармоник ЗТ, а взаимодействие ГАМ с низкочастотной активностью, в свою очередь, формируют комплексную структуру спектра ГАМ. Демонстрируются эффекты модуляции амплитуды, расщепления спектрального пика, перемежаемости и всплеск ГАМ. В разделе 2.6 дано резюме главы 2.

Третья глава диссертации посвящена вопросу генерации волн в частично замагниченной плазме в скрещенных электрическом и магнитном полях, характерной для установок холловского типа, с акцентом на выявление причин реализации в холловских разрядах крупномасштабных волн и структурных образований. В разделе 3.1 в рамках двухжидкостной МГД-модели, учитывающей конечную температуру электронов, эффекты равновесного $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -тока электронов, конечную скорость ионного потока, инерцию и конечный ларморовский радиус электронов, градиенты магнитного поля и плотности плазмы, а также дебаевские эффекты, представлен общий анализ устойчивости градиентно-дрейфовых волн. Для “магнетронной” конфигурации полей аналитически рассчитаны структура и собственные частоты глобальных мод ГДН. Показано, что спектр собственных мод имеет характерную параболическую форму, что приводит к формированию биений между наиболее неустойчивыми модами на линейной стадии развития колебаний. В разделе 3.2 разработанная теория применена к типичным параметрам плазмы в разряде стационарного плазменного двигателя модели СПД-100. На основе локального закона дисперсии рассчитаны характеристики наиболее неустойчивых возмущений вдоль длины ускоряющего канала. Обнаружены три пространственно разделённые области неустойчивости: i) прианодная область, характеризующаяся развитием длинноволновых азимутальных колебаний, ii) основная часть ускоряющего канала с коротковолновыми аксиаль-

ными модами, дестабилизированными потоком ускоренных ионов, и iii) область за выходом из ускоряющего канала с доминирующими косыми коротковолновыми волнами. В разделе 3.2 рассчитаны частоты собственных (глобальных) неустойчивых колебаний и аксиальная структура собственных функций ГДН в канале СПД. Полученный спектр характеризуется конечным набором длинноволновых азимутальных мод в нижнегибридном диапазоне частот, локализованных преимущественно в прианодной части двигателя. Показано, что собственные моды могут образовывать волновые пакеты, основные характеристики которых на линейной стадии развития неустойчивости совпадают с параметрами крупномасштабных азимутальных структур типа спиц, наблюдаемых в экспериментах. Исследовано влияние изменения геометрических размеров ускоряющего канала на частотные характеристики колебаний и формирование биений. Краткое резюме главы 3 дано в разделе 3.3.

В четвёртой главе исследуется влияние электрического поля на перенос частиц плазмы в токамаках и в плазменных разрядах в скрещенных полях. В разделе 4.1 исследованы особенности дрейфового движения нерелятивистской заряженной частицы в медленно меняющихся магнитном и сильном электрическом полях, для которых неприменимо предположение о малости скорости электрического дрейфа по отношению к полной скорости частицы. Получен обобщённый лагранжиан Литтлджона и с его помощью продемонстрирован переход к расширенной системе дрейфовых уравнений, содержащей дополнительные скорости дрейфов. Показана возможность ускорения частицы за счёт дрейфового движения вдоль сильного электрического поля. Раздел 4.2 посвящён исследованию движения электронов в конфигурации стационарного плазменного двигателя. Показано, что характер движения электронов, рождающихся с нулевой начальной скоростью при ионизации рабочего газа, критически зависит от положения точки старта вдоль оси ускоряющего канала. Если в прикатодной области движение электронов является регулярным, то при приближении к аноду наблюдается выраженная эргодизация их траекторий, сопровождающаяся значительным увеличением переноса частиц вдоль оси ускорителя. В разделе 4.3 исследованы траектории пролётных и запертых частиц в токамаке с радиальным электрическим полем. Представлен универсальный метод расчёта баунс-периода и средней тороидальной скорости движения

заряженных частиц во всём объёме плазмы токамака, включая магнитную ось. Получено выражение для скорости тороидальной прецессии пролётной частицей в электрическом поле. Показано, что её величина значительно ниже скорости электрического дрейфа в полоидальном магнитном поле, характерной для запертых частиц. При этом направление прецессии пролётных частиц меняет знак в зависимости от стартового азимутального положения частицы на магнитной поверхности. Результаты получены аналитически и подтверждены трёхмерными численными расчётами траекторий движения заряженных частиц, в том числе с использованием симплектических интеграторов. Показано, что наличие поперечного электрического поля в токамаке может сопровождаться формированием макроскопических течений, направленных в разные стороны на внутреннем и внешнем обводах тора. В разделе 4.4 представлено резюме главы 4.

Основные выводы диссертации суммируются в заключении.

На защиту выносятся:

1. МГД-теория, объясняющая глобальный характер наблюдаемых в токамаках геодезических акустических мод (ГАМ) с частотой, постоянной на радиусе плазменного шнура.
2. Теоретическое обоснование вывода о существовании равновесий плазмы со вложенными во всём объёме плазмы магнитными поверхностями в отсутствие пространственной симметрии.
3. Результаты расчётов частоты и пространственной структуры ГАМ с учётом возмущения магнитного поля и формы равновесных магнитных поверхностей плазмы в токамаке.
4. Теория, объясняющая экспериментально наблюдаемый эффект расщепления спектрального пика ГАМ нелинейным взаимодействием ГАМ и низкочастотного зонального течения в токамаке с тороидальным вращением плазмы.
5. Результаты кинетического анализа бесстолкновительной динамики заряженных частиц в токамаке с радиальным электрическим полем, объясняющие особенности макроскопического движения

ансамблей пролётных и запертых частиц, включая наблюдаемую полоидальную асимметрию скорости тороидального вращения на внешней и внутренней сторонах тора.

6. Теоретическое объяснение наблюдаемых крупномасштабных структур в плазме разрядов в скрещенных полях суперпозицией глобальных мод градиентно-дрейфовой неустойчивости.

Глава 1

Магнитогидродинамические модели и равновесие плазмы

В главе описываются модели равновесия плазмы в магнитном поле, предполагающие наличие электрического поля и стационарных плазменных течений. Представлены уравнения, обобщающие уравнение равновесия тороидальной плазмы Грэда-Шафранова на случай плазменных конфигураций с осесимметричными магнитными поверхностями, и примеры их решений, обосновывающие правомерность рассмотрения таких конфигураций в качестве исходных состояний при анализе динамики флуктуаций. Рассматриваются одножидкостная МГД-модель равновесия плазмы с вращением и двухжидкостная МГД-модель частично замагниченной плазмы, учитывающая эффекты конечного ларморовского радиуса электронов посредством тензора бесстолкновительной вязкости.

Задача нахождения равновесных конфигураций плазмы в магнитном поле относится к числу первоочередных в иерархии проблем физики плазмы и её приложений. Статическое равновесие плазмы в магнитном поле описывается уравнениями:

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}], \quad (1.1)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

первое из которых характеризует баланс сил давления p и силы Ампера, а второе – соленоидальность магнитного поля $\mathbf{B}$. Всюду в диссертации, где это не оговорено отдельно, используется система единиц СГС.

Область применимости уравнений (1.1)–(1.2), имеющих характерный “магнитогидродинамический” вид, как известно, значительно шире рамок идеальной магнитной гидродинамики; подробную аргументацию этого см. в [135].

Векторное уравнение (1.1) эквивалентно трём скалярным, два из которых сводятся к условиям постоянства давления вдоль линий тока

и магнитных силовых линий $(\text{rot } \mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0$, $(\mathbf{B} \cdot \nabla p) = 0$. Применительно к задаче лабораторного удержания высокотемпературной плазмы особое значение имеют конфигурации со вложенными магнитными поверхностями $\Psi(\mathbf{r}) = \text{const}$: $(\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi) = 0$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, позволяющие (до какой-то степени) реализовать исходную идею Тамма и Сахарова о магнитной термоизоляции. В таких конфигурациях, совместив граничную магнитную поверхность со стенкой камеры, можно избежать баллистического выноса энергии частицами плазмы, свободно движущимися *вдоль* силовых линий магнитного поля, из основного объёма плазмы на эту стенку, тогда как процессы тепло- и массопереноса *поперёк* силовых линий магнитного поля значительно более медленные. И хотя характер этих процессов может отличаться от классических теплопроводности и диффузии, т. е. быть связанным с уровнем турбулентности плазмы в большей степени, чем со столкновениями частиц, всё равно рассматривать эти различия имеет смысл, лишь обеспечив глобальный баланс сил, то есть равновесие плазмы. Другими словами, иерархия процессов, определяющих в итоге характерное время удержания плазмы, такова: равновесие – устойчивость – процессы переноса.

Наиболее известными примерами систем, магнитные конфигурации которых составлены из набора вложенных поверхностей, являются установки типа “токамак” и “стелларатор”. Топологически магнитные поверхности в таких системах представляют собой замкнутые торы, хотя непосредственно (осесимметричными) торами можно назвать лишь поверхности токамака и то приближённо – из-за дискретности магнитных катушек тороидального поля, искажений магнитного поля, неравномерности нагрева, дефектов сборки и т. д.

Основным инструментом расчёта осесимметричных равновесных магнитных конфигураций служит уравнение Грэда-Шафранова, полученное В. Д. Шафрановым в 1957 году [136] и почти на год позже Г. Грэдом [137]. Находка В. Д. Шафранова, позволившая получить УГШ, состояла в использовании смешанного представления для магнитного поля:

$$\mathbf{B} = [\nabla \Psi \times \nabla \varphi] + F \nabla \varphi, \quad (1.3)$$

где функция $F = F(R, z)$ характеризует полоидальный ток, $\Psi = \Psi(R, z)$ – полоидальный поток магнитного поля. Здесь и далее используется цилиндрическая система координат $\mathbf{r} = \{R, \varphi, z\}$, связанная с геометрическим центром тора.

В случае осевой симметрии преимущества задания магнитного поля в форме (1.3) очевидны, поскольку она позволяет удовлетворить двум налагаемым на магнитное поле условиям автоматически: $\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0$ и $(\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi) \equiv 0$. При этом три компоненты магнитного поля определяются двумя скалярными функциями $\Psi = \Psi(R, z)$ и $F = F(R, z)$. Искомые магнитные поверхности – это поверхности уровня функции Ψ : $\Psi(R, z) = \text{const}$. Последующая подстановка (1.3) в уравнение баланса сил (1.1) и его проецирование на тройку некопланарных векторов $[\nabla \Psi \times \nabla \varphi]$, $\nabla \varphi$, $\nabla \Psi$ приводят к заключению о том, что F и p – “поверхностные” функции, $p(R, z) = p(\Psi)$, $F(R, z) = F(\Psi)$, и к собственно УГШ как уравнению на Ψ :

$$\Delta^* \Psi + 4\pi R^2 \frac{dp(\Psi)}{d\Psi} + F(\Psi) \frac{dF(\Psi)}{d\Psi} = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

– оператор Грэда-Шафранова.

Уравнение второго порядка в частных производных эллиптического типа (1.4) на функцию Ψ определяет магнитные поверхности в произвольной осесимметричной плазменной системе, находящейся в статическом равновесии в магнитном поле, формируемом как внешними токами, так и токами, текущими по самой плазме.

Подход, придуманный В. Д. Шафрановым, с представлением магнитного поля в виде (1.3) оказался весьма и весьма плодотворным. Его можно использовать и для более сложных уравнений, включающих динамические величины, фактически, сводя сложные трёхмерные векторные уравнения равновесия к единственному двумерному дифференциальному уравнению на скалярную функцию Ψ . Известны аналоги УГШ для описания динамического равновесия [138–142], анизотропного равновесия [135, 143, 144], в том числе с течениями [145–147], релятивистские УГШ [148, 149], УГШ для холловской и многокомпонентной МГД [150–152] и др. Широкий спектр различных астрофизических обобщений уравнения Грэда-Шафранова можно найти в обзоре [153].

Ключевым предположением описанных выше моделей равновесия является условие осевой симметрии, которое существенно ограничивает класс рассматриваемых задач. Попытки формулировки трёхмерных уравнений равновесия предпринимались неоднократно,

однако простой аналог классического осесимметричного УГШ, сохраняющий логику построения решений и допускающий прямой предельный переход к (1.4) при осевой симметрии, получен только для случая винтовой симметрии системы, фактически эквивалентного осесимметричному случаю при переобозначении угловых координат. В [154, 155] предложен вариант обобщения УГШ для описания несимметричных МГД конфигураций, основанный на смешанном представлении для магнитного поля с использованием так называемых “опорных” векторов вместо $\nabla\varphi$ в (1.3). Этот подход позволяет в рамках дополнительных предположений записать уравнение равновесия в относительно простой форме, перенося всю трудность дальнейшего анализа на нахождение самих опорных векторов, не заданных заранее и в свою очередь зависящих от $\Psi(\mathbf{r})$. При этом полученные уравнения не являются необходимым условием равновесия.

Более того, сам вопрос о возможности существования трёхмерного равновесия плазмы в асимметричной магнитной конфигурации со вложенными магнитными поверхностями является далеко не тривиальным. Теоретическое описание такого равновесия вызывает определенные трудности, связанные с наличием рациональных магнитных поверхностей, которые могут быть легко разрушены – см. подробнее в преамбуле к подразделу 1.1. Основываясь на некоторых результатах численного моделирования, а также на факте отсутствия аналитических решений, описывающих невырожденные асимметричные тороидальные равновесия, Г. Грэд в 1985 году сформулировал гипотезу о несуществовании трёхмерных статических изотропных плазменных равновесий в отсутствие геометрических симметрий [68]. Этот вывод, если бы он оказался верен, критически повлиял бы на всю концепцию реализации УТС в системах магнитного удержания плазмы в силу невозможности практической реализации идеально симметричной системы. С теоретической точки зрения, неадекватными оказались бы не только теория равновесия плазмы, но и теории устойчивости и турбулентности, поскольку если не существует исходного состояния равновесия со вложенными магнитными поверхностями, то нет и отправной точки для исследования эффектов его возмущения. Поэтому данная глава диссертации, предвосхищая обсуждение более сложных моделей динамического равновесия плазмы со стационарными течениями и анализ динамики флуктуаций, посвящена решению указанной фундаментальной теоретической проблемы существования глад-

ких решений уравнений равновесия в системе тороидально вложенных магнитных поверхностей в отсутствие точной пространственной симметрии.

В подразделе 1.1 предложен новый подход к задаче описания трёхмерного равновесия плазмы с магнитными поверхностями и представлены явные аналитические контр-примеры к гипотезе Грэда. Подразделы 1.2 и 1.3 посвящены описанию равновесных состояний движущейся плазмы в рамках двух плазменных моделей, существенных для дальнейшего рассмотрения крупномасштабных волн: идеальной одножидкостной МГД-модели со стационарными течениями, используемой для исследования динамики флуктуаций в плазме токамака, и двухжидкостных моментных уравнений для описания динамики двухкомпонентной частично замагниченной плазмы в скрещенных полях. В подразделе 1.3 также приведены типичные профили равновесных параметров плазмы и конфигурация электромагнитного поля в холловском двигателе семейства СПД, используемые в расчётах.

1.1 Проблема существования трёхмерного равновесия плазмы

Утверждение о несуществовании асимметричных трёхмерных равновесных конфигураций плазмы со вложенными магнитными поверхностями порождено необходимостью выполнения условия замыкания тока на рациональных магнитных поверхностях. Это условие вытекает из стационарного уравнения Максвелла и требует равенства (т.е. независимости от стартового полоидального угла на магнитной поверхности) приведённых длин силовых линий магнитного поля $\sim \oint dl/B$ [156–158]. В координатах с выпрямленными силовыми линиями это требование выполняется только в том случае, если якобиан перехода к этим координатам не содержит резонансных гармоник на рациональных магнитных поверхностях. Наличие таких гармоник проявляется в возникновении резонансных знаменателей в магнитном дифференциальном уравнении (МДУ) [159, 160], описывающем соленоидальность плотности тока. Его формальное решение при конечном градиенте давления плазмы соответствует сингулярным токам на соответствующих рациональных магнитных поверхностях. Появление таких нефизичных сингулярностей свидетельствует о несправедливости исходного предположения о вложенности

магнитных поверхностей [158, 161]. При наличии симметрии таких сложностей не возникает, отсюда и получило широкое распространение утверждение о несуществовании “простых” равновесий плазмы в трёхмерном случае. Отметим, что аналогичные аргументы могут быть применены не только к системам тороидальной топологии, но и к любым периодическим в пространстве системам, в частности, к цилиндру с отождествлёнными концами, который часто используется в качестве упрощённой модели тороидальных систем.

Современные численные коды фактически принимают гипотезу Грэда о несуществовании невырожденного трёхмерного равновесия плазмы, заменяя поиск “истинных”⁶ равновесий попытками искусственно избежать проблем с резонансами, возникающими на неравновесных (с непостоянным $\oint dl/B$) магнитных поверхностях. Некоторые коды, например, широко используемый стеллараторный равновесный код NSTAB [162] или коды возмущённого равновесия в токамаке IPEC [163], MARS-F [164] и M3D-C¹ [165] допускают наличие сингулярной плотности тока на рациональных магнитных поверхностях. Альтернативный подход заключается в том, чтобы избежать проявления резонансов путём искусственного введения “полок” на профилях давления плазмы [166] и/или вращательного преобразования [167]. Так, вычислительный домен в коде SPEC [168] состоит из областей постоянного давления, разделённых дискретным набором иррациональных поверхностей; в каждой области строятся поля Бельтрами. В коде VMEC [169], также основанном на предположении о наличии системы вложенных магнитных поверхностей, трудности с численным разрешением сингулярностей, обусловленных градиентом давления плазмы, преодолеваются путём искусственного выравнивания профиля давления в окрестностях наиболее крупномасштабных резонансных рациональных поверхностей [170]. Хотя этот подход существенно улучшает сходимость численной схемы, используемый профиль давления трудно назвать физически обоснованным. В более новом коде DESC [171] проблема резонансов устраняется за счёт специального выбора расчётных точек, позволяющего исключить из рассмотрения рациональные магнитные поверхности.

Как отмечалось, наличие сингулярностей может указывать на неправомомерность первоначального предположения о вложенности

⁶Л. С. Соловьёв и В. Д. Шафранов называют магнитные поверхности, на которых выполняется условие замыкания тока, “истинными” магнитными поверхностями [158]; будем следовать этой терминологии далее

магнитных поверхностей, связанную с наличием магнитных островов и эргодических магнитных полей [172]. Такие конфигурации могут быть рассчитаны с использованием трёхмерных МГД-кодов PIES [173], HINT [174] и SIESTA [175]. В конечном итоге, результаты численных расчётов в значительной степени определяются моделью равновесия, заложенной в код, [176], что было наглядно продемонстрировано при сравнительном анализе [177].

Растущий в последнее время интерес к слабым (негладким) решениям уравнений равновесия, по-видимому, обусловлен отсутствием на сегодняшний день явных аналитических примеров равновесий с истинными магнитными поверхностями. Теоретический анализ проблемы трёхмерного равновесия плазмы традиционно проводится в рамках упрощённых геометрических моделей плоского слоя, как задача Хама-Кулсруда-Тейлора [178], или винтового пинча, используемого в качестве цилиндрического приближения конфигурации токамака [179]. В таких упрощённых формулировках гладкие равновесия плазмы действительно не удаётся построить. На отсутствие физически приемлемого равновесия (без особых точек при конечном градиенте давления плазмы на резонансных магнитных поверхностях) в цилиндрическом плазменном шнуре с винтовыми возмущениями было указано Морозовым и Соловьёвым в [180]. Этот вывод был позже использован Грэдом [68] в качестве явного примера несуществования гладких 3D равновесий с оговоркой о том, что проблема сингулярности решения может быть связана с использованием процедуры линеаризации. В недавних работах было показано, что в геометрии плоского слоя [181–184] и в винтовом пинче [167, 185] трёхмерные равновесия реализуются исключительно при наличии магнитных островов и/или токовых слоёв. Полученные результаты были спекулятивно распространены авторами [185] на общую тороидальную топологию, с выводом о том, что *конфигурации с токовыми слоями на резонансных поверхностях, вызывающими скачки во вращательном преобразовании, могут представлять собой единственно возможные равновесные состояния плазмы с магнитными поверхностями, которые являются одновременно вложенными и резонансными*. В этой связи существует даже мнение, по крайней мере среди части плазменного сообщества, о том, что отсутствие особенностей на плотности тока в трёхмерном расчёте свидетельствует о его ошибочности – см., например, [177, 186].

Далее, в качестве одного из основных результатов диссертационной работы, впервые получены аналитические примеры равновесных конфигураций плазмы с континуумом тороидально вложенных магнитных поверхностей и гладким распределением давления, что доказывает существование 3D равновесий с истинными магнитными поверхностями [129]. Расчёт основан на решении полученной в работах автора системы уравнений равновесия, позволяющей рассматривать трёхмерную задачу в форме, близкой к исходной формулировке осесимметричного УГШ. Анализ цилиндрической модели плазмы в рамках того же подхода воспроизводит ранние результаты о неизбежном возникновении особенностей на рациональных магнитных поверхностях. Таким образом, показано, что корень проблемы “несуществования” кроется не в отсутствие истинного 3D равновесия плазмы, а в использовании неадекватных моделей при попытках его описания.

1.1.1 Модель 3D равновесия с осенесимметричными магнитными поверхностями

Будем полагать, что силовые линии магнитного поля лежат на трёхмерных магнитных поверхностях: $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi(R, \varphi, z) = 0$. При этом проекция уравнения баланса сил (1.1) на направление магнитного поля даёт постоянство давления p на магнитной поверхности: $p = p(\Psi)$.

Очевидно, что смешанное представление (1.3) не годится для описания трёхмерной магнитной поверхности с $\partial \Psi / \partial \varphi \neq 0$. Модифицируем (1.3), добавляя слагаемое с произвольным множителем ς вдоль градиента Ψ :

$$\mathbf{B} = G[\nabla \Psi \times \nabla \varphi] + F \nabla \varphi + \varsigma \nabla \Psi. \quad (1.6)$$

Здесь также введён свободный функциональный коэффициент G перед векторным произведением $[\nabla \Psi \times \nabla \varphi]$. Записанное таким образом представление (1.6) даёт разложение вектора $\mathbf{B}$ по трём различным направлениям: $[\nabla \Psi \times \nabla \varphi]$, $\nabla \varphi$, $\nabla \Psi$ – и, значит, выбранная запись описывает поле произвольной топологии и не ограничивает общности рассмотрения.

Далее используем условие существования магнитной поверхности Ψ . Из $(\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi) = 0$ следует выражение для функции ς :

$$\varsigma = -vF, \quad \text{где } v = \frac{1}{|\nabla \Psi|^2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi},$$

$$|\nabla\Psi|^2 = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)^2.$$

Таким образом, коэффициент при $\nabla\Psi$ в (1.6) пропорционален $\partial\Psi/\partial\varphi$ и в осесимметричном случае это слагаемое пропадает.

Итоговое выражение для магнитного поля

$$\mathbf{B} = G[\nabla\Psi \times \nabla\varphi] + F\nabla\varphi - \frac{F}{|\nabla\Psi|^2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \nabla\Psi \quad (1.7)$$

содержит три свободные функции G , F , Ψ , что на одну больше, чем в осесимметричном случае, при этом условие $(\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi) = 0$ выполняется тождественно. Ротор поля (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} = & - \left(G\Delta_{3D}^* \Psi + (\nabla G \cdot \nabla\Psi) \right) \nabla\varphi + [\nabla F \times \nabla\varphi] + \\ & + \frac{G}{R^2} \nabla \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + (\nabla G \cdot \nabla\varphi) \nabla\Psi - [\nabla(vF) \times \nabla\Psi]. \end{aligned}$$

Здесь Δ_{3D}^* обозначает трёхмерный оператор Грэда-Шафранова:

$$\Delta_{3D}^* = R^2 \text{div} \left(\frac{\nabla}{R^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

связанный с “осесимметричным” оператором Δ^* (1.5) соотношением $\Delta_{3D}^* = \Delta^* + (\partial^2/\partial\varphi^2)/R^2$.

Функции G , F , Ψ определяются тремя уравнениями: условием соленидальности $\text{div } \mathbf{B} = 0$,

$$\begin{aligned} \nabla G \cdot [\nabla\Psi \times \nabla\varphi] + \frac{|\nabla\Psi|^2}{2F} \nabla\varphi \cdot \nabla \frac{F^2}{|\nabla\Psi|^2} - \\ - \frac{1}{R^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \left(\nabla\Psi \cdot \nabla \frac{F}{|\nabla\Psi|^2} + \frac{F}{|\nabla\Psi|^2} \Delta_{3D}^* \Psi \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

условием того, что линии тока лежат на магнитных поверхностях, $(\text{rot } \mathbf{B} \cdot \nabla\Psi) = 0$,

$$\begin{aligned} \nabla F \cdot [\nabla\Psi \times \nabla\varphi] - \frac{1}{2G} \nabla\varphi \cdot \nabla G^2 |\nabla\Psi|^2 + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \left(\nabla\Psi \cdot \nabla G + G\Delta_{3D}^* \Psi \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

и проекцией уравнения баланса сил (1.1) на $\nabla\Psi$,

$$\begin{aligned}
& 4\pi R^2 \frac{dp}{d\Psi} + G^2 \left(\Delta_{3D}^* \Psi - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right) + \\
& + \frac{F}{|\nabla\Psi|^2} \left(\nabla \left(F \left(1 - v \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \right) \cdot \nabla \Psi \right) + \\
& + G \left((\nabla G \cdot \nabla \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} (\nabla G \cdot \nabla \varphi) \right) + \\
& + \frac{F^2}{|\nabla\Psi|^2} \nabla \varphi \cdot \left(\nabla \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{1}{|\nabla\Psi|^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \nabla |\nabla\Psi|^2 \right) + \\
& + GR^2 [\nabla \Psi \times \nabla \varphi] \cdot \left(\nabla(vF) + \frac{F}{R^2 |\nabla\Psi|^2} \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Все три уравнения получившейся системы содержат $\Delta_{3D}^* \Psi$, причём в (1.8) и (1.9) оператор Грэда-Шафранова входит со множителем $\sim \partial \Psi / \partial \varphi$. Исключим $\Delta_{3D}^* \Psi$ из (1.8), (1.9) с использованием (1.10). Итоговую систему уравнений удобно переписать, используя функцию $F^* = F(1 - v \partial \Psi / \partial \varphi)$, характеризующую тороидальную компоненту магнитного поля $B_\varphi = F^*/R$ и совпадающую с функцией полоидального тока в осесимметричном случае, а также вводя “осесимметричный” оператор $\nabla_0 = \nabla - \nabla \varphi (\partial / \partial \varphi)$ и квадрат напряжённости магнитного поля $B^2 = (G^2 |\nabla_0 \Psi|^2 + FF^*)/R^2$. Окончательно имеем [117, 124]:

$$\begin{aligned}
& G^2 \Delta^* \Psi + G(\nabla_0 \Psi \cdot \nabla G) + 4\pi R^2 \frac{dp}{d\Psi} + \frac{F}{|\nabla\Psi|^2} (\nabla_0 \Psi \cdot \nabla F) + \\
& + \frac{1}{v |\nabla\Psi|^2} \left(\mathbf{B} \cdot \nabla F v \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{F^2}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla v \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (1.11)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{G |\nabla\Psi|^2}{F} = [\nabla \Psi \times \nabla \varphi] \cdot \nabla \left(F + \frac{G^2 |\nabla\Psi|^2}{F} \right), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla F^* = 4\pi R^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right). \quad (1.13)$$

Итоговая система состоит из трёх дифференциальных уравнений на три свободные функции Ψ , G и F . Уравнение (1.11) служит аналогом УГШ в осесимметричном случае. Уравнения (1.12), (1.13) имеют вид МДУ [159, 160].

Из уравнения (1.13) в отсутствие осевой симметрии полного давления плазмы немедленно следует неоднородность функции $F^* = RB_\varphi$ на трёхмерной магнитной поверхности: $F^* \neq F^*(\Psi)$. В вырожденном случае $F = 0$ (чисто полоидальное магнитное поле) вместо уравнения (1.12) из условия $\text{div } \mathbf{B} = 0$ имеем $G = G(\Psi, \varphi)$, а из уравнения (1.13) следует осевая симметрия полного давления плазмы $\partial(p + B^2/8\pi)/\partial\varphi = 0$.

Для осесимметричной магнитной поверхности $\partial\Psi/\partial\varphi = 0$ уравнения (1.11)–(1.13) переходят в систему:

$$\begin{aligned} G^2 \Delta^* \Psi + G(\nabla G \cdot \nabla \Psi) + 4\pi R^2 \frac{dp}{d\Psi} + \frac{F}{|\nabla \Psi|^2} (\nabla F \cdot \nabla \Psi) &= 0, \\ \nabla G \cdot [\nabla \Psi \times \nabla \varphi] + (\nabla F \cdot \nabla \varphi) &= 0, \\ \nabla F \cdot [\nabla \Psi \times \nabla \varphi] - |\nabla \Psi|^2 (\nabla G \cdot \nabla \varphi) &= 0, \end{aligned}$$

которая сводится к УГШ при $F = F(\Psi)$, $G = G(\Psi) = 1$.

Используем уравнения (1.11)–(1.13) для описания трёхмерных конфигураций плазмы, которые лишь незначительно отклоняются от осесимметричных состояний. Приближение “слабой асимметрии” означает, что 3D поправки к осесимметричной конфигурации могут быть рассмотрены в линейном приближении, как возмущения. Такой подход применим для конфигураций типа токамак.

Далее профиль давления плазмы как функции магнитной поверхности, $p = p(\Psi)$, считается заданным. Рассмотрим искомые функции $f = \{\Psi, F, G\}$ в виде комбинаций “базовых” (осесимметричных) частей (отмечены нижним индексом “0”), удовлетворяющих УГШ (1.4), и малых добавок в виде $\sin$ -, f_s , и $\cos$ -, f_c , гармоник с тороидальным числом n :

$$\begin{aligned} f(R, \varphi, z) &= f_0(R, z) + \\ &+ \varepsilon \{f_c(R, z) \cos n\varphi + f_s(R, z) \sin n\varphi\}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon < 1$ – параметр асимметрии.

В первом порядке по ε уравнения (1.11)–(1.13) сводятся к 3 парам уравнений с зацеплением $\sin$ - и $\cos$ -гармоник:

$$\Delta^* \Psi_{c,s} + 2G_{c,s} \Delta^* \Psi_0 + (\nabla \Psi_0 \cdot \nabla G_{c,s}) + 4\pi R^2 \Psi_{c,s} \frac{d^2 p}{d\Psi^2} \Big|_{\Psi=\Psi_0} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n^2 F_0^2}{R^2 |\nabla \Psi_0|^2} \Psi_{c,s} - \frac{F_0}{|\nabla \Psi_0|^2} \frac{dF_0}{d\Psi_0} (\nabla \Psi_0 \cdot \nabla \Psi_{c,s}) + \\
& + \frac{\nabla \Psi_0 \cdot \nabla (F_0 F_{c,s})}{|\nabla \Psi_0|^2} \pm \frac{n R^2 F_0}{\Psi_{s,c}} [\nabla \Psi_0 \times \nabla \varphi] \cdot \nabla \frac{\Psi_{s,c}^2}{R^2 |\nabla \Psi_0|^2} = 0, \quad (1.14)
\end{aligned}$$

$$R^2 \nabla G_{c,s} \cdot [\nabla \Psi_0 \times \nabla \varphi] \pm n F_{s,c} \mp n R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\Psi_{s,c} F_0 \nabla \Psi_0}{R^2 |\nabla \Psi_0|^2} \right) = 0, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned}
& R^2 \nabla F_{c,s} \cdot [\nabla \Psi_0 \times \nabla \varphi] \mp n |\nabla \Psi_0|^2 G_{s,c} \pm n R^2 \Psi_{s,c}^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi_0}{R^2 \Psi_{s,c}} \right) - \\
& - R^2 \frac{dF_0}{d\Psi_0} \nabla \Psi_{c,s} \cdot [\nabla \Psi_0 \times \nabla \varphi] = 0. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Система 2D (независимых от φ) уравнений в частных производных (УрЧП) (1.14)–(1.16) позволяет рассчитать поправки $\Psi_{c,s}$, $F_{c,s}$, $G_{c,s}$ к любому базовому решению $\Psi_0 = \Psi_0(R, z)$, $F_0 = F_0(\Psi_0)$ осесимметричного УГШ (1.4).

Далее представлены некоторые примеры решений уравнений (1.14)–(1.16) с разным выбором базовых конфигураций магнитных поверхностей Ψ_0 , характеризующихся как цилиндрической, так и тороидальной топологией.

1.1.2 Цилиндрические решения и проявление резонансов

В качестве базового состояния рассмотрим общий случай цилиндрического винтового пинча, однородного вдоль оси z . Магнитные поверхности в такой конфигурации дважды вырождены: они не зависят от двух координат, φ и z , $\Psi_0 = \Psi_0(R)$. Радиальный баланс сил сводится к одномерному УГШ:

$$4\pi R^2 \frac{dp}{dR} + \frac{d\Psi_0}{dR} \left(\frac{d^2 \Psi_0}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d\Psi_0}{dR} \right) + F_0 \frac{dF_0}{dR} = 0. \quad (1.17)$$

При $F_0 = 0$ азимутальное магнитное поле и осевая плотность тока равны нулю, $B_{0\varphi} = 0$, $j_{0z} = 0$, и тогда общий случай сводится к конфигурации θ -пинча⁷, в которой давление плазмы внутри плазменного

⁷Используем стандартное название “ θ -пинч” для конфигурации с прямым магнитным полем и азимутальным током, хотя в используемых обозначениях азимутальное направление задаётся координатой φ

шнура уравнивается давлением магнитного поля.

Другой предел $B_{0z} = \text{const}$, $j_{0\varphi} = 0$ (что соответствует $\Psi_0 \sim R^2$) описывает конфигурацию z -пинча, в которой радиальное удержание плазмы обеспечивается протекающим по ней осевым током.

Цилиндрические магнитные конфигурации, однородные или периодические вдоль z , также часто называют “топологическими торами”. При этом направление вдоль оси z играет роль тороидального направления, а азимутальная координата φ служит аналогом полоидального угла. Если обозначить характерный масштаб длины вдоль оси z как R_0 (аналог большого радиуса тора), то эффективный коэффициент запаса устойчивости⁸ может быть определён как $q_{cyl}(R) = RB_{0z}/(R_0B_{0\varphi}) = R(d\Psi_0/dR)/(R_0F_0)$.

Рассмотрим тригонометрическую зависимость гармоник искомых функций от z , пригодную для описания бесконечного плазменного цилиндра:

$$f_c(R, z) = f_{ck}(R) \cos(kz), \quad f_s(R, z) = f_{sk}(R) \sin(kz)$$

где $f = \{\Psi, F, G\}$; k – волновой вектор вдоль z . Винтовая симметрия задачи априори не предполагается.

В результате двойной симметрии базового решения, $\Psi_0 = \Psi_0(R)$, осевые гармоники оказываются расщеплены. Общая система УрЧП (1.14)–(1.16) сводится к набору обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), из которых можно алгебраически выразить функции $F_{ck, sk}$, $G_{ck, sk}$, а также выделить комбинации $\Psi_+ = \Psi_{ck} + \Psi_{sk}$ и $\Psi_- = \Psi_{ck} - \Psi_{sk}$, описывающие амплитуды винтовых возмущений $\sim \cos(n\varphi - kz)$ и $\sim \cos(n\varphi + kz)$, соответственно. В результате приходим к известной проблеме равновесия цилиндрического плазменного шнура с малыми винтовыми возмущениями [180]. Уравнения для $\Psi_+(R)$ и $\Psi_-(R)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} k_{\mp} \left\{ k_{\mp} \frac{d^2 \Psi_{\pm}}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d\Psi_{\pm}}{dR} \left(\kappa k_{\mp} - 2R \frac{dk_{\mp}}{dR} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\Psi_{\pm}}{R^2} \left[k_{\mp} \left(k^2 R^2 + n^2 + \frac{R}{\frac{d\Psi_0}{dR}} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d^2 \Psi_0}{dR^2} \right) \right) + \frac{2R^2}{\frac{d\Psi_0}{dR}} \frac{d^2 \Psi_0}{dR^2} \frac{dk_{\mp}}{dR} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k_- k_+}{k_{\mp}} \frac{R}{\frac{d\Psi_0}{dR}} \left(\left(F_0 \frac{dF_0}{d\Psi_0} - \Delta^* \Psi_0 \right) + \frac{2n^2}{R(k^2 R^2 + n^2)} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\Psi_0}{dR} \right) \right) + 3k_+ \right. \right. \end{aligned} \quad (1.18)$$

⁸Используем нижний индекс “cyl” чтобы отличать “цилиндрический” коэффициент запаса устойчивости q_{cyl} от коэффициента запаса устойчивости в токамаке q

$$+ \frac{5n}{R_0 q_{cyl}} - \frac{4k^3 R^3}{(k^2 R^2 + n^2) \frac{d\Psi_0}{dR}} \frac{d^2 \Psi_0}{dR^2} \left. \right\} - \frac{4\pi R}{\left(\frac{d\Psi_0}{dR}\right)^2} \frac{dp}{dR} \left(k^2 + \frac{n^2}{R_0^2 q_{cyl}^2} \right) \Psi_{\pm} = 0.$$

Здесь для краткости введены обозначения $k_{\mp} = k \mp n/R_0 q_{cyl}$ и $\kappa = (k^2 R^2 - n^2)/(k^2 R^2 + n^2)$. Как и следовало ожидать, уравнение (1.18) совпадает с пределом нулевой частоты в уравнении для радиального смещения плазмы ($\xi_R \sim (\Psi - \Psi_0)/(d\Psi_0/dR)$), полученном Б. Сайдемом при выводе известного критерия конвективной устойчивости [187].

Это уравнение ясно демонстрирует проявление резонансов $k_{\mp} = 0$ на рациональных магнитных поверхностях. Резонансный радиус с $q_{cyl}(R) = \pm n/(kR_0)$ является регулярной особой точкой уравнения (1.18)⁹, и при наличии отрицательного градиента давления плазмы решение (1.18) оказывается расходящимся. Чтобы продемонстрировать это, запишем уравнение (1.18) в окрестности резонансной поверхности, $x_R = q_{cyl} \mp n/(kR_0) \sim 0$, что приводит к уравнению Эйлера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx_R^2} + \frac{2}{x_R} \frac{d\psi}{dx_R} + \frac{g}{x_R^2} \psi = 0, \quad g = - \frac{8\pi R}{\left(\frac{d\Psi_0}{dR}\right)^2} \frac{dp}{dR} \frac{q_{cyl}^2}{\left(\frac{dq_{cyl}}{dR}\right)^2} \Bigg|_{x_R=0}, \quad (1.19)$$

где $\psi(x_R) = \Psi_{\pm}$.

Характеристическое уравнение (1.19) имеет вид

$$\mu^2 + \mu + g = 0, \quad (1.20)$$

где μ обозначает степенной коэффициент в зависимости $\psi \sim x_R^{\mu}$.

Для спадающего к периферии профиля давления плазмы ($dp/dR < 0$) g всегда положительный. При $g > 1/4$ имеем $\psi \sim x_R^{-1/2} \sin(\sqrt{g - 1/4} \ln x_R)$, т.е. решение расходится как $\sim x_R^{-1/2}$, осциллируя с радиусом. При $g < 1/4$ решение расходится в резонансной точке как $\psi \sim x_R^{-1/2 + \sqrt{1/4 - g}}$, т.е. медленнее чем корневая зависимость. При $g = 1/4$, имеем $\psi \sim x_R^{-1/2}$. В любом случае при $dp/dR < 0$ ограниченного решения вблизи резонансной точки не существует.

Функции Ψ , F , G выражаются через $\Psi_{\pm}$ с помощью следующих соотношений:

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{\varepsilon}{2} \{ \Psi_+ \cos(n\varphi - kz) + \Psi_- \cos(n\varphi + kz) \}, \quad (1.21)$$

⁹При $n/kR_0 > 0$ особенность возникает в уравнении для Ψ_+ , а при $n/kR_0 < 0$ – в уравнении для Ψ_- .

$$\begin{aligned}
F = F_0 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{dF_0}{d\Psi_0} \{ \Psi_+ \cos(n\varphi - kz) + \Psi_- \cos(n\varphi + kz) \} - \\
- \frac{\varepsilon}{2} \frac{nR_0 q_{cyl} F_0}{(k^2 R^2 + n^2)} \left\{ \left[k_- \frac{d}{dR} \left(\frac{\Psi_+}{d\Psi_0/dR} \right) + k_+ \frac{\Psi_+}{R d\Psi_0/dR} \right] \cos(n\varphi - kz) - \right. \\
\left. - \left[k_+ \frac{d}{dR} \left(\frac{\Psi_-}{d\Psi_0/dR} \right) + k_- \frac{\Psi_-}{R d\Psi_0/dR} \right] \cos(n\varphi + kz) \right\}, \quad (1.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = 1 + \frac{\varepsilon}{4k} \left\{ \left[(\kappa k_- - k_+) \frac{d}{dR} \left(\frac{\Psi_+}{d\Psi_0/dR} \right) + (\kappa k_+ - k_-) \frac{\Psi_+}{R d\Psi_0/dR} \right] \times \right. \\
\times \cos(n\varphi - kz) + \left[(\kappa k_+ - k_-) \frac{d}{dR} \left(\frac{\Psi_-}{d\Psi_0/dR} \right) + (\kappa k_- - k_+) \frac{\Psi_-}{R d\Psi_0/dR} \right] \times \\
\left. \times \cos(n\varphi + kz) \right\}. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

При $g \geq 1/4$, т. е. для базового равновесия с высоким градиентом давления плазмы и слабым магнитным широм,

$$\frac{8\pi R}{\left(\frac{d\Psi_0}{dR}\right)^2} \left| \frac{dp}{dR} \right| \geq \frac{1}{4q_{cyl}^2} \left(\frac{dq_{cyl}}{dR} \right)^2,$$

возмущённое решение вблизи резонансной поверхности расходится как $(\Psi - \Psi_0) \sim (F - F_0) \sim x_R^{-1/2}$, $(G - 1) \sim x_R^{-3/2}$. Это приводит к следующим зависимостям для компонент магнитного поля: $B_R \sim x_R^{1/2}$, $(B_\varphi - B_{0\varphi}) \sim (B_z - B_{0z}) \sim x_R^{-1/2}$, и плотности тока: $j_R \sim x_R^{-1/2}$, $(j_\varphi - j_{0\varphi}) \sim (j_z - j_{0z}) \sim x_R^{-3/2}$. Таким образом, величина $j_{\parallel}/B$, соответствующая току Пфирша-Шлютера, испытывает расходимость $\sim 1/x_R$, что также следует из общего анализа МДУ в терминах координат с выпрямленными силовыми линиями – см., например, [184].

При $g < 1/4$ (это условие также соответствует критерию конвективной устойчивости плазмы), т. е. для базового равновесия с достаточно большим магнитным широм, решение вблизи резонанса ведёт себя как $(\Psi - \Psi_0) \sim (F - F_0) \sim x_R^{-1/2+\sqrt{1/4-g}}$, $(G - 1) \sim x_R^{-3/2+\sqrt{1/4-g}}$, что даёт $B_R \sim x_R^{1/2+\sqrt{1/4-g}}$, $(B_\varphi - B_{0\varphi}) \sim (B_z - B_{0z}) \sim x_R^{-1/2+\sqrt{1/4-g}}$; $j_R \sim x_R^{-1/2+\sqrt{1/4-g}}$, $(j_\varphi - j_{0\varphi}) \sim (j_z - j_{0z}) \sim x_R^{-3/2+\sqrt{1/4-g}}$.

Представленный анализ исчерпывающим образом описывает структуру особенности плотности тока, связанную с градиентом давления плазмы, в рамках линеаризованной цилиндрической модели.

Уравнение (1.18) обладает гладкими решениями, только если градиент давления плазмы равен нулю на резонансных поверхностях или давлением плазмы пренебрегается в целом¹⁰. В этом случае $g = 0$, и характеристическое уравнение (1.20) имеет нулевой корень $\mu = 0$, который соответствует постоянству ψ на резонансной поверхности.

Как обсуждалось в преамбуле, наблюдаемые проблемы с резонансами ясно указывают на то, что в рассматриваемой конфигурации не выполняется требование замыкания тока. Формально полученные решения с особенностями на рациональных магнитных поверхностях физически неприемлемы.

Далее будем рассматривать только те конфигурации, которые удовлетворяют условию замыкания тока. Оно тривиально выполняется для гофрированных конфигураций с замкнутыми силовыми линиями и нулевым вращательным преобразованием; ниже в качестве такого примера рассмотрено равновесие гофрированного θ -пинча. Для конфигурации винтового пинча равновесие с истинными магнитными поверхностями будет найдено за счёт отказа от двойного вырождения в базовом цилиндрическом решении.

θ -пинч

Уравнения, описывающие равновесие гофрированного θ -пинча, следуют из общего набора (1.18) в пределе $q_{cyl} \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Psi_{\pm}}{dR^2} - \frac{\kappa}{R} \frac{d\Psi_{\pm}}{dr} - \frac{\Psi_{\pm}}{R^2} \times \\ & \times \left(k^2 R^2 + n^2 + \frac{R^2}{d\Psi_0/dR} \frac{d^3 \Psi_0}{dR^3} + \frac{3k^2 R^2 + n^2}{k^2 R^2 + n^2} \left(1 - \frac{R}{d\Psi_0/dR} \frac{d^2 \Psi_0}{dR^2} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Для определённости рассмотрим равновесие с $dp/d\Psi = \text{const} = -A/4\pi$. В этом случае решение УГШ (1.17) с $F_0 = 0$ есть $\Psi_0 = \Psi_b R^4/a^4$ ($\Psi_b = Aa^4/8$ – величина магнитного потока на некотором характерном радиусе a , обычно отождествляемом с границей плазменного шнура, $\Psi_b = \Psi_0(R = a)$). Оно описывает конфигурацию с осевым магнитным полем $B_{0z} = 4\Psi_b R^2/a^4$ и азимутальной плотностью тока $j_{0\varphi} = -8c\Psi_b R/(4\pi a^4)$, линейно растущей с R (c – скорость света в вакууме).

¹⁰Гладкие решения (1.18) также могут быть найдены при $dp/dR > 0$, но мы не будем обсуждать этот случай ввиду его несоответствия задаче удержания плазмы

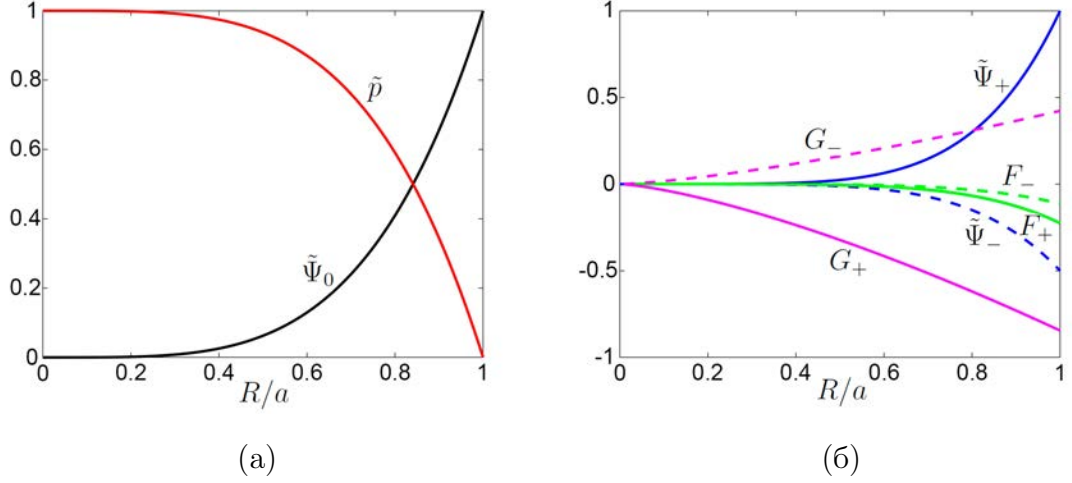


Рис. 1.1: Радиальные профили (а) базовых функций $\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0/\Psi_b$ и $\tilde{p} = p/p_a$ ($p_a = p(R=0)$); (б) асимметричных поправок $\tilde{\Psi}_{\pm} = (\Psi_{ck} \pm \Psi_{sk})/\Psi_b$, $F_{\pm} = (F_{ck} \pm F_{sk})/(\Psi_b/a)$ и $G_{\pm} = (G_{ck} \pm G_{sk})$ в конфигурации θ -пинча. Здесь $n = 5$, $k = 1$, $R_0/a = 3$.

После подстановки $\Psi_0 \sim R^4$, уравнение (1.24) сводится к

$$\frac{d^2\Psi_{\pm}}{dR^2} - \frac{\kappa}{R} \frac{d\Psi_{\pm}}{dR} - \frac{\Psi_{\pm}}{R^2} \left(k^2 R^2 + n^2 + \frac{4n^2}{k^2 R^2 + n^2} \right) = 0, \quad (1.25)$$

которое является ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами и регулярной особой точкой $R = 0$.

Решение уравнения (1.25), конечное в $R = 0$, выражается через модифицированные функции Бесселя первого рода I_{α} :

$$\Psi_{\pm}(R) = c_{\pm} \left((2 + \sqrt{4 + n^2}) I_{\sqrt{4+n^2}}(kR) + kR I_{1+\sqrt{4+n^2}}(kR) \right)$$

с постоянными коэффициентами c_+ и c_- . Решение с одним из коэффициентов равным нулю обладает винтовой симметрией.

После нахождения $\Psi_{\pm}$ радиальные зависимости F и G рассчитываются явно из уравнений (1.22), (1.23) в пределе $q_{cyl} \rightarrow \infty$:

$$F = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{nkR^3}{(k^2 R^2 + n^2)} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\Psi_+}{R^2} \cos(n\varphi - kz) - \frac{\Psi_-}{R^2} \cos(n\varphi + kz) \right\},$$

$$G = 1 - \frac{\varepsilon}{8\Psi_b} \frac{a}{R} \frac{n^2 a^3}{(k^2 R^2 + n^2)} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\Psi_+}{R^2} \cos(n\varphi - kz) + \frac{\Psi_-}{R^2} \cos(n\varphi + kz) \right\}.$$

Вблизи $R = 0$ искомые функции ведут себя следующим образом: $\Psi \sim F \sim R^{\sqrt{n^2+4}}$, $G \sim R^{\sqrt{n^2+4}-4}$.

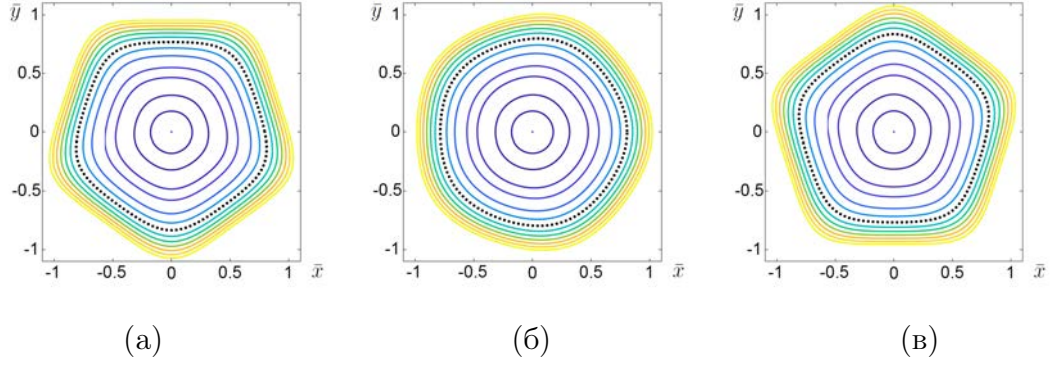


Рис. 1.2: Линии уровня функции Ψ в конфигурации асимметричного θ -пинча в различных аксиальных сечениях: (а) $kz = \pi/2$, (б) $kz = \pi$, (в) $kz = 3\pi/2$. Пунктирная линия показывает магнитную поверхность $\Psi = 0, 4\Psi_b$. Здесь $n = 5$, $\bar{k} = 1$, $R_0/a = 3$, $\varepsilon = 0,3$ и введены локальные декартовы координаты $\bar{x} = R \cos \varphi/a$, $\bar{y} = R \sin \varphi/a$.

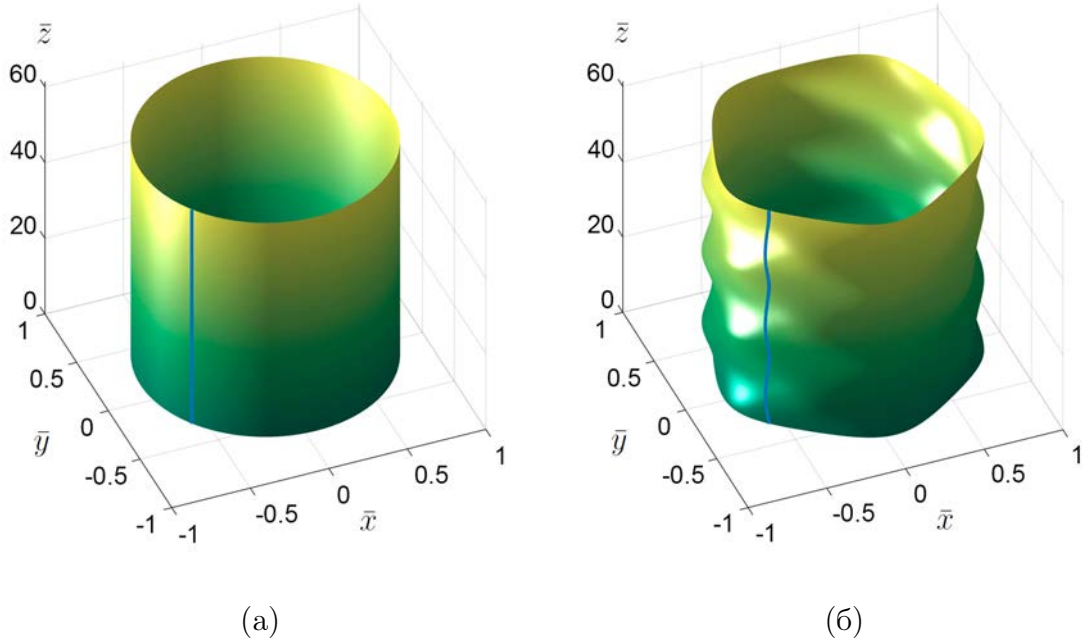


Рис. 1.3: 3D вид магнитной поверхности $\Psi = 0, 4\Psi_b$ при (а) $\varepsilon = 0$ (базовая конфигурация θ -пинча) и (б) $\varepsilon = 0,3$ (конфигурация θ -пинча с нарушением симметрии). Синяя линия показывает поведение магнитной силовой линии на поверхности. Здесь $\bar{x} = R \cos \varphi/a$, $\bar{y} = R \sin \varphi/a$, $\bar{z} = z/a$.

Знание функций Ψ , F , G позволяет рассчитать магнитное поле и плотность тока аналитически. Вблизи $R = 0$, $B_R \sim B_\varphi \sim R^{\sqrt{n^2+4}-1}$, $B_z \sim j_z \sim R^{\sqrt{n^2+4}-2}$ конечны для любого n , а $j_R \sim j_\varphi \sim R^{\sqrt{n^2+4}-3}$ хорошо определены при $n \geq 3$.

На рис. 1.1 показаны радиальные профили $\Psi_0(R)$ и $p(R)$ в ба-

зовой конфигурации θ -пинча (а) и асимметричные поправки к этой конфигурации, рассчитанные для $n = 5$, $\bar{k} = kR_0 = 1$ и $R_0/a = 3$ (б). Расчётная область ограничена радиусами $R = 0$ и $R = a$. Коэффициенты c_+ и c_- выбраны таким образом, чтобы обеспечить $\tilde{\Psi}_+(R = a) = 1$ и $\tilde{\Psi}_-(R = a) = -0,5$ ($\tilde{\Psi} = \Psi/\Psi_b$).

Линии уровня функции Ψ для этого решения при $\varepsilon = 0,3$ показаны на рис. 1.2 в различных аксиальных ($z = \text{const}$) сечениях. Каждый цвет на рисунках соответствует отдельной магнитной поверхности. Ясно видна структура азимутальной асимметрии $n = 5$.

Трёхмерный вид одной выделенной магнитной поверхности $\Psi = 0,4\Psi_b$ показан на рис. 1.3 (линии уровня этой поверхности показаны на рис. 1.2 пунктиром). Азимутальная асимметрия приводит к гофрировке цилиндрической поверхности, которая также неоднородна и в z -направлении. Голубая линия на рис. 1.3 показывает поведение магнитной силовой линии на поверхности $\Psi = \text{const}$, рассчитанное путём прямой трассировки векторного поля (1.7).

Винтовой пинч с истинными магнитными поверхностями

Ключевая идея поиска асимметричной модификации винтового пинча с истинными магнитными поверхностями заключается в устранении двойного вырождения базового решения. Для этого будем отталкиваться от базовой конфигурации “гофрированного” цилиндра, которая зависит не только от радиуса плазмы, но содержит и периодическую зависимость от z :

$$\Psi_0(R, z) = \Psi_{00}(R) + \Psi_{0c}(R) \cos(kz). \quad (1.26)$$

Таким образом сохранена только одна (азимутальная) симметрия базового решения.

Для определённости выберем p и F_0^2 линейными функциями Ψ_0 , полагая $dp/d\Psi = -A/4\pi$ и $F_0 dF_0/d\Psi_0 = B\Psi_0$, где A и B – постоянные.

Подставляя (1.26) в УГШ (1.4), находим $\Psi_{00}(R)$ и $\Psi_{0c}(R)$:

$$\Psi_{00} = c_0 R J_1(\sqrt{B}R) + \frac{A}{B} R^2, \quad \Psi_{0c} = c_k R J_1(\sqrt{B - k^2}R).$$

Здесь J_α – функция Бесселя, а c_0 и c_k – константы, определяющие амплитуды однородной и неоднородной в z -направлении составляющих Ψ_0 , соответственно.

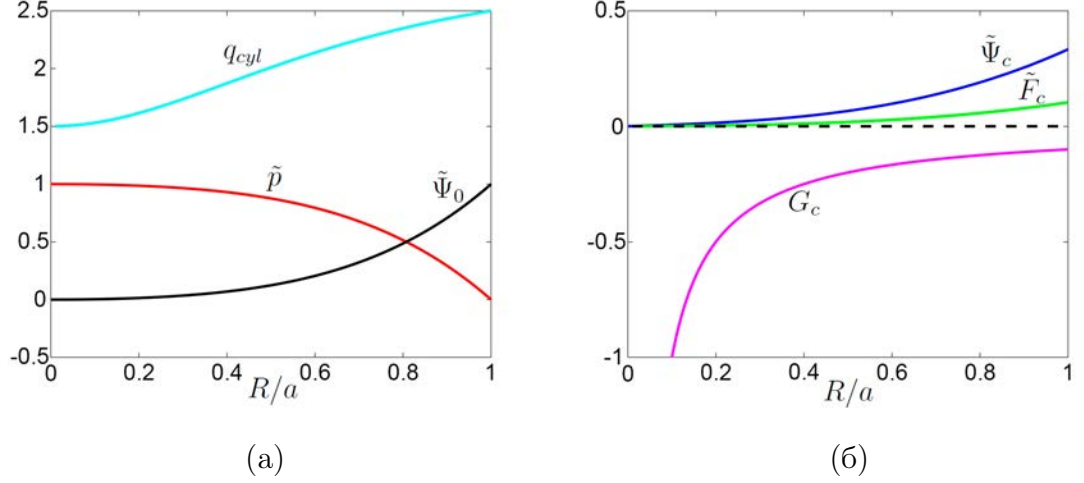


Рис. 1.4: Радиальное распределение (а) базовых функций $\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0/\Psi_b$, $\tilde{p} = p/p_a$ ($p_a = p(R=0)$) и q_{cyl} ; (б) асимметричных поправок $\tilde{\Psi}_c = \Psi_c/\Psi_b$, $\tilde{F}_c = F_c/(\Psi_b/a)$, и G_c в сечении $z=0$ для конфигурации винтового пинча. Функции Ψ_s , F_s и G_s показаны чёрными пунктирными линиями. Здесь $n=1$, $\bar{k}=0,5$, $R_0/a=3$.

На рис. 1.4а поток, Ψ_0 , давление плазмы, p , и коэффициент запаса устойчивости, q_{cyl} , в рассматриваемой конфигурации винтового пинча показаны как функции R в сечении $z=0$. Постоянные базового решения выбраны таким образом, чтобы обеспечить $\Psi_{0c}(R=0)/\Psi_{00}(R=0)=0,5$, $\Psi_0(R=a, z=0)=\Psi_b$, и определены следующие характерные значения коэффициента запаса устойчивости: $q_{cyl}(0)=1,5$, $q_{cyl}(\Psi_b)=2,5$.

Цилиндрический коэффициент запаса устойчивости в рассматриваемой конфигурации существенно неоднороден и, в частности, содержит крупномасштабную рациональную магнитную поверхность $q_{cyl}=2$ в центре плазменного шнура, которая потенциально может резонировать с возмущениями $\sim \cos(n\varphi \pm kz)$ с $k = \mp n/(2R_0)$.

В отличие от случая вырожденного цилиндра с $\Psi_0 = \Psi_0(R)$ рассматриваемая задача уже не сводится к анализу двух независимых возмущений, обладающих винтовой симметрией, а требует решения системы зацепленных УрЧП.

Рассматривая частное решение уравнений (1.14)–(1.16) в форме $\cos(kz)$ -гармоник, удаётся найти трёхмерную равновесную магнитную поверхность с азимутальной асимметрией $n=1$:

$$\begin{aligned} \Psi(R, \varphi, z) = & \Psi_{00}(R) + \Psi_{0c}(R) \cos(kz) + \\ & + \varepsilon R \cos \varphi \left(\frac{2A}{B} + \sqrt{B} c_0 J_0(\sqrt{B} R) \right) + \frac{\varepsilon c_k \sqrt{B - k^2}}{2} R \times \end{aligned}$$

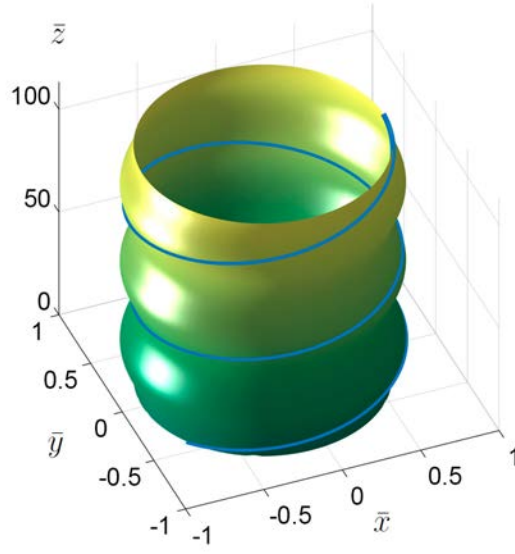


Рис. 1.5: 3D вид магнитной поверхности $\Psi = 0, 4\Psi_b$, описываемой (1.27) при $\varepsilon = 0, 1$ (винтовой пинч с нарушенной симметрией). Голубая линия показывает поведение магнитной силовой линии на поверхности. Здесь $\bar{x} = R \cos \varphi/a$, $\bar{y} = R \sin \varphi/a$, $\bar{z} = z/a$.

$$\times J_0(\sqrt{B - k^2 R}) (\cos(\varphi - kz) + \cos(\varphi + kz)). \quad (1.27)$$

Графики асимметричных поправок к функциям Ψ , F и G для возмущений с потенциально резонансным волновым числом $\bar{k} = 0, 5$ показаны на рис. 1.4б. На рис. 1.5 показан трёхмерный вид магнитной поверхности $\Psi = 0, 4\Psi_b$, описываемый уравнением (1.27) при $\varepsilon = 0, 1$. Все функции в полученном решении являются гладкими и не имеют особенностей на радиусе плазмы, несмотря на наличие потенциально резонансной поверхности. Этот пример наглядно подтверждает прямую связь между возникновением резонанса и вырождением базового равновесия.

1.1.3 Тороидальные конфигурации с истинными магнитными поверхностями

Как уже отмечалось, к простейшим тороидальным конфигурациям с истинными магнитными поверхностями относятся системы с полоидально замкнутыми силовыми линиями. В отсутствие тороидального магнитного поля ($F_0 = 0$) система уравнений (1.14)–(1.16) разбивается на две независимые подсистемы для функций Ψ_c , F_s , G_c и Ψ_s , F_c , G_s . Примеры соответствующих решений уравнений (1.14)–(1.16)

для базовой конфигурации в виде гидродинамического вихря Хилла [188] представлены в [117] (асимметрия $n = 1$) и [189] (асимметрия $n = 3$). С точки зрения практических приложений больший интерес представляют системы с перекрещенными силовыми линиями, естественным образом образующими магнитные поверхности. Такие конфигурации потенциально подвержены резонансам, что делает поиск их истинных равновесий принципиальной задачей. Пример соответствующего решения представлен ниже.

Конфигурация сферического токамака

Рассмотрим базовую конфигурацию плазмы с $F_0 = \text{const} \neq 0$ и $dp/d\Psi = \text{const} \neq 0 = -A/4\pi$, являющуюся частным случаем хорошо известного аналитического равновесия Соловьёва [190], широко используемого в теории термоядерного синтеза, в частности, для описания равновесия плазмы в сферических токамаках – см., например, [191–194].

Базовое решение УГШ (1.4)

$$\Psi_0 = \Psi_a \left\{ 1 - \left(\frac{R^2}{R_a^2} - 1 \right)^2 - 4\kappa^2 \frac{R^2}{R_a^2} \frac{z^2}{R_a^2} \right\}, \quad (1.28)$$

описывает замкнутые тороидальные конфигурации при $\Psi_0/\Psi_a > 0$. Здесь $\Psi_a = -AR_a^4/(8(1 + \kappa^2))$ соответствует полоидальному магнитному потоку через окружность, ограниченную магнитной осью, которая характеризуется координатами $z = 0$, $R = R_a$. Параметр κ в (1.28) регулирует вытянутость верх-низ симметричных магнитных поверхностей. Профиль коэффициента запаса устойчивости в рассматриваемой конфигурации непостоянен и выражается явно в терминах полного эллиптического интеграла второго рода $E(\kappa^2)$:

$$q_0(\Psi_0) = \frac{2q_a E(\chi^2)}{\pi \sqrt{\tilde{\Psi}_0} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0}}}, \quad \chi^2 = \frac{2\sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0}}{1 + \sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0}}.$$

Здесь $\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0/\Psi_a$ обозначает функцию магнитного потока (1.28), нормированную на значение на магнитной оси токамака, $q_a = -F_0 R_a/(8\kappa \Psi_a)$ – величина коэффициента запаса устойчивости на магнитной оси. Вблизи магнитной оси поведение q_0 описывается приближённой зависимостью $q_0 \approx q_a(1 + 15(1 - \tilde{\Psi}_0)/16)$.

Давление плазмы также не постоянно и линейно зависит от Ψ_0 :

$$p = p_a - \frac{8\Psi_a(1 + \kappa^2)}{4\pi R_a^4}(\Psi_a - \Psi_0),$$

где p_a – величина давления на магнитной оси.

Для дальнейшего описания удобно также ввести систему полярных координат стандартными соотношениями: $R = R_a + r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, где θ – полоидальный угол, r – радиальная координата, отсчитываемая от магнитной оси.

В этих обозначениях:

$$\begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_a \left\{ 1 - 2\frac{r^2}{R_a^2}(1 + \kappa^2) - \frac{1}{2}\frac{r^4}{R_a^4}\left(\frac{3}{4} + \kappa^2\right) - \frac{r^3}{R_a^3}(3 + 2\kappa^2)\cos\theta - \right. \\ \left. - 2\frac{r^2}{R_a^2}\left(1 - \kappa^2 + \frac{1}{4}\frac{r^2}{R_a^2}\right)\cos 2\theta - \frac{r^3}{R_a^3}(1 - 2\kappa^2)\cos 3\theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{8}\frac{r^4}{R_a^4}(1 - 4\kappa^2)\cos 4\theta \right\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

В пределе $r/R_a \ll 1$, выражение (1.29) сводится к $\Psi = \Psi_a \{1 - 2r^2/R_a^2(1 + \kappa^2 + (1 - \kappa^2)\cos 2\theta)\}$: вблизи магнитной оси магнитные поверхности имеют эллиптическую форму (круглую при $\kappa = 1$).

Рисунок 1.6а демонстрирует профили магнитного потока Ψ_0 , коэффициента запаса устойчивости и давления плазмы в базовой равновесной конфигурации. Величина давления плазмы принята равной нулю при $R = R_a + a$, $z = 0$, где a соответствует малому радиусу токамака. Для определённости будем называть поверхность нулевого давления граничной магнитной поверхностью.

Отметим, что радиальные профили p и q являются непостоянными и гладкими, при этом q проходит через ряд крупномасштабных рациональных магнитных поверхностей, таких как $q = 1$, $q = 3/2$, $q = 2$ и т. д., являющихся потенциальными источниками резонансов для неистинных магнитных поверхностей.

Базовые поля имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{B}_0 = \{B_{0R}, B_{0\varphi}, B_{0z}\} = 4\frac{\Psi_a}{R_a^2} \left\{ 2\kappa^2 \frac{Rz}{R_a^2}, -2\kappa q_a \frac{R_a}{R}, \left(1 - \frac{R^2}{R_a^2} - 2\kappa^2 \frac{z^2}{R_a^2}\right) \right\},$$

$$\mathbf{j}_0 = \{j_{0R}, j_{0\varphi}, j_{0z}\} = \frac{c}{4\pi} \frac{\Psi_a}{R_a^3} \left\{ 0, 8(1 + \kappa^2) \frac{R}{R_a}, 0 \right\}.$$

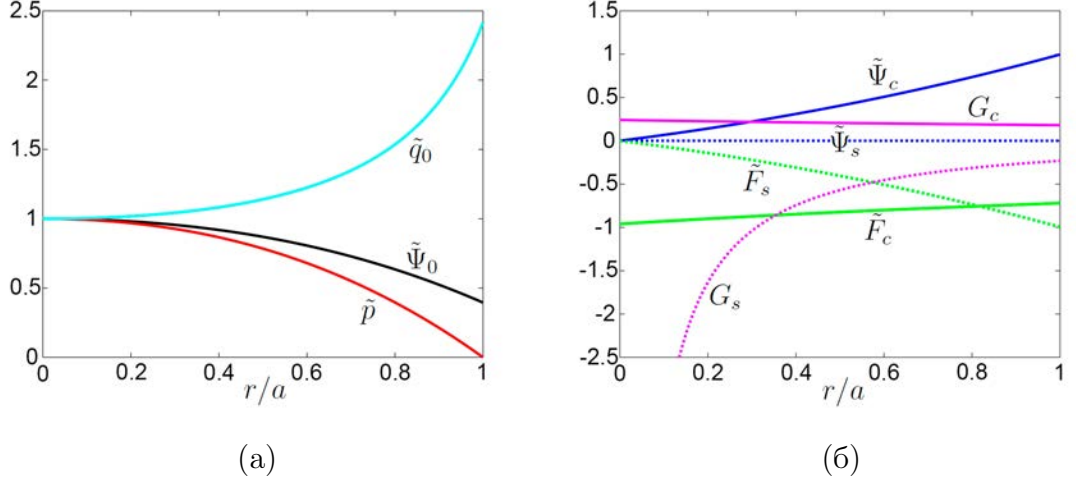


Рис. 1.6: Радиальные профили (а) $\tilde{\Psi}_0$, $\tilde{q}_0 = q_0/q_a$ и $\tilde{p} = p/p_a$ ($p_a = p(r=0)$) в базовой конфигурации; (б) амплитуды возмущений $\tilde{\Psi}_{c,s} = \Psi_{c,s}/\Psi_a$, $\tilde{F}_{c,s} = F_{c,s}/(\Psi_a/R_a)$ и $G_{c,s}$ в экваториальном сечении $\theta = 0$. Здесь $R_a/a = 3$, $q_a = 1$, $\kappa = 0, 5$; $c_0 = -0, 24$, $c_1 = 0, 24$, $s_0 = s_1 = 0$.

Для нахождения аналитических решений уравнений (1.14)–(1.16) повторим процедуру, использованную при анализе равновесий винтового и θ -пинчей. После исключения гармоник функции G с использованием уравнений (1.16), ищем частное решение оставшихся уравнений (1.14), (1.15) в форме полиномов по степеням z , отталкиваясь от типа базового решения. Ограничимся третьей степенью z для функции Ψ . Проблема поиска трёхмерных равновесий сводится к решению системы одномерных (по R) ОДУ, совместное решение которых для практически важного случая крупномасштабной тороидальной неоднородности $n = 1$ имеет вид:

$$\Psi = \Psi_0 + 4\varepsilon\Psi_a\frac{R}{R_a}\left\{(c_0\cos\varphi + s_0\sin\varphi)\left(1 - \frac{R^2}{R_a^2} - 2\kappa^2\frac{z^2}{R_a^2}\right) + (c_1\cos\varphi + s_1\sin\varphi)\frac{z}{R_a}\left(1 - \frac{R^2}{R_a^2}(1 - 2\kappa^2) - 2\kappa^2\frac{z^2}{R_a^2}\right)\right\}, (1.30)$$

$$F = F_0 - \varepsilon F_0\left\{(c_0\cos\varphi + s_0\sin\varphi)\frac{R_a}{R} + (c_1\cos\varphi + s_1\sin\varphi)\frac{z}{R} - \frac{1}{2\kappa q_a}\frac{R}{R_a}\left((s_1\cos\varphi - c_1\sin\varphi)\left(1 - \frac{R^2}{R_a^2} - 4\kappa^2\frac{z^2}{R_a^2}\right) - 2\kappa^2(s_0\cos\varphi - c_0\sin\varphi)\frac{z}{R_a}\right)\right\},$$

$$G = 1 - \varepsilon \left\{ (c_0 \cos \varphi + s_0 \sin \varphi) \frac{R_a}{R} + (c_1 \cos \varphi + s_1 \sin \varphi) \frac{z}{R} + \right. \\ \left. + 32\kappa q_a \frac{\Psi_a^2}{R_a^2 |\nabla \Psi|^2} \frac{R}{R_a} \left((s_1 \cos \varphi - c_1 \sin \varphi) \left(1 - \frac{R^2}{R_a^2} - 4\kappa^2 \frac{z^2}{R_a^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\kappa^2 (s_0 \cos \varphi - c_0 \sin \varphi) \frac{z}{R_a} \right) \right\}.$$

Семейство полученных решений содержит четыре параметра, c_0 , c_1 , s_0 , s_1 , определяющие вклад тороидальных гармоник в форму магнитных поверхностей. Коэффициенты c_0 и s_0 соответствуют чётным степеням z в выражениях для $\Psi_{c,s}$, в то время как c_1 и s_1 связаны с верх-низ асимметричными составляющими.

На рис. 1.6б показаны возмущённые решения в зависимости от радиуса плазмы в экваториальном сечении токамака. Несмотря на наличие рациональных поверхностей, магнитное поле и плотность тока являются гладкими функциями во всём объёме плазменного шнура.

Тороидальная асимметрия построенных истинных магнитных поверхностей наглядно показана на рис. 1.7. Отметим, что корректный расчёт положения магнитной оси требует дополнительной точности в разложении по параметру малости асимметрии ε . Вблизи магнитной оси $|\nabla \Psi_0| \sim 0$, из-за чего малость асимметричных поправок по сравнению с базовым решением плохо определена. Для уточнения положения оси в тороидально деформированной магнитной конфигурации используем физически обоснованное предположение о том, что возмущённая магнитная ось деформируется возмущениями с тем же значением n , что и магнитные поверхности.

Выражение для тороидально неоднородной магнитной поверхности со скорректированной магнитной осью, $\Psi^*(R, \varphi, z)$, запишем в виде, аналогичном (1.28):

$$\Psi^* = \Psi_a \left(1 - \left(\frac{R^2}{R_a^2} - \frac{R_a^{*2}}{R_a^2} \right)^2 - 4\kappa^2 \frac{R^2}{R_a^2} \frac{(z - z_a^*)^2}{R_a^2} \right), \quad (1.31)$$

заменяя при этом фиксированное положение магнитной оси $\{R_a, 0\}$ на параметрически заданные координаты “винтовой” линии $\{R_a^*(R, \varphi, z), z_a^*(R, \varphi, z)\}$:

$$\begin{cases} R_a^* = R_a (1 + \varepsilon(\alpha_c \cos \varphi + \alpha_s \sin \varphi)), \\ z_a^* = R_a \varepsilon(\beta_c \cos \varphi + \beta_s \sin \varphi), \end{cases}$$

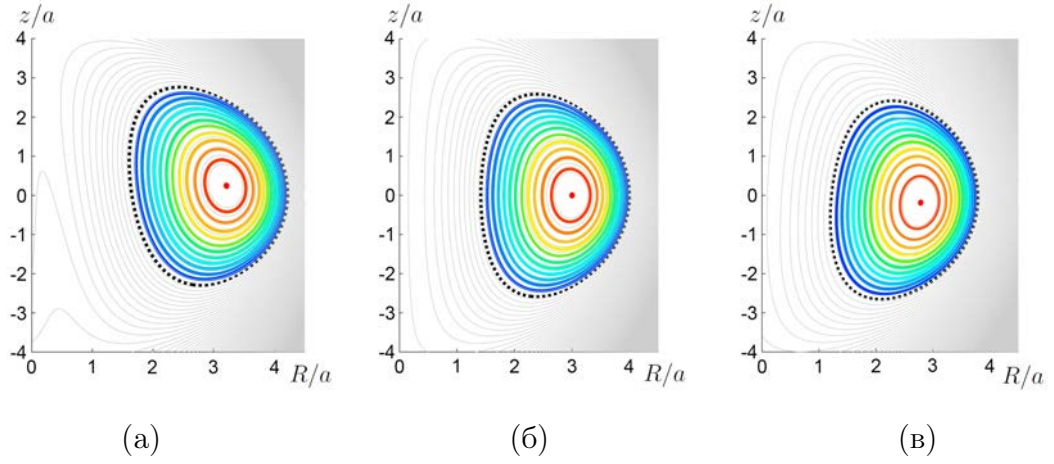


Рис. 1.7: Линии уровня функции Ψ^* (1.32) в различных тороидальных сечениях: (а) $\varphi = 0$, (б) $\varphi = \pi/2$, (в) $\varphi = \pi$. Пунктирная линия показывает магнитную поверхность $\Psi = 0, 4\Psi_a$, которая считается граничной. Здесь $R_a/a = 3$, $\varepsilon = 0,3$, $\kappa = 0,5$, $c_0 = -0,24$, $c_1 = 0,24$, $s_0 = s_1 = 0$.

где $\alpha_{c,s}(R, z)$ и $\beta_{c,s}(R, z)$ – функциональные коэффициенты.

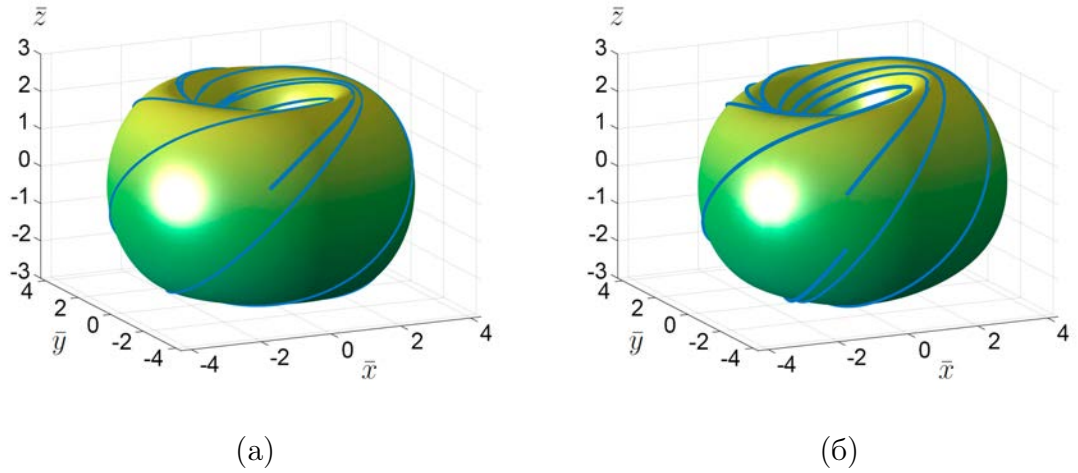


Рис. 1.8: Трёхмерный вид магнитной поверхности $\Psi^* = 0, 4\Psi_a$, описываемой выражением (1.32) при (а) $\varepsilon = 0$ (базовая конфигурация) и (б) $\varepsilon = 0,6$ (конфигурация сферического токамака с нарушением симметрии). Синяя линия показывает магнитную силовую линию, осуществляющую 15 тороидальных оборотов на поверхности. Здесь $R_a/a = 3$, $\kappa = 0,5$, $q_a = 1$, $c_0 = -0,24$, $c_1 = 0,24$, $s_0 = s_1 = 0$; $\bar{x} = R \cos \varphi/a$, $\bar{y} = R \sin \varphi/a$, $\bar{z} = z/a$.

Эти коэффициенты определим, сопоставляя выражения (1.30) и (1.31) в первом порядке по ε , откуда находим

$$\alpha_c = -\frac{R}{R_a} \left(c_0 + c_1 \frac{z}{R_a} \right), \quad \beta_c = c_1 \frac{R}{R_a} - \frac{z}{R} \left(c_0 + c_1 \frac{z}{R_a} \right),$$

$$\alpha_s = -\frac{R}{R_a} \left(s_0 + s_1 \frac{z}{R_a} \right), \quad \beta_s = s_1 \frac{R}{R_a} - \frac{z}{R} \left(s_0 + s_1 \frac{z}{R_a} \right),$$

и, соответственно, поправки высшего порядка для функции Ψ , заданной (1.30). Итоговое выражение для Ψ^* , адекватно описывающее магнитную ось, имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi^* = \Psi + \Psi_a \varepsilon^2 & \left\{ 2 \left(\frac{R^2}{R_a^2} - 3 \right) (\alpha_c \cos \varphi + \alpha_s \sin \varphi)^2 - \right. \\ & - 4\kappa^2 \frac{R^2}{R_a^2} (\beta_c \cos \varphi + \beta_s \sin \varphi)^2 - 4\varepsilon (\alpha_c \cos \varphi + \alpha_s \sin \varphi)^3 - \\ & \left. - \varepsilon^2 (\alpha_c \cos \varphi + \alpha_s \sin \varphi)^4 \right\}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Пространственная деформация граничной магнитной поверхности показана отдельно на рис. 1.8 вместе с силовой линией магнитного поля, лежащей на этой поверхности. Как упоминалось ранее, нигде внутри этой границы вблизи рациональных поверхностей не возникает особенностей.

1.1.4 Общее решение с тороидальной асимметрией $n = 1$

Далее предложен общий подход к построению равновесия плазмы в токамаке с $n = 1$ нарушением тороидальной симметрии [130]. Для произвольного осесимметричного равновесия плазмы токамака рассчитаны малые деформации исходной магнитной конфигурации, которые сохраняют вложенность магнитных поверхностей (как в исходной конфигурации) и обеспечивают равновесие плазмы.

Возвращаясь к системе уравнений (1.14)–(1.16), алгебраически исключим функции $G_{c,s}$ с использованием уравнения (1.16) и будем искать частное решение оставшихся уравнений (1.14), (1.15) в виде комбинации первых пространственных производных функции $\Psi_0(R, z)$ с произвольными функциональными коэффициентами [126]:

$$\begin{aligned} \Psi_{c,s} &= a_{c,s}(z) \frac{\partial \Psi_0}{\partial R} + b_{c,s}(R) \frac{\partial \Psi_0}{\partial z}, \\ F_{c,s} &= h_{c,s}(R, z) + d_{c,s}(R, z) \frac{\partial \Psi_0}{\partial R} + g_{c,s}(R, z) \frac{\partial \Psi_0}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Подстановка (1.33) в уравнения (1.14), (1.15) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} a_l &= l_0 R_0 + l_1 z, \quad b_l = -l_1 R, \quad l = c, s, \\ h_{c,s} &= -\frac{F_0}{R} a_{c,s}, \quad d_{c,s} = \pm \frac{b_{s,c}}{R} + a_{c,s} \frac{dF_0}{d\Psi_0}, \\ g_{c,s} &= \mp \frac{a_{s,c}}{R} + b_{c,s} \frac{dF_0}{d\Psi_0}, \end{aligned}$$

где c_0, s_0, c_1, s_1 произвольные безразмерные постоянные, а R_0 – характерный масштаб длины, в качестве которого используем большой радиус тора.

В этих обозначениях функции $G_{c,s}$ выражаются как:

$$G_{c,s} = -\frac{a_{c,s}}{R} \pm \frac{F_0}{R|\nabla\Psi|^2} \left(a_{s,c} \frac{\partial\Psi_0}{\partial z} - b_{s,c} \frac{\partial\Psi_0}{\partial R} \right).$$

Итоговое выражение для асимметричной магнитной поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 + \varepsilon \left\{ (c_0 \cos \varphi + s_0 \sin \varphi) R_0 \frac{\partial\Psi_0}{\partial R} + \right. \\ &\quad \left. + (c_1 \cos \varphi + s_1 \sin \varphi) \left(z \frac{\partial\Psi_0}{\partial R} - R \frac{\partial\Psi_0}{\partial z} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Выражение (1.34) позволяет явно рассчитать равновесные магнитные поверхности на основе любого осесимметричного решения УГШ, $\Psi_0(R, z)$. Коэффициенты c_0, s_0, c_1, s_1 определяют форму асимметричных возмущений. Для верх-низ симметричного базового решения Ψ_0 , содержащего только чётные степени z , первый член в фигурных скобках выражения (1.34) также чётный, в то время как второй член нечётный. Тогда коэффициенты c_0, s_0 определяют величину экваториально симметричной части возмущений, c_1, s_1 соответствуют верх-низ асимметричной деформации. Отношение c_i/s_i ($i = 0, 1$) определяет соотношение между амплитудами $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ тороидальных гармоник возмущений.

В качестве примера использования предлагаемого подхода рассмотрим модификацию равновесия Соловьёва, являющегося решением УГШ (1.4) с постоянными функциями источника $dp/d\Psi =$

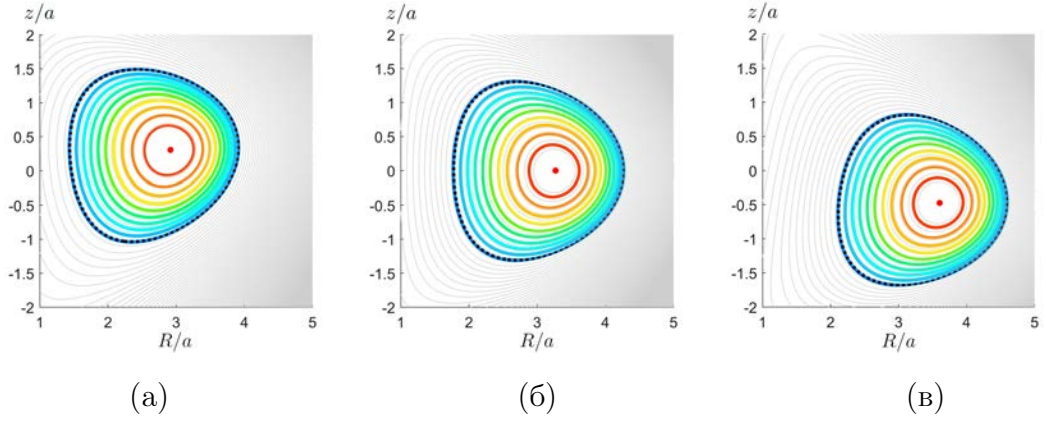


Рис. 1.9: Линии уровня функции Ψ , рассчитанной по формуле (1.37) с применением процедуры корректировки магнитной оси, в различных тороидальных сечениях: $\varphi = 0$ (а), $\varphi = \pi/2$ (б), $\varphi = \pi$ (в). Пунктирная кривая показывает граничную магнитную поверхность $\Psi = \Psi_b$. Здесь $c_0 = c_1 = 0,3$, $s_0 = s_1 = 0$, $\varepsilon = 0,4$.

$-A_1/4\pi$ и $F_0 dF_0/d\Psi_0 = -A_2$:

$$\Psi_0 = \Psi_a \left\{ 2 \left(\frac{R}{R_a} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_a} \right)^4 - 4\kappa^2 \left(\frac{Rz}{R_a^2} \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{z}{R_a} \right)^2 \right\}. \quad (1.35)$$

Как и ранее Ψ_a обозначает магнитный поток на магнитной оси токамака с координатами $z = 0$, $R = R_a$. Параметры $\kappa^2 = -(A_1 R_a^4 / (8\Psi_a) + 1)$ и $\sigma = A_2 R_a^2 / \Psi_a$ в выражении (1.35) связаны с функциями источника $dp/d\Psi$ и $F_0 dF_0/d\Psi_0$ и определяют форму магнитных поверхностей, симметричных относительно экваториальной плоскости токамака. Профиль коэффициента запаса устойчивости непостоянен и явно выражается через полные эллиптические интегралы в виде

$$\begin{aligned} q_0(\Psi_0) = & \frac{2q_a \sqrt{1 - \sigma/8\kappa^2}}{\pi \sqrt{1 - \sigma/8\kappa^2} + \sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0} \sqrt{1 + \frac{\sigma(1 - \tilde{\Psi}_0)}{32\kappa^2 q_a^2 (1 - \sigma/8\kappa^2)}}} \times \\ & \times \left\{ \left(1 + \frac{\sigma(1 - 2\tilde{\Psi}_0)}{32\kappa^2 q_a^2 (1 - \sigma/8\kappa^2)} \right) \frac{\Pi(h, \chi^2)}{1 + \sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0}} + \right. \\ & + \frac{\sigma}{32\kappa^2 q_a^2 (1 - \sigma/8\kappa^2)} \times \\ & \times \left[\left(2 - \frac{\sigma}{8\kappa^2} \right) K(\chi^2) - \left(1 - \frac{\sigma}{8\kappa^2} + \sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0} \right) E(\chi^2) \right] \Big\}. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0/\Psi_a$, и $q_a = q_0(\Psi = \Psi_a)$ – значение коэффициента запаса устойчивости на магнитной оси. $K(\chi^2)$, $E(\chi^2)$, $\Pi(h, \chi^2)$ – полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода, соответственно; $\chi^2 = 2\sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0}/(1 - \sigma/8\kappa^2 + \sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0})$, $h = 2\sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0}/(1 + \sqrt{1 - \tilde{\Psi}_0})$.

В дальнейшем давление плазмы считается равным нулю на граничной магнитной поверхности при $\Psi_0(R = R_a + a, z = 0) = \Psi_b = 0,5\Psi_a$. Разница между положением магнитной оси, R_a , и большим радиусом, R_0 , соответствует смещению Шафранова, $\Delta = R_a - R_0$. При $R_0/a = 3$, $q_a = 1$, $\kappa = 1$, $\sigma = 0,5$ и $\Delta/R_0 = 0,09$ коэффициент запаса устойчивости растёт от $q_a = 1$ на магнитной оси токамака до $q_b = q_0(\Psi_b) = 2,02$ на границе плазмы. В представленных ниже расчётах использованы эти значения основных параметров.

В полярных координатах $\{r, \theta\}$ выражение (1.35) записывается как

$$\begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_a \left\{ 1 - 2\frac{r^2}{R_a^2} \left(1 + \kappa^2 - \frac{\sigma}{8} \right) - \frac{1}{2} \frac{r^4}{R_a^4} \left(\frac{3}{4} + \kappa^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{r^3}{R_a^3} (3 + 2\kappa^2) \cos \theta - 2\frac{r^2}{R_a^2} \left(1 - \kappa^2 + \frac{\sigma}{8} + \frac{1}{4} \frac{r^2}{R_a^2} \right) \cos 2\theta - \right. \\ \left. - \frac{r^3}{R_a^3} (1 - 2\kappa^2) \cos 3\theta - \frac{1}{8} \frac{r^4}{R_a^4} (1 - 4\kappa^2) \cos 4\theta \right\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Теперь применим общее выражение (1.34) к базовому осесимметричному равновесию (1.36), чтобы рассчитать его трёхмерную модификацию. Имеем

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_0 - 2\varepsilon\Psi_a \frac{r}{R_a} \left\{ (c_0 \cos \varphi + s_0 \sin \varphi) \frac{r}{R_a} \frac{R_0}{R_a} (3 + 2\kappa^2) + \right. \\ \left. + \cos(\varphi - \theta) \left[2c_0 \frac{R_0}{R_a} + 2s_1 \left(\frac{\sigma}{8} - \kappa^2 \right) + \right. \right. \\ \left. + \frac{r^2}{R_a^2} \left(c_0 \frac{R_0}{R_a} \left(\frac{3}{4} + \frac{\kappa^2}{2} \right) + \frac{3}{4} s_1 \right) \right] + \cos(\varphi - 2\theta) \frac{r}{R_a} \times \\ \left. \times \left[c_0 \frac{R_0}{R_a} \left(\frac{3}{2} - \kappa^2 \right) + s_1 \left(1 - 3\kappa^2 + \frac{\sigma}{8} + \frac{r^2}{4R_a^2} \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(\varphi - 3\theta) \frac{r^2}{R_a^2} \left[c_0 \frac{R_0}{R_a} \left(\frac{1}{4} - \frac{\kappa^2}{2} \right) + s_1 \left(\frac{3}{4} - 2\kappa^2 \right) \right] + \\
& + \cos(\varphi - 4\theta) \frac{r^3}{R_a^3} \frac{s_1(1 - 4\kappa^2)}{8} + \dots \Big\}. \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Для краткости здесь выписаны только гармоники $\sim \cos(\varphi - m\theta)$, $m = 1 \div 4$, ... обозначает оставшиеся гармоники $\sim \cos(\varphi + m\theta)$ и $\sim \sin(\varphi \pm m\theta)$. Коэффициенты при $\cos(\varphi + m\theta)$ отличаются от коэффициентов при $\cos(\varphi - m\theta)$ знаком перед постоянной s_1 . Коэффициенты при $\sin(\varphi \pm m\theta)$ следуют из коэффициентов при $\cos(\varphi \pm m\theta)$ при замене c_0 на s_0 и s_1 на $-c_1$.

Выражение (1.37) содержит набор винтовых гармоник от $n = 1$, $m = 0$ до $n = 1$, $m = 4$, амплитуды которых связаны как друг с другом, так и с параметрами базового равновесия. Асимметричная часть равна нулю на магнитной оси. Вблизи магнитной оси $\Psi \approx \Psi_0 - 8\varepsilon\Psi_a r/R_a \{\cos\varphi[c_0 R_0/R_a \cos\theta - c_1(\kappa^2 - \sigma/8) \sin\theta] + \sin\varphi[s_0 R_0/R_a \cos\theta - s_1(\kappa^2 - \sigma/8) \sin\theta]\}$: доминирует $n = 1$, $m = 1$ гармоника возмущений. Несмотря на наличие потенциально резонансных магнитных поверхностей с $q_0 = m/n$, структура Ψ является гладкой всюду внутри объёма плазмы.

Тороидальная асимметрия полученной равновесной конфигурации хорошо видна на рис. 1.9, на котором показаны линии уровня функции Ψ , заданной уравнением (1.37), в различных тороидальных сечениях. Используются следующие значения параметров: $\varepsilon = 0,4$, $c_0 = c_1 = 0,3$, $s_0 = s_1 = 0$. Поскольку в представленном примере от нуля отличны только $\sim \cos\varphi$ возмущения, в поперечном сечении $\varphi = \pi/2$ (рис. 1.9б) линии уровня функции Ψ совпадают с линиями уровня базовой конфигурации Ψ_0 .

Трёхмерная деформация граничной магнитной поверхности показана на рис. 1.10. Синяя линия отражает динамику силовой линии магнитного поля на поверхности, а красная линия — плотности тока. Поскольку условие $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi$ выполняется тождественно представлением (1.7), силовая линия идеально лежит на 3D поверхности.

1.1.5 Гипотеза Грэда и логика используемых приближений

Полученные явные примеры гладких невырожденных равновесных конфигураций трёхмерной плазмы с несимметричными вложенными

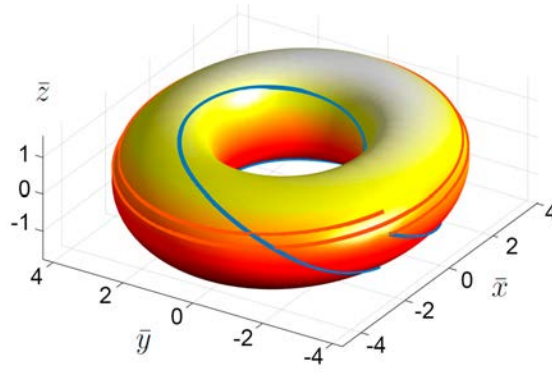


Рис. 1.10: Трёхмерный вид граничной магнитной поверхности $\Psi = \Psi_b$ в асимметричном равновесии, рассчитанном по (1.37) при $c_0 = c_1 = 0,3$, $s_0 = s_1 = 0$, $\varepsilon = 0,4$. Здесь $\bar{x} = R \cos \varphi/a$, $\bar{y} = R \sin \varphi/a$, $\bar{z} = z/a$. Синяя линия – силовая линия магнитного поля, красная линия – линия тока, совершающие два оборота вокруг тора.

магнитными поверхностями опровергают гипотезу Грэда об *отсутствии гладких самосогласованных равновесий без очень больших локализованных токов, патологических профилей давления или неизбежных нестационарных движений* [143]. Это и подобные утверждения о “несуществовании” вытекают из неверных предсказаний, основанных на специфических особенностях плоских и цилиндрических моделей, которые не подходят для рассмотрения равновесия трёхмерной плазмы.

Конфигурации с истинными магнитными поверхностями существуют. Силовые линии, лежащие на истинных магнитных поверхностях имеют равные приведённые длины, что обеспечивает выполнение условия замыкания тока. В таких системах не возникают резонансы, поэтому нет необходимости в искусственном уплощении профиля давления плазмы вблизи рациональных магнитных поверхностей, что обычно используется при численном моделировании для избежания особенностей на плотности тока.

Некорректность логики, приведшей к гипотезе Грэда, в значительной степени проистекает из использования для её обоснования плоских или цилиндрических моделей, специфика которых, как теперь ясно, заведомо не позволяет получить адекватного суждения о существовании равновесных конфигураций с истинными магнитными поверхностями. Присущая этим моделям дополнительная симметрия делает вывод такого суждения принципиально невозможным. И в этом нет ничего удивительного, поскольку наличие любой симметрии

в физической системе имеет принципиальное значение для свойств этой системы – как локальных, так и глобальных.

Помимо отказа от некорректно упрощённых моделей, удобным инструментом стало расширенное “смешанное” представление для магнитного поля (1.7), позволяющее описывать 3D равновесные плазменные конфигурации с помощью системы связанных УрЧП (1.11)–(1.13) для трёх скалярных функций: Ψ , F и G . В отличие от вырожденного случая осевой симметрии функции F и G существенно не являются функциями 3D магнитных поверхностей, т. е. $F \neq F(\Psi)$, $G \neq G(\Psi)$. “Отмораживание” функций от магнитных поверхностей происходит из-за эффектов асимметрии, в частности, для F – из-за тороидальной неоднородности полного давления плазмы и магнитного поля. Аналогичная ситуация имеет место в движущейся [138–142], анизотропной [135, 143–146], холловской и мультикомпонентной плазме [150–152], для которых также известны модификации УГШ. При этом давление плазмы, как и в осесимметричном случае, постоянно на магнитной поверхности, $p = p(\Psi)$.

Преимущества используемого описания вполне очевидны:

- Магнитное поле и уравнения равновесия записаны в “лабораторной системе отсчёта”, как и в классическом УГШ. Задача о равновесии сформулирована как краевая задача в реальном пространстве, при этом не используется формализм потоковых координат с выпрямленными силовыми линиями, который может быть практически разработан только в том случае, если магнитная конфигурация уже известна [158].
- Описание универсально; никаких ограничений на магнитную топологию априори не предполагается. Допустимы конфигурации как с вложенными магнитными поверхностями, так и с магнитными островами.
- Решения уравнений (1.11)–(1.13), если найдены, обеспечивают необходимое и достаточное условия равновесия плазмы, т. е. баланс сил в каждой точке пространства.

Продуктивность подхода продемонстрирована на примере найденных решений в виде независимых тороидальных гармоник, что приемлемо для описания слабо асимметричных плазменных конфигураций. Осевая симметрия в токамаках может быть слабо нарушена рип-

лами магнитного поля [195,196], резонансными магнитными возмущениями (Resonant Magnetic Perturbations – RMPs), из-за воздействия катушек для подавления ЭЛМов и пассивных 3D катушек [197–200], или внутренней МГД-активностью [201, 202]. Все эти явления могут быть описаны на основе слабо асимметричных равновесий. В результате нарушения симметрии в токамаке могут возникать цепочки магнитных островов и/или эргодические области, которые могут играть негативную роль для удержания плазмы. Поэтому важно иметь понимание того, существует ли возможность достижения равновесия плазмы со вложенными магнитными поверхностями даже при отсутствии точной симметрии.

Отметим, что хотя в представленном анализе использовалась теория возмущений, все возможные особенности решений, связанные с появлением резонансов, в полной мере проявляются уже в линеаризованных уравнениях. Резонансы не являются спецификой нелинейности, а возникают из-за структуры МДУ (1.12), (1.13) и “возбуждаются” уже в первом порядке. Именно на примерах возмущённых решений (винтовой пинч с винтовыми возмущениями) сам Грэд в [68] и его последователи обосновывают гипотезу об отсутствии гладких решений уравнений равновесия. В этом смысле представленные решения, гладкие в главном порядке, являются прямыми контрпримерами к гипотезе Грэда.

В модели цилиндрического винтового плазменного пинча, которая обычно используется для описания влияния полей RMP на равновесие плазмы в токамаках, линеаризованная задача сводится к равновесию двух независимых спирально-симметричных возмущений $\sim \cos(n\varphi \pm kz)$, каждое из которых резонирует с основным магнитным полем на резонансной магнитной поверхности с $q_{cyl}(R) = \pm n/kR_0$. Используя эту модель, невозможно найти гладкие решения задачи о равновесии при конечном градиенте давления плазмы. Физически это является результатом двойного вырождения базового решения, связанного с наличием двух пространственных симметрий в исходной системе: трансляционной (вдоль z) и осевой (вдоль φ). Этот вывод подтверждён с использованием в качестве базовой конфигурации гофрированного цилиндра с $\Psi_0 = \Psi_0(R, z)$. В отсутствие трансляционной симметрии гладкое трёхмерное цилиндрическое решение существует, несмотря на наличие “резонансных” магнитных поверхностей с конечным градиентом давления плазмы.

Следует отметить, что в аналитически построенном классе равновесных плазменных конфигураций токамака с истинными магнитными поверхностями тороидальной топологии форма результирующих трёхмерных магнитных поверхностей с нарушением осевой симметрии $n = 1$ (1.34) определяется ограниченным набором коэффициентов, что также относится и к границе плазмы. Это означает, что в эксперименте желательно иметь возможности коррекции границы плазмы: неправильно установленная граница не обеспечит истинных магнитных поверхностей внутри объёма плазмы, а приведёт к появлению магнитных островов.

1.2 Одножидкостная МГД-модель плазмы со стационарными течениями

Макроскопические плазменные потоки в виде шировых течений оказывают существенное воздействие как на равновесное состояние плазмы, так и на эволюцию его возмущений, определяющую в конечном счёте уровень турбулентного переноса, что требует учёта инерционных поправок при построении моделей рассматриваемых МГД-явлений.

При анализе низкочастотных волн в токамаке весьма продуктивным оказывается использование редуцированных МГД-моделей плазмы, в которых заведомо исключены высокочастотные колебания типа быстрого магнитного звука. Так, для случая статического осесимметричного равновесия в [203] была разработана МГД-модель, позволяющая описывать спектр низкочастотных волн в реальной тороидальной геометрии токамака посредством двух уравнений в частных производных второго порядка. Эти уравнения учитывают зацепление шировых альфвеновских волн со звуковыми, зависящее от кривизны и давления удерживаемой плазмы. Вращение плазмы способно заметно влиять на спектр колебаний за счёт доплеровского смещения, центробежного и кориолисова эффектов, и даже приводить к появлению новых ветвей колебаний, в том числе, неустойчивых. При этом формализм математического описания волн в плазме с течениями гораздо сложнее, чем в статической плазме, как ввиду неэффективности использования традиционного энергетического принципа для анализа устойчивости спектра колебаний вращающейся плазмы, так и ввиду усложнения описания исходного равновесного состояния плазмы. Далее механизм построения редуцированных моделей низкочастот-

ных волн распространён на вывод уравнений глобальных собственных мод в токамаке с тороидальным вращением плазмы.

1.2.1 Исходные МГД-уравнения

Для описания динамики сильностолкновительной плазмы используем стандартную модель идеальной одножидкостной МГД:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}], \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (1.40)$$

Здесь ρ – массовая плотность плазмы, $\mathbf{v}$ – скорость плазмы, $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{B} / 4\pi$ – плотность тока, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ – конвективная производная. Уравнение (1.38) есть уравнение движения, (1.39) – уравнение непрерывности, (1.40) – закон Фарадея.

Для замыкания система (1.38)–(1.40) должна быть дополнена уравнением, описывающим динамику давления, в качестве которого обычно используют уравнение адиабаты с показателем Γ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\Gamma} \right) = 0. \quad (1.41)$$

1.2.2 Равновесие плазмы со стационарным течением

Динамическое равновесие системы (1.38)–(1.41) со стационарным тороидальным вращением $\mathbf{V} = R^2 \Omega(\Psi) \nabla \varphi$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial p}{\partial R} \right)_\Psi = \rho R \Omega^2, \quad (1.42)$$

характеризующем полоидальную неоднородность давления плазмы, связанную с действием центробежной силы, и аналогом уравнения Грэда–Шафранова (1.4) для функции Ψ в движущейся плазме [138–142]:

$$\Delta^* \Psi + 4\pi R^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \Psi} \right)_R + F \frac{dF}{d\Psi} = 0, \quad (1.43)$$

отличающимся от обычного УГШ лишь частной производной давления по Ψ при $R = \text{const}$; при этом, как и в статике, $F = F(\Psi)$. Постоянство угловой частоты тороидального вращения, Ω , на магнитных поверхностях следует из условия замороженности магнитного поля в плазму (1.40). При выводе (1.42), (1.43) для равновесного магнитного поля использовалось смешанное представление (1.3).

Удовлетворить уравнению (1.42) возможно, рассматривая класс равновесий плазмы, подчиняющихся соотношению:

$$\frac{p}{\rho^\alpha} = S(\Psi), \quad (1.44)$$

где $S = S(\Psi)$, $\alpha = \alpha(\Psi)$ – некоторые поверхностные функции. Варьирование параметра α позволяет рассматривать различные типы равновесий движущейся плазмы [204].

Так, при $\alpha = \Gamma$ уравнение (1.44) описывает равновесие с изоэнтропными магнитными поверхностями, при этом из (1.42) следует, что давление и массовая плотность плазмы связаны соотношением

$$\frac{p}{\rho} = H(\Psi) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(\frac{\Omega^2 R^2}{2} \right), \quad (1.45)$$

где $H(\Psi)$ – удельная энтальпия в отсутствие вращения.

Условие $\alpha \rightarrow \infty$ описывает поверхности постоянной плотности $\rho = \rho(\Psi)$, при этом из уравнения состояния идеального газа, $p = \rho T$, следует, что

$$T = T_0(\Psi) + \frac{\Omega^2 R^2}{2},$$

где функция $T_0(\Psi)$ характеризует температуру в отсутствие вращения плазмы.

При $\alpha = 1$ магнитные поверхности являются изотермическими $T = T(\Psi)$, а полоидальная неоднородность плотности описывается выражением:

$$\rho = \rho_0(\Psi) \exp \left(\frac{\Omega^2 R^2}{2T} \right).$$

Таким образом, с применением вышеописанной параметризации равновесное состояние тороидально-вращающейся плазмы задаётся посредством четырёх функций магнитных поверхностей: полоидального тока, $F(\Psi)$, угловой частоты тороидального вращения, $\Omega(\Psi)$, и двух функций, характеризующих термодинамическое состояние системы: $\rho(\Psi)$ и $T_0(\Psi)$ при $\alpha \rightarrow \infty$, $\rho_0(\Psi)$ и $T(\Psi)$ при $\alpha = 1$, $S(\Psi)$ и $H(\Psi)$ при $\alpha = \Gamma$.

1.2.3 МГД-модель крупномасштабных низкочастотных волн в токамаке с тороидальным вращением плазмы

Представим вывод системы общих редуцированных уравнений, пригодных для описания крупномасштабных (с радиальной длиной волны порядка размера системы) низкочастотных колебаний в тороидально-вращающейся плазме токамака [106].

Рассмотрим малые возмущения равновесного состояния плазмы (1.42), (1.43), описываемые в терминах лагранжева смещения элемента плазмы $\boldsymbol{\xi}$ уравнением Фримана-Ротенберга [205] в виде¹¹:

$$\begin{aligned} -\rho\bar{\omega}^2\boldsymbol{\xi} - 2i\rho\bar{\omega}\Omega[\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\xi}] + \operatorname{div} \left(\frac{\rho\Omega^2}{2}\boldsymbol{\xi} \right) \nabla R^2 = \nabla(\boldsymbol{\xi} \nabla p + \Gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + \\ + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} [[\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}]]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Здесь $\mathbf{e}_z = \nabla z$ – единичный вектор вдоль оси цилиндрической системы координат, $\bar{\omega} = \omega + n\Omega$ – частота возмущения в локальной системе координат, вращающейся с плазмой.

Рассмотрим низкочастотные возмущения, частота которых такова, что

$$\omega \sim \epsilon \frac{c_A}{a},$$

где $\epsilon \ll 1$ – малый параметр, в качестве которого используется обратное аспектное отношение токамака, c_A – альфвеновская скорость. Такое предположение позволяет отделить характерные частоты альфвеновских возмущений от быстрых (высокочастотных) магнитозвуковых волн. Будем полагать, что для возмущённых величин $\nabla_\perp \sim 1/a$, $\nabla_\parallel = \mathbf{B} \cdot \nabla / B \sim \epsilon/a$. Для сохранения общности на данном этапе будем полагать, что давление плазмы может быть относительно велико, $\beta \sim \epsilon$. Кривизна магнитных силовых линий при этом мала как

$$\kappa \equiv \frac{1}{B} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B^2} \left(\nabla_\perp (4\pi p + B^2/2) - \frac{4\pi\rho\Omega^2}{2} \nabla_\perp R^2 \right) \sim \frac{\epsilon}{a}.$$

Тогда в приближении большого аспектного отношения токамака из уравнения (1.46) следует, что

$$B'_\parallel \sim \epsilon(\xi B/a), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_\perp \sim \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \sim \epsilon(\xi/a), \quad BB'_\parallel - 4\pi \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p \sim \epsilon^2(\xi B^2/a).$$

¹¹Уравнение (1.46) следует из системы (1.38)–(1.41) при подстановке $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{V})$ для малых возмущений, пропорциональных $\exp(-i\omega t - in\varphi)$, ω – частота возмущений

Сделанные оценки показывают, что для рассматриваемых возмущений смещение плазмы может быть описано в терминах продольного смещения ζ/B и электрического потенциала ϕ' ($\mathbf{E}_\perp = (i\bar{\omega}/c)\nabla\phi'$):

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{B^2}\mathbf{B} \times \nabla\phi' + \frac{\zeta}{B^2}\mathbf{B}. \quad (1.47)$$

Здесь и далее штрихом отмечены возмущённые величины.

Умножая скалярно уравнение (1.46) на $\mathbf{B}$ с подстановкой $\boldsymbol{\xi}$ в виде (1.47), имеем

$$\begin{aligned} \rho\bar{\omega}^2\zeta + \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\rho c_s^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\zeta}{B^2} \right) \right) + i\bar{\omega} \frac{\rho\Omega}{RB} [\mathbf{B} \times \nabla\phi'] \cdot \nabla R^2 + \\ + \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ [\mathbf{B} \times \nabla\phi'] \cdot \left(\rho c_s^2 \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) + \frac{\rho\Omega^2}{2B^2} \nabla R^2 \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где $c_s = (\Gamma p/\rho)^{1/2}$ – скорость звука.

В качестве второго уравнения используем условие квазинейтральности возмущений, $\text{div} \mathbf{j}' = 0$, сводящееся к

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{B^2} \text{div} \left[B^2 \nabla \left(\frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla\phi' \right) \right] \right\} + 4\pi \text{div} \left\{ \frac{\rho\bar{\omega}^2}{B^2} \nabla\phi' + \right. \\ + \frac{[\mathbf{B} \times \nabla R^2]}{B^2} \left[\frac{i\rho\bar{\omega}\Omega}{RB} \zeta + \frac{[\mathbf{B} \times \nabla\phi']}{B^2} \cdot \left(\nabla \left(\frac{\rho\Omega^2}{2} \right) - \rho\Omega^2 \boldsymbol{\kappa} \right) + \right. \\ + \left. \frac{\rho\Omega^2}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\zeta}{B^2} \right) \right] - \frac{2[\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}]}{B^2} \left[\frac{[\mathbf{B} \times \nabla\phi']}{B^2} \cdot (\nabla p - 2\rho c_s^2 \boldsymbol{\kappa}) + \right. \\ + \left. \left. \rho c_s^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\zeta}{B^2} \right) \right] + \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})}{cB^2} \mathbf{B} \times \nabla \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\phi'}{B^2} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Уравнения (1.48), (1.49) для функций ϕ' и ζ служат основой используемой редуцированной модели для описания низкочастотных волн в токамаке со стационарным тороидальным течением. В отсутствие вращения система (1.48)–(1.49) сводится к уравнениям, полученным ранее в работе [206] для случая статической плазмы. Наряду с эффектами кривизны и вращения плазмы модель включает источники винтовой, желобковой и баллонной неустойчивостей.

Представленные уравнения будут использоваться далее в главе 2 для исследования крупномасштабных волн в токамаке с тороидальным вращением плазмы.

1.3 Двухжидкостная модель частично замагниченной плазмы в скрещенных полях

В частично замагниченной плазме в относительно слабом магнитном поле, таком что $\rho_i \gg d$, а $\rho_e \ll d$, где ρ_i и ρ_e – ионный и электронный ларморовский радиус, соответственно, а d – характерная длина установки, влияние магнитного поля на ионы пренебрежимо мало. В то же время замагниченные электроны эффективно удерживаются магнитным полем, а их движение преимущественно сводится к дрейфу в поперечном направлении. В ситуации, когда движение ионной и электронной компонент плазмы существенным образом различается, необходимо использовать двухжидкостные модели плазмы [207], явным образом учитывающие электрическое поле в уравнениях движения для каждой из заряженных компонент.

Режимы с частично замагниченной плазмой характерны, в частности, для ускорителей холловского типа, величина магнитного поля в которых в зависимости от конструкции варьируется в пределах $B = 0,1 - 1$ кГс. В качестве рабочего вещества используются инертные газы, обычно ксенон или криптон, обладающие достаточно низкой энергией ионизации. Ионизованные атомы в типичных режимах работы холловских двигателей обладают сравнительно низкой температурой $T_i \sim 1$ эВ, тогда как температура электронов, T_e , достигает 20–30 эВ вблизи выхода из ускоряющего канала. Концентрация заряженных частиц в ускоряющем канале составляет порядка $\sim 10^{12}$ см³. При таких параметрах холловскую плазму в ряде практически важных случаев можно рассматривать как бесстолкновительную [208].

Далее в главе представлена модель двухкомпонентной плазмы с замагниченными электронами и незамагниченными ионами, используемая в диссертации для описания волновых процессов в плазменных разрядах холловского типа. В модель включены эффекты конечной температуры электронов, важность которых проявляется не столько при описании равновесного состояния плазмы, сколько при анализе устойчивости её колебаний, а именно, устойчивости коротковолновой части спектра электростатических мод [209].

1.3.1 Исходные уравнения двухжидкостной модели

Для описания динамики плазмы с замагниченными электронами и незамагниченными ионами во внешних скрещенных электрическом и

магнитном полях будем использовать следующую систему моментных двухжидкостных уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i = \frac{Z_i e}{m_i} \mathbf{E}, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e = & -\frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right) - \frac{\nabla p_e}{m_e n_e} - \\ & - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e}{m_e n_e}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (1.53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e (Z_i n_i - n_e). \quad (1.54)$$

Здесь нижние индексы i и e обозначают ионную и электронную компоненты плазмы, соответственно, $\mathbf{v}_{i,e}$ – скорость, $n_{i,e}$ – концентрация, $m_{i,e}$ – масса частиц, e – элементарный заряд, Z_i – зарядовый номер ионов.

Уравнения (1.51) и (1.53) есть уравнения непрерывности для ионной и электронной компонент плазмы, соответственно. В уравнении движения ионов (1.50) отсутствует сила Лоренца ввиду их незамагниченности. Также предполагается, что ионы холодные и их давлением можно пренебречь. В уравнении движения для электронов (1.52) тепловые эффекты учитываются через градиенты давления p_e и тензора бесстолкновительной вязкости $\boldsymbol{\pi}_e$ [210, 211]. Температура электронов $T_e = p_e/n_e$ считается однородной и постоянной. Для замыкания системы уравнений используется уравнение Пуассона (1.54).

Для дальнейшего анализа воспользуемся явным выражением для градиента тензора бесстолкновительной вязкости $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e$ в криволинейном неоднородном магнитном поле, полученным в [212] (формула (28) с заменой положительного заряда на отрицательный):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e = & -m_e n_e (\mathbf{U}_{*e} \cdot \nabla) \mathbf{v}_e + \nabla \left(\frac{p_e}{2\omega_{Be}} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) - 2(\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{a}}{B} + \\ & + \nabla \times \left\{ \frac{p_e}{2\omega_{Be}} [2(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_e + (\nabla \cdot \mathbf{v}_e - 3\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_e) \mathbf{b}] \right\}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

где

$$\mathbf{U}_{\star e} = \frac{1}{m_e n_e} \nabla \times \left(\frac{p_e}{\omega_{Be}} \mathbf{b} \right), \quad (1.56)$$

$$\mathbf{a} = \frac{p_e}{2\omega_{Be}} \left\{ \mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} + 3(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_e] + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} \right\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}_e,$$

$\omega_{Be} = eB/m_e c$ – электронная циклотронная частота.

Подставляя выражение (1.55) в уравнение движения электронов (1.52), приходим к следующему уравнению

$$\begin{aligned} & m_e n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_e - \mathbf{U}_{\star e}) \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_e + \\ & + \nabla \times \left\{ \frac{p_e}{2\omega_{Be}} [2(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_e + (\nabla \cdot \mathbf{v}_e - 3\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_e) \mathbf{b}] \right\} = \\ & = -en_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \right) - \nabla \left(p_e + \frac{p_e}{2\omega_{Be}} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \\ & + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left[\frac{p_e}{B\omega_{Be}} \left\{ \mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} + 3(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_e] + \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b})}{2} \mathbf{b} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.57)$$

Далее будем предполагать, что давление плазмы мало. Тогда из уравнения (1.56) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\star e} &= \mathbf{V}_P - \mathbf{V}_D, \quad \mathbf{V}_P = \frac{cT_e}{eB^2} [\nabla \ln n_e \times \mathbf{B}], \\ \mathbf{V}_D &= \frac{2cT_e}{eB^2} [\nabla \ln B \times \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Для относительно медленных процессов в плазме, характерное время которых значительно превышает обратную циклотронную частоту, уравнение (1.57) может быть решено разложением по степеням ω_{Be}^{-1} .

В главном порядке из уравнения (1.57) следует, что

$$\mathbf{v}_e^{(0)} = \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_P, \quad \mathbf{V}_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (1.59)$$

В следующем порядке учитываются эффекты гирвязкости и инерции электронов. Для строго поперечного (по отношению к магнитному полю) движения плазмы и в пренебрежении всеми неоднородностями вдоль магнитного поля из уравнения (1.57) следует

$$\mathbf{v}_e^{(1)} = \frac{1}{\omega_{Be} B} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_D) \cdot \nabla \right] \mathbf{v}_e^{(0)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{m_e n_e} \nabla \times \left(\frac{p_e}{2\omega_{Be}} (\nabla \cdot \mathbf{v}_e^{(0)}) \frac{\mathbf{B}}{B} \right) + \\
& + \frac{1}{m_e n_e} \nabla \left(\frac{p_e}{2\omega_{Be} B} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_e^{(0)}) \right) \Big\} \times \mathbf{B}. \quad (1.60)
\end{aligned}$$

Для воспроизведения известного эффекта “сокращения диамагнитного дрейфа”¹² первое слагаемое в правой части уравнения (1.60) упрощено с учётом уравнений (1.58) и (1.59). В отличие от случая прямого однородного магнитного поля в оператор конвективной производной в (1.60) наряду со скоростью электрического дрейфа $\mathbf{V}_E$, входит скорость градиентного дрейфа электронов $\mathbf{V}_D$.

Подстановка выражений (1.59), (1.60) в уравнение непрерывности электронов (1.53) даёт

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_E \cdot \nabla \right) n_e - 2n_e (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_P) \cdot \nabla \ln B + \\
& + \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{n_e T_e}{m_e \omega_{Be}^2} (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_P) \cdot \nabla \ln B \right) - \frac{1}{m_e \omega_{Be} B} \times \\
& \times \left\{ \nabla \left(\frac{n_e T_e}{\omega_{Be} B} \nabla \cdot ((\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_P) \times \mathbf{B}) \right) \times \mathbf{B} \right\} \cdot \nabla \ln B + \nabla \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{n_e}{\omega_{Be} B} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_D) \cdot \nabla \right) (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_P) \right] \times \mathbf{B} \right\} = 0. \quad (1.61)
\end{aligned}$$

Уравнения (1.50), (1.51), (1.54) и (1.61) составляют замкнутую систему уравнений двухкомпонентной плазмы [209], которая будет использоваться далее в главе 3 для исследования поперечных волн в частично замагниченной плазме в скрещенных полях.

1.3.2 Равновесие двухкомпонентной плазмы в скрещенных полях

Для описания ключевых закономерностей волновых процессов в частично замагниченной плазме используем упрощённую геометрию скрещенных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ полей. Введём декартову систему координат $\{X, Y, Z\}$ с осью X вдоль магнитного поля, осью Y в периодическом “азимутальном” направлении, и осью Z вдоль внешнего электрического поля (оно же направление неоднородности плазмы): $\mathbf{E} =$

¹²gyroviscous cancellation в англоязычной литературе

$-\nabla\Phi(Z) = E(Z)\mathbf{e}_Z$ (Φ – электростатический потенциал плазмы). Предполагается, что поле $\mathbf{B} = B_Z(X, Z)\mathbf{e}_Z + B_X(X, Z)\mathbf{e}_X$ и $B_X \gg B_Z$, так что $B = (B_X^2 + B_Z^2)^{1/2} \approx |B_X|$ и оно преимущественно зависит от Z .

Применительно к конфигурации стационарного плазменного двигателя с преимущественно радиальным магнитным полем локальная координата X направлена по радиусу ($X = R$), координата Z – вдоль оси ускорителя ($Z = z$), а координата Y – в азимутальном направлении ($Y = \varphi$). В конфигурации магнетронного типа с аксиальным магнитным и радиальным электрическим полем координата X направлена по оси, координата Z является радиальной, а Y – азимутальной.

В стационаре в рассматриваемой конфигурации замагниченные электроны вращаются в азимутальном направлении Y с дрейфовой скоростью:

$$\mathbf{v}_e = (V_E + V_P)\mathbf{e}_Y, \quad V_E = -\frac{c}{B}E, \quad V_P = -\frac{cT_e}{eB} \frac{d \ln n_e}{dZ}.$$

Ионы при этом ускоряются баллистически, т. е. согласно уравнению (1.50) их скорость $\mathbf{v}_i = v_i(Z)\mathbf{e}_Z$ определяется распределением потенциала внешнего электрического поля:

$$v_i \frac{dv_i}{dZ} = -\frac{Z_i e}{m_i} \frac{d\Phi}{dZ}. \quad (1.62)$$

Неоднородность плотности плазмы рассчитывается из уравнения непрерывности ионов (1.51) $n_i(Z)v_i(Z) = \text{const}$:

$$\frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dZ} = -\frac{1}{v_i} \frac{dv_i}{dZ} \equiv \frac{V_E \omega_{Bi}}{v_i^2}, \quad (1.63)$$

где $\omega_{Bi} = Z_i e B / m_i c$ – ионная циклотронная частота, и в конечном счёте определяется напряжённостью приложенного электрического поля. Устойчивость рассматриваемого стационарного состояния плазмы исследовалась в [213].

Здесь важно отметить, что экспериментальные данные с различных установок холловского типа указывают на то, что условие $n_i(Z)v_i(Z) = \text{const}$ фактически не реализуется в экспериментах, особенно вблизи выхода из ускоряющего канала, что преимущественно связано с процессами ионизации и расходимостью ионного пучка [214]. Поэтому далее не будем ограничивать рассматриваемые равновесные состояния связью (1.63), а будем лишь полагать, что в стационаре ионы движутся вдоль электрического поля со скоростью v_i ,

электроны дрейфуют в направлении Y , совпадающем с направлением симметрии системы, а плазма неоднородна по Z и квазинейтральна, $n_i = n_e$.

1.3.3 Осевые профили равновесных параметров плазмы в стационарном плазменном двигателе

Разряды в современных холловских двигателях характеризуются схожими распределениями основных физических величин $B(z)$, $n_e(z)$, $\Phi(z)$, $T_e(z)$ вдоль оси ускорителя, маркируемой координатой z , [53, 215, 216]. В классической конфигурации холловского двигателя, например, СПД с протяжённой зоной ускорения (длина d которой значительно превышает величину ларморовского радиуса электронов, $d \gg \rho_e$) магнитное поле $B(z)$ растёт от анода ($z = 0$) к катоду и достигает максимального значения B_m на выходе из ускоряющего канала ($z = d$). Профили плотности и температуры плазмы, $n_e(z)$ и $T_e(z)$, имеют схожую с профилем магнитного поля форму, однако их максимумы смещены к центру ускоряющего канала. Отметим,

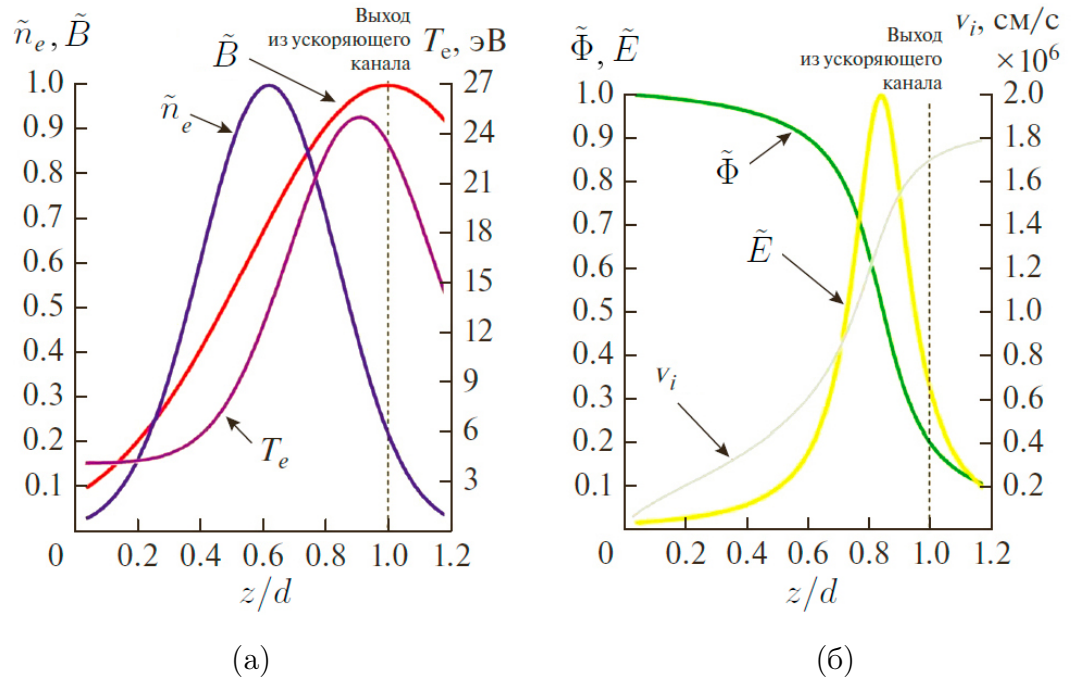


Рис. 1.11: Профили (а) магнитного поля $\tilde{B} = B(z)/B_m$, концентрации плазмы $\tilde{n}_e = n_e(z)/n_m$ и температуры электронов $T_e(z)$; (б) электрического потенциала $\tilde{\Phi} = \Phi(z)/\Phi_m$, электрического поля $\tilde{E} = E(z)/E_m$ и скорости ионов $v_i(z)$ как функции координаты вдоль оси системы z/d в СПД. Здесь индексом m обозначены максимальные значения соответствующих величин.

что в области, где функция распределения электронов отлична от максвелловской, температура выступает как мера средней кинетической энергии электронов. Типичный вид профилей $B(z)$, $n_e(z)$ и $T_e(z)$ в двигателе семейства СПД представлен на рис. 1.11а [123]. Основное падение электрического потенциала $\Phi(z)$ происходит у выхода из ускоряющего канала, где электрическое поле $E(z) = -d\Phi(z)/dz$ достигает своего максимального значения E_m – рис. 1.11б. На основе представленных профилей в главе 3 будет проведён анализ устойчивости электростатических мод в ускоряющем канале СПД.

1.3.4. Модель электромагнитной конфигурации СПД

Для описания движения заряженных частиц в конфигурации холловского ускорителя необходимо учитывать “двумерность” электромагнитного поля и его радиальную неоднородность. При построении соответствующей модели поля в СПД учтём такую его специфику, как осевую симметрию ($\partial/\partial\varphi=0$), и использование железа в качестве магнитопроводов и полюсов. Будем решать граничную задачу для магнитного потока $\Psi(R, z)$, определяемую уравнением (1.4). Силовые линии магнитного поля лежат на магнитных поверхностях $\Psi(R, z) = \text{const}$: $\mathbf{B} = [\nabla\Psi \times \nabla\varphi]$. Магнитное поле в главном порядке считаем вакуумным, $\mathbf{j} = 0$, тогда уравнение для Ψ имеет вид:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.64)$$

Поскольку силовые линии выходят из магнитопроводов только нормально магнитным полюсам, естественно использовать следующие граничные условия для уравнения (1.64): на поверхности полюсов $\partial\Psi/\partial\bar{n} = 0$ (здесь $\bar{\mathbf{n}}$ – нормаль к поверхности), на поверхности магнитопроводов $\Psi = \text{const}$.

На рис. 1.12 показаны результаты расчёта [116] распределения $\Psi(R, z)$ и осевого профиля модуля магнитного поля, проведённого с использованием пакета FlexPDE [217] при $d = 4$ см, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 6$ см (R_1 , R_2 – внутренний и внешний радиусы ускоряющего канала, соответственно). Видно, что силовые линии возле полюсов направлены практически по радиусу и расходятся вне полюсов. Получается типичная экспериментально наблюдаемая картина распределения магнитного поля в СПД – ср. с рис. 1.11а.

Распределение электрического потенциала в ускоряющем канале

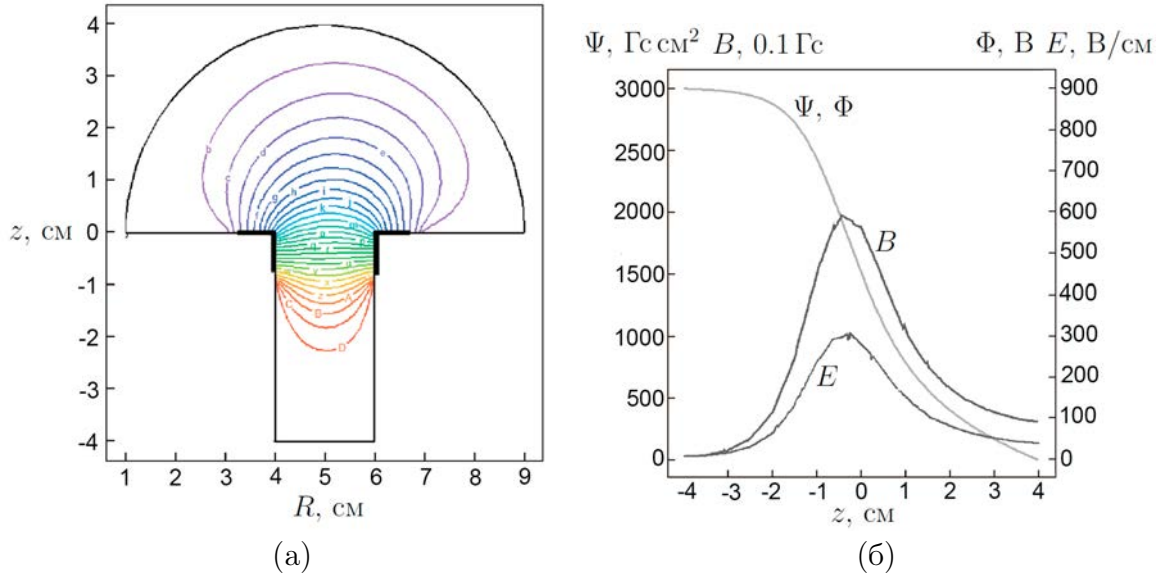


Рис. 1.12: Линии уровня Ψ в модели СПД. Полюса – толстые линии, $\Psi = \text{const}$ на поверхности канала, $\Psi = 0$ на выходной поверхности (имитация свободного пространства) (а); распределения Ψ , модуля магнитного поля B , электрического потенциала Φ и напряжённости электрического поля E вдоль оси ускоряющего канала (б).

определяется условием $\Phi = \Phi(\Psi)$: подвижные электроны выравнивают потенциал вдоль магнитных силовых линий, в результате чего он становится функцией магнитного потока [218, 219]. Выберем линейную функциональную зависимость $\Phi = k\Psi$ (k – константа), исходя из сравнения с литературными данными [53, 215, 216]. Результирующие профили потенциала Φ и электрического поля $E = -\partial\Phi/\partial z$ показаны на рис. 1.12б. Поле характеризуется наличием типичного максимума у выхода СПД – ср. с рис. 1.11б.

Полученные распределения электрического и магнитного полей использованы в главе 4 при анализе особенностей движения электронов в конфигурации стационарного плазменного двигателя.

1.4 Резюме главы 1

Представлены используемые в диссертации гидродинамические модели полностью и частично замагниченной плазмы, допускающие наличие поперечного электрического поля. При наличии осевой симметрии равновесное состояние плазмы в магнитном поле с магнитными поверхностями определяется одним уравнением в частных производных типа УГШ, решаемом при некоторых заданных поверхностных функциях, характеризующих полоидальный ток, стационарное поле

скоростей и термодинамическое состояние плазмы. В “трёхмерном” случае задача о равновесии плазмы сводится к решению аналога УГШ в отсутствие осевой симметрии, дополненного двумя уравнениями, имеющими форму МДУ. Представлены показательные примеры физически допустимых равновесий плазмы в системе тороидально вложенных магнитных поверхностей, описываемых регулярными гладкими функциями.

Глава 2

Низкочастотные колебания и течения в тороидальных системах магнитного удержания плазмы

В главе исследованы низкочастотные колебания электрического потенциала плазмы в токамаке в форме геодезических акустических мод и низкочастотных зональных течений. Проведён анализ влияния формы поверхности плазмы и тороидальной гофрировки магнитного поля на дисперсионные характеристики и пространственную структуру ГАМ. Построены собственные моды глобальных ГАМ и низкочастотных ЗТ, индуцированных тороидальным вращением плазмы, в разрядах как с положительным, так и с отрицательным магнитным широм. Исследовано нелинейное взаимодействие ГАМ с ЗТ, в том числе линейно неустойчивым.

Низкочастотные осесимметричные колебания электрического потенциала плазмы, интерпретируемые как ГАМ, наблюдаются в экспериментах на многих стеллараторах и токамаках, причём как в омических, так и в L -режимах [23, 220–224]. Тороидальность приводит к зацеплению полоидально и тороидально симметричных ($m = 0, n = 0$) колебаний электрического потенциала плазмы на частоте ~ 20 кГц с полоидально асимметричными возмущениями плотности плазмы ($m = \pm 1, n = 0$), что также напрямую регистрируется в экспериментах, например, на токамаках TEXTOR [225] и ФТ-2 [226].

Первоначально ГАМ были предсказаны теоретически в [227] как осесимметричные электростатические моды сплошного спектра. Простейшее выражение для частоты ГАМ, локализованной на магнитной поверхности с коэффициентом запаса устойчивости q , имеет вид

$$\omega_{GAM}^2 = \omega_s^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} \right). \quad (2.1)$$

Здесь $\omega_s = c_s/R_0$ – звуковая частота. Позднее были предложены различные обобщения выражения для сплошного спектра ГАМ

(2.1), учитывающие анизотропию в возмущениях давления плазмы [228, 229], наличие стационарных течений [230–234], высокоэнергичных частиц [235–237] и др. Исследования спектра низкочастотных мод в тороидально вращающейся плазме токамака [230–232, 238–240], а также в плазме с произвольным (тороидальным и полоидальным) вращением [233, 234] позволили выявить помимо обычной ГАМ, сдвинутой по частоте из-за эффекта Доплера, и другие разновидности ГАМ, а также низкочастотные ветки колебаний ЗТ, в том числе, неустойчивые.

Между тем, многие аспекты наблюдаемой динамики низкочастотных флуктуаций плазмы типа ГАМ и ЗТ в токамаке вплоть до недавнего времени не имели удовлетворительного теоретического объяснения. К числу таковых, в частности, относится ограниченная применимость стандартного закона дисперсии ГАМ (2.1), отклонения от которого особенно существенно проявляются на периферии плазмы [18]. Одной из важнейших проблем в теории ГАМ и ЗТ остаётся вопрос о существовании собственных, или глобальных, мод колебаний в плазме токамака. Глобальные моды обладают конечной радиальной шириной и могут реализовываться в качестве дискретных мод в зазорах непрерывного спектра. В отличие от локализованных мод сплошного спектра, собственные моды не испытывают затухания, связанного с перемешиванием фаз колебаний, и потому считается, что именно они могут легко возбуждаться в плазме и существовать в реальных условиях диссипативной среды. Независимость частоты ГАМ от радиуса напрямую наблюдается в экспериментах на токамаках, снабжённых диагностическими средствами локального измерения потенциала плазмы – см., например, [73–77, 223] – что служит прямым доказательством глобальной структуры ГАМ. В экспериментах также наблюдается модуляция амплитуды ГАМ, проявляющаяся в виде расщепления спектрального пика, перемежаемости и всплеск ГАМ [241].

Настоящая глава диссертации посвящена развитию теории геодезических акустических мод и низкочастотных зональных течений с целью интерпретации указанных экспериментальных наблюдений. В разделе 2.1 приведены результаты исследования влияния специфики магнитной конфигурации токамака на дисперсионные характеристики ГАМ в изотропной статической плазме. В разделе 2.2 представлена система уравнений, пригодная для описания глобальных ГАМ и ЗТ в

токамаке при наличии стационарного тороидального вращения плазмы. В разделе 2.3 исследован вопрос формирования глобальных ГАМ. Результаты исследования влияния вращения на условия существования и радиальную структуру глобальных ГАМ и ЗТ представлены в разделе 2.4. Раздел 2.5 посвящён анализу процесса нелинейного взаимодействия ГАМ и ЗТ, индуцированного тороидальным вращением плазмы.

2.1 Влияние магнитной конфигурации токамака на частоту сплошного МГД-спектра ГАМ

Поскольку именно кривизна магнитных силовых линий на магнитной поверхности является необходимым условием для существования ГАМ [111], спектр ГАМ и пространственная структура собственных колебаний оказываются весьма чувствительными к виду равновесной конфигурации магнитного поля.

Важной характеристикой, влияющей на частоту ГАМ в токамаке, является форма магнитных поверхностей, что демонстрируется как в численных расчётах [242–244], так и при экспериментальных измерениях [83, 223]. Аналитическое выражение для частоты локализованных ГАМ в токамаке с вытянутым сечением плазмы и при учёте конечного обратного аспектного отношения впервые было получено в [245] в рамках gyroкинетической модели плазмы без запертых частиц. Позднее в [246, 247] в рассмотрение также были включены эффекты радиальной неоднородности вытянутости плазмы и смещения Шафранова. В гидродинамическом приближении влияние вытянутости плазмы на спектр ГАМ исследовалось в работах [243] и [248] в случае малой вытянутости.

При этом принципиальным вопросом, практически не затронутым теорией, остаётся исследование влияния трёхмерности (осевой асимметрии) магнитного поля на характеристики ГАМ: их дисперсию, пространственную структуру, условия существования и пр. Экспериментальные наблюдения указывают на то, что наличие магнитных поверхностей (не обязательно вложенных) является обязательным условием существования ГАМ. В пристеночном слое плазмы (scrape-off layer – SOL) токамаков, характеризуемом отсутствием магнитных поверхностей (силовые линии замыкаются на стенку), характерные колебания электрического потенциала плазмы не обнаруживаются [221, 249]. Между тем ГАМ присущи островной структуре магнитного

поля – существует понятие ГАМ, индуцированной магнитным островом [250]. Общий вывод, следующий из сопоставления экспериментальных наблюдений ГАМ на токамаках и стеллараторах [251–253], заключается в том, что несмотря на существенные различия в магнитных конфигурациях этих ловушек, характеристики и частотные диапазоны ГАМ на них весьма близки. В рамках кинетического подхода закон дисперсии ГАМ в винтовых системах исследовался в серии работ Ватари и др. [254–257], при этом было получено неявное выражение для квадрата частоты ГАМ, записанное в терминах квадратов Фурье-составляющих напряжённости магнитного поля. Ввиду принципиальной роли неоднородности поля в процессе колебаний существенным эффектом в формировании спектра ГАМ в токамаке может служить тороидальная гофрировка магнитного поля, обусловленная дискретностью магнитных катушек. Хотя амплитуда гофрировки в токамаках как правило мала (порядка нескольких процентов), из-за большого тороидального градиента¹³ эффект гофрировки может быть существенен для ГАМ.

Далее представлено развитие МГД-теории сплошного спектра ГАМ в тороидальной плазме с учётом некруглости формы магнитных поверхностей, конечного обратного отношения установки, а также возможной осевой асимметрии магнитных поверхностей. Рассмотрение проведено с использованием идеальной одножидкостной МГД-модели плазмы (1.38)–(1.41) в электростатическом пределе, в котором пренебрегается возмущениями магнитного поля. В этом же приближении было получено классическое выражение (2.1).

2.1.1 Общая теория радиально локализованных ГАМ сплошного спектра

Временная эволюция осесимметричных ($n = 0$) флуктуаций основных физических величин, характеризующих состояние плазмы в магнитном поле, описывается электростатическим приближением уравнений идеальной одножидкостной МГД (1.38)–(1.41) [227, 258]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.3)$$

¹³номер тороидальной гармоники гофрировки преимущественно определяется числом магнитных катушек

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \Gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (2.5)$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = c \nabla \phi. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) соответствует условию квазинейтральности. Последнее уравнение (2.6) отражает электростатическую природу рассматриваемых возмущений.

В результате процедуры линеаризации вблизи статического равновесия плазмы система (2.2)–(2.6) сводится к виду:

$$-i\omega \rho \mathbf{v}' = -\nabla p' + \frac{1}{c} [\mathbf{j}' \times \mathbf{B}], \quad (2.7)$$

$$-i\omega p' + \Gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla p = 0, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}' = 0, \quad (2.9)$$

$$[\mathbf{v}' \times \mathbf{B}] = c \nabla \phi'. \quad (2.10)$$

Далее используем некоторые общие следствия равновесия плазмы в системе магнитных поверхностей (в общем случае осесимметричных), формализуемых условием $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0$. Из уравнения (2.10), в частности, следует, что возмущение потенциала является функцией магнитной поверхности, $\phi' = \phi'(\Psi)$, и $\mathbf{v}' \cdot \nabla \Psi = 0$. Тогда выражение для возмущённой скорости имеет вид:

$$\mathbf{v}' = \frac{c}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} [\mathbf{B} \times \nabla \Psi] + \frac{v'_{\parallel}}{B} \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

где $v'_{\parallel}$ – возмущение продольной скорости.

Подставляя выражение (2.11) в (2.7), приходим к уравнению

$$-\frac{i\omega \rho c}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} [\mathbf{B} \times \nabla \Psi] - \frac{i\omega \rho v'_{\parallel}}{B} \mathbf{B} = -\nabla p' + \frac{1}{c} [\mathbf{j}' \times \mathbf{B}],$$

из которого следуют выражения для возмущений продольной скорости

$$v'_{\parallel} = -i \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla p'}{\omega \rho B}$$

и плотности поперечного тока

$$\mathbf{j}'_{\perp} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla p'] + \frac{i\omega \rho c^2}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} \nabla \Psi.$$

Исключая $\mathbf{v}'$ из (2.8) с использованием двух следствий силового баланса в состоянии равновесия, $p = p(\Psi)$ и $\text{rot } \mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0$, приходим к уравнению, описывающему связь между колебаниями давления плазмы и электрического поля:

$$\omega^2 p' + \frac{\Gamma p}{\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla p'}{B^2} \right) + i\omega c \Gamma p \frac{d\phi'}{d\Psi} [\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla \frac{1}{B^2} = 0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.9) усредним по магнитной поверхности согласно правилу

$$\langle Y \rangle = \frac{\oint JY(\mathbf{r})d\theta d\varphi}{\oint Jd\theta d\varphi},$$

где Y – некоторая произвольная функция координат, $J = ([\nabla \Psi \times \nabla \varphi] \cdot \nabla \theta)^{-1}$ – якобиан перехода от цилиндрических координат $\{R, \varphi, z\}$ к координатам $\{\Psi, \varphi, \theta\}$, связанным с магнитной поверхностью. С использованием известных тождеств: $\langle \mathbf{B} \cdot \nabla Y \rangle = 0$, $\langle \nabla \Psi \cdot \text{rot } \mathbf{Y} \rangle = 0$ и $\langle \text{div } \mathbf{Y} \rangle = d \langle \mathbf{Y} \cdot \nabla \Psi \rangle / d\Psi$ ($\mathbf{Y}$ – произвольный вектор) и с учётом полученного выражения для плотности поперечного тока уравнение (2.9) сводится к условию

$$\frac{d}{d\Psi} \oint J \left(p' [\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + \frac{i\omega c \rho |\nabla \Psi|^2}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} \right) d\theta d\varphi = 0. \quad (2.13)$$

Рассмотрим радиально локализованные возмущения плазмы, для которых производная собственных функций поперёк магнитной поверхности, $\nabla \Psi \cdot \nabla / |\nabla \Psi|$, значительно превышает их производные вдоль двух других направлений, а также градиенты равновесных физических величин $1/L$:

$$\frac{\nabla \Psi \cdot \nabla}{|\nabla \Psi|} \gg \left(\frac{[\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla}{B |\nabla \Psi|}; \quad \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B}; \quad \frac{1}{L} \right). \quad (2.14)$$

Для описания таких возмущений достаточно потребовать равенство нулю самого интеграла, стоящего под знаком производной $d/d\Psi$ в (2.13).

Уравнения (2.12), (2.13) составляют итоговую систему уравнений для описания спектра локализованных ГАМ в системе магнитных поверхностей. Возмущения давления, p' , и электрического поля, $\sim d\phi'/d\Psi$, зацеплены через параметр $[\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla 1/B^2$, пропорциональный геодезической кривизне магнитных силовых линий.

Частота сплошного спектра ГАМ определяется из условия совместности уравнений (2.12) и (2.13) при заданном магнитном поле $\mathbf{B}$.

2.1.2 ГАМ в токамаке некруглого сечения

Для мод сплошного спектра, радиальная длина волны которых мала по сравнению с характерным пространственным масштабом макроскопических равновесных профилей, равновесные магнитные поверхности в осесимметричном токамаке могут быть записаны в виде [259]:

$$R(r, \theta) = R_a + r \cos(\theta + \sigma(r) \sin \theta),$$

$$z(r, \theta) = \kappa(r)r \sin(\theta + \sigma(r) \sin \theta).$$

Здесь κ – вытянутость, σ – треугольность, $R_a = R_0 + \Delta(r)$ – центр магнитной поверхности с учётом смещения Шафранова Δ . Смещение Шафранова пропорционально отношению давления плазмы к давлению магнитного поля и обычно считается малым как r^2/R_0^2 . Его величина, однако, не может считаться независимым параметром, поскольку тесно связана с другими характеристиками формы плазмы. В данной работе эффекты, связанные со смещением Шафранова, рассматриваться не будут. В рамках кинетического подхода влияние Δ' на спектр ГАМ исследовано в [247]. Треугольность σ и обратное аспектное отношение $\epsilon = r/R_0$ будем считать малыми параметрами, удерживая в итоговом выражении для частоты ГАМ члены $\sim \sigma^2$, ϵ^2 и $\epsilon\sigma$. При этом также будем полагать, что κ и σ на радиусе шнура меняются плавно, поэтому их производными s_κ и s_σ можно пренебречь, подставляя в итоговое выражение для частоты ГАМ локальные значения. Величину вытянутости будем считать произвольной. Компоненты магнитного поля рассчитываются согласно представлению (1.3).

В описанном приближении уравнение для давления (2.12) сводится к виду:

$$\left(\omega^2 + \frac{\omega_s^2}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) p' = 2i\omega c \frac{\Gamma p}{\kappa F} \frac{d\phi'}{dr} \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - \frac{3}{64} \sigma^2 \right) \sin \theta + \frac{3}{4} \sigma \sin 2\theta \right\}. \quad (2.15)$$

Будем искать решение уравнения (2.15) в виде суммы двух полонидальных гармоник

$$p' = p_1(r) \sin \theta + p_2(r) \sin 2\theta. \quad (2.16)$$

Из (2.15) получаем явные выражения для p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\omega^2 \frac{\Gamma p}{\kappa F} \frac{d\phi'}{dr} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \left(1 - \frac{3}{64}\sigma^2\right), \\ p_2 &= 2\omega^2 \frac{\Gamma p}{\kappa F} \frac{d\phi'}{dr} \frac{1}{(\omega^2 - 4\omega_s^2/q^2)} \frac{3\sigma}{4}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Уравнения (2.16), (2.17) дают связь между возмущением давления и возмущением радиального электрического поля ГАМ. Подставляя (2.16) в (2.13) и интегрируя по угловым переменным, приходим к искомому дисперсионному уравнению для ГАМ в некруглой плазме [108]:

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa^2 + 1}{2} + \frac{3}{8}\epsilon^2(3\kappa^2 + 1) + \frac{3}{16}\epsilon\sigma(1 - 3\kappa^2) + \frac{1}{128}\sigma^2(3\kappa^2 + 37) - \frac{2\omega_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2/q^2} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\epsilon\sigma}{4} - \frac{11}{64}\sigma^2\right) - \frac{3\omega_s^2}{2(\omega^2 - 4\omega_s^2/q^2)} \left(\sigma^2 + \frac{\epsilon\sigma}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Дисперсионное уравнение (2.18) впоследствии воспроизведено в рамках гирокинетической модели плазмы в [85].

При $\kappa = 1$, $\sigma = 0$, $\epsilon = 0$ уравнение (2.18) сводится к стандартному выражению (2.1).

При $\sigma = 0$ выражение (2.18) описывает частоту ГАМ в плазменном шнуре эллиптического сечения

$$\omega^2 = \frac{2\omega_s^2}{\kappa^2 + 1} \left(2 + \frac{\kappa^2 + 1}{2} \frac{1}{q^2} - \frac{3\epsilon^2}{2} \frac{3\kappa^2 + 1}{\kappa^2 + 1}\right). \quad (2.19)$$

Из выражения (2.19) следует вывод о том, что частота ГАМ снижается с ростом вытянутости плазмы $\sim \sqrt{2/(\kappa^2 + 1)}$, что качественно повторяет результаты работы [245] и согласуется с экспериментальными измерениями [83, 223], а также с результатами численного моделирования [242]. Отметим, что полученное выражение (2.19) справедливо для произвольного значения вытянутости, а не только при $\kappa \sim 1$ как в [248], и, в отличие от [243], повторяет зависимости от κ и ϵ , следующие из кинетической теории [245].

Зависимость от вытянутости весьма существенная. Так, при $\kappa = 2$, $\epsilon = 0$, 3 квадрат частоты ГАМ, рассчитанный согласно (2.19) с учётом вытянутости плазмы и конечного аспектного отношения, более чем в 2,5 раза уступает оценкам, полученным в квазицилиндрическом приближении для круглой плазмы (2.1).

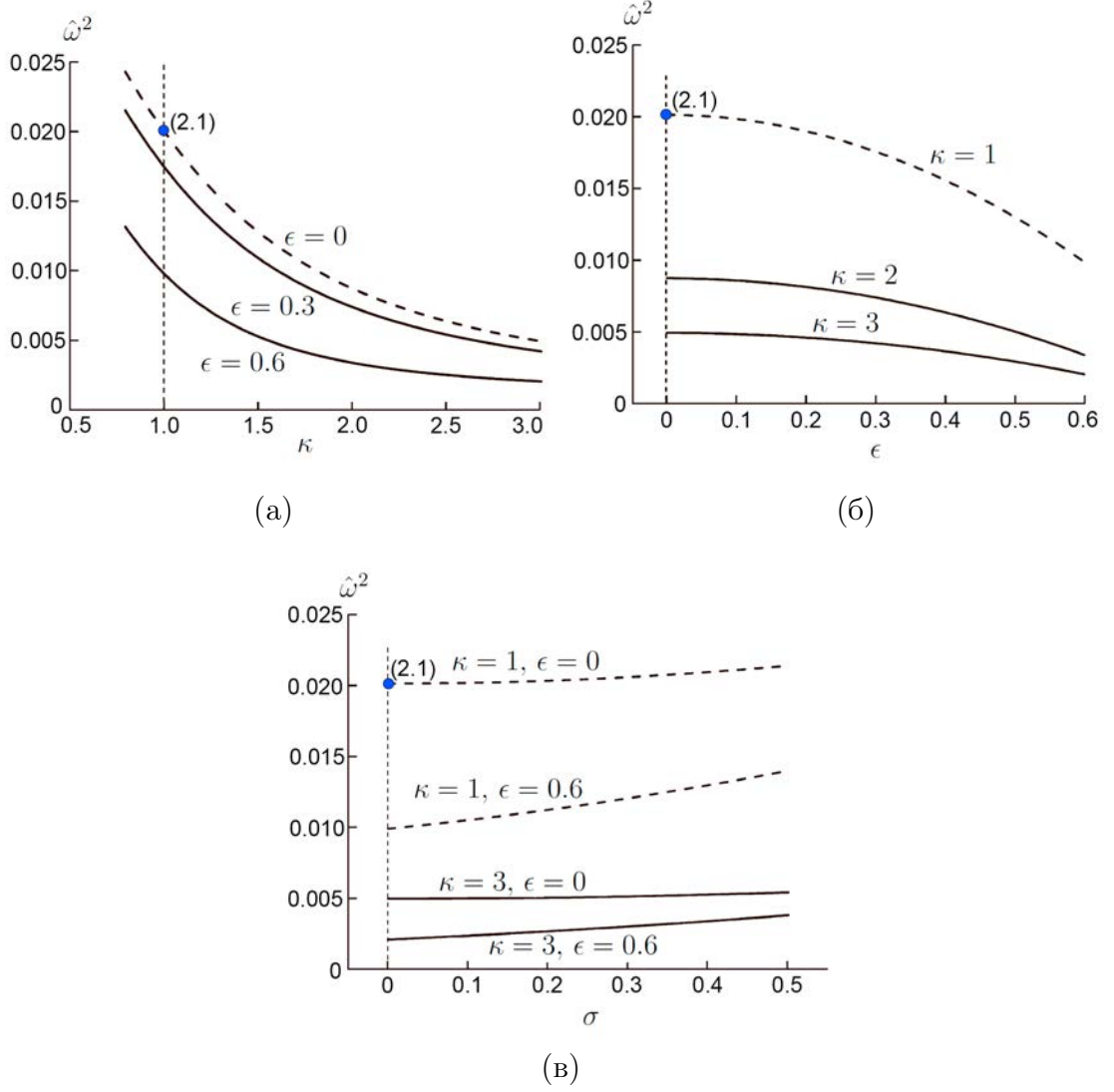


Рис. 2.1: Зависимость частоты ГАМ, локализованной на радиусе $r = 0,95a$, от (а) вытянутости плазмы κ , (б) обратного аспектного отношения ϵ , (в) треугольности σ . Частота нормирована на звуковую частоту в центре плазмы: $\hat{\omega}^2 = \omega^2/\omega_s^2|_{r=0}$. Для иллюстрации выбраны профили $q = 1 + 2(r/a)^2$, $\omega_s = \omega_s|_{r=0}(1 - (r/a)^2)$. Синей точкой показаны результаты расчёта по формуле (2.1).

Частота ГАМ также снижается с ростом обратного аспектного отношения $\sim \epsilon^2$. Для круглой плазмы ($\kappa = 1$)

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} - 3\epsilon^2 \right). \quad (2.20)$$

При $\sigma \neq 0$ сплошной спектр ГАМ описывается приближённым выражением

$$\omega^2 = \frac{2\omega_s^2}{\kappa^2 + 1} \left(2 + \frac{\kappa^2 + 1}{2q^2} - \frac{3}{2} \frac{3\kappa^2 + 1}{\kappa^2 + 1} \epsilon^2 + \right.$$

$$+\frac{5\kappa^2-1}{2(\kappa^2+1)}\epsilon\sigma+\frac{17\kappa^2}{16(\kappa^2+1)}\sigma^2\Big),$$

демонстрирующим слабый рост частоты с увеличением треугольности сечения плазменного шнура. Полученные результаты проиллюстрированы графически на рис. 2.1.

Таким образом, показано, что вытянутость магнитных поверхностей значительно снижает частоту ГАМ, и её учёт необходим при расчёте спектра ГАМ в установках с некруглой плазмой.

2.1.3 Роль тороидальной гофрировки магнитного поля

Для описания поля с осенесимметричными магнитными поверхностями используем разложение вектора $\mathbf{B}$ по контравариантному базису:

$$\mathbf{B} = [\nabla\Psi \times \nabla\varphi] - s(\Psi, \theta)[\nabla\Psi \times \nabla\theta], \quad (2.21)$$

где $s(\Psi, \theta)$ – некоторая функция магнитной поверхности и полоидального угла. Наличие функции s в представлении (2.21) не нарушает условия соленоидальности магнитного поля ($\text{div}\mathbf{B} \equiv 0$), при этом дарует свободу в функциональной зависимости тороидального магнитного поля от полоидального угла. Условие того, что Ψ является магнитной поверхностью, для поля вида (2.21), выполняется по построению ($\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi \equiv 0$).

В плоскости $\varphi = \text{const}$ введём “полярный” радиус $r = \sqrt{(R - R_0)^2 + z^2}$ и стандартным образом определим полоидальный угол как $\theta = \text{atan}(z/(R - R_0))$.

Рассмотрим функцию Ψ вида:

$$\Psi(r, \varphi, \theta) = \frac{B_a \tilde{r}^2}{2q(\Psi)}, \quad (2.22)$$

где роль метки магнитной поверхности выполняет комбинация $\tilde{r} = r\sqrt{1 + 2\cos n\varphi/r^2 \int r\delta(r, \theta)dr}$, где интегрирование выполняется от 0 до r ; для простоты в дальнейшем пределы интегрирования опускаем. Как будет видно далее, величина δ обозначает амплитуду гофрировки магнитного поля, характеризующую отношение $(B_{\max} - B_{\min})/(B_{\max} + B_{\min})$, где $B_{\max}$ – максимум модуля поля, $B_{\min}$ – минимум модуля поля на тороидальном обводе тора; n – гармоника гофрировки. В общем случае амплитуда гофрировки, δ , зависит от радиуса и от полоидального угла. При переходе к случаю осевой симметрии

$\delta \rightarrow 0$, и выражение для магнитной поверхности приобретает стандартный вид $\Psi = B_a r^2 / (2q)$, где B_a – поле на магнитной оси токамака. Поскольку мы преимущественно ориентируемся на исследование эффекта тороидальной асимметрии магнитного поля в токамаке, для характеристики вращательного преобразования магнитных силовых линий в (2.22) используется коэффициент запаса устойчивости q .

Функцию s определим из условия, что тороидальное магнитное поле в тороидальной системе пропорционально $\sim 1/R$. Тогда

$$s = \frac{q}{1 + \tilde{r} \cos \theta / R_0}.$$

Компоненты магнитного поля (2.21) в явном виде выписываются как

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\epsilon B_a}{r^2(1 + \epsilon \cos \theta)} \left(\frac{n \sin n\varphi \int r \delta dr}{1 + \tilde{\epsilon} \cos \theta} - \frac{\cos n\varphi}{q} \frac{\partial \int r \delta dr}{\partial \theta} \right), \\ B_\theta &= \frac{\epsilon B_a}{q(1 + \epsilon \cos \theta)} (1 + \delta \cos n\varphi), \\ B_\varphi &= \frac{B_a}{(1 + \tilde{\epsilon} \cos \theta)} (1 + \delta \cos n\varphi). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь наряду с малым параметром $\epsilon = r/R_0 \ll 1$ используется аналогичное обозначение $\tilde{\epsilon} = \tilde{r}/R_0$, атрибутированное к метке магнитной поверхности. Далее будем полагать, что амплитуда гофрировки магнитного поля мала, так что $\delta \sim \varkappa \epsilon$, где $\varkappa \lesssim 1^{14}$. Всюду далее будем удерживать члены порядка ϵ^2 , но пренебрегать слагаемыми $\sim \epsilon^2/q^2$ (отношение квадратов полоидального и тороидального полей).

Введённая посредством выражения (2.22) тороидальная неоднородность магнитной поверхности приводит к гофрировке тороидального и полоидального магнитных полей, а также к появлению радиальной (по малому радиусу) компоненты магнитного поля. С точностью до членов $\sim \epsilon \delta$ величина B_φ , заданная (2.23), совпадает со стандартным выражением [260].

В отмеченных приближениях получаем выражение для члена, характеризующего геодезическую кривизну силовых линий магнитного поля:

$$[\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla \frac{1}{B^2} = \frac{2\tilde{\epsilon} \sin \theta}{q} +$$

¹⁴стандартный ордеринг в токамаке предполагает $\delta \sim \epsilon^2$, однако учитывая, что δ может войти в уравнения в комбинации с высокими n , будем удерживать слагаемые $\sim \delta$ наравне с $\sim \epsilon$

$$+ \frac{2(1 + \tilde{\epsilon} \cos \theta) \cos n\varphi}{q(1 + \delta \cos n\varphi)} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \theta} - \frac{\cos n\varphi}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} \int r \frac{\partial \delta}{\partial \theta} dr \right). \quad (2.24)$$

В отличие от осесимметричного случая в выражение (2.24) помимо стандартного (первого) слагаемого, зависящего от метки магнитной поверхности $\tilde{\epsilon} \sim \sqrt{\Psi}$ и $\sin$ -гармоники полоидального угла, входит дополнительная составляющая, содержащая явную зависимость от φ , наличие которой обусловлено полоидальной неоднородностью амплитуды гофрировки магнитного поля.

Используем полученные выражения для вывода закона дисперсии ГАМ.

Тороидальная асимметрия магнитных поверхностей приводит к зацеплению тороидальных гармоник колебаний. Рассмотрим возмущения давления вида $p' = p'(\Psi, \varphi, \theta)$, предполагая возможность явной зависимости p' от тороидального угла. Уравнение (2.12) при подстановке (2.24) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \omega^2 p' + \omega_s^2 \left(\frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{2}{q} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial^2 p'}{\partial \varphi^2} \right) + \omega_s^2 \left(\frac{1}{q} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial \varphi} \right) \times \\ & \times \left(n\delta \sin n\varphi - \frac{1}{q} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \cos n\varphi \right) + \frac{2i\omega c \Gamma p}{q} \frac{d\phi'}{d\Psi} \left(\tilde{\epsilon} \sin \theta + \cos n\varphi \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где ... соответствует слагаемым высших порядков по $\tilde{\epsilon}$ и δ , которые для краткости здесь не выписываем.

Для нахождения явного вида тороидальных и полоидальных гармоник возмущений давления необходимо конкретизировать профиль амплитуды гофрировки. В общем случае δ является сложной функцией полоидального угла и радиуса плазменного шнура, определяемой формой и положением магнитных катушек [261]. Для качественного описания эффекта используем упрощённую линейную зависимость

$$\delta = \delta_0 \left(1 + k \frac{r}{a} \cos \theta \right), \quad (2.26)$$

описывающую спад амплитуды гофрировки при переходе с внешнего обвода тора на внутренний. Здесь δ_0 определяет амплитуду гофрировки на магнитной оси токамака, параметр k характеризует градиент спада. При $k = 1$ на внутреннем обводе тора гофрировка магнитного поля равна нулю.

Будем искать решение уравнения (2.25) с подстановкой (2.26) в виде $p' = p'_0(\Psi, \theta) + \delta_0 p'_1(\Psi, \varphi, \theta) + \delta_0^2 p'_2(\Psi, \varphi, \theta)$, откуда находим яв-

ные выражения для гармоник давления через возмущение потенциала (выписаны лишь те гармоники, которые вносят заметный вклад в закон дисперсии):

$$\begin{aligned}
p'_0 &= \bar{p}_0 \sin \theta, \quad \bar{p}_0 = -\frac{2i\omega c \Gamma p \tilde{\epsilon}}{q(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{d\phi'}{d\Psi}, \\
p'_1 &= \bar{p}_{1c} \sin \theta \cos n\varphi, \quad \bar{p}_{1c} = \frac{2i\omega c \Gamma p}{q((\omega^2 - n^2\omega_s^2 - \omega_s^2/q^2)^2 - 4n^2\omega_s^4/q^2)} \frac{d\phi'}{d\Psi} \times \\
&\times \left(\frac{k\tilde{r}}{a}(\omega^2 - n^2\omega_s^2 - \omega_s^2/q^2) + 2\frac{n^2}{q^2} \frac{\tilde{\epsilon}\omega_s^4}{\omega^2 - \omega_s^2/q^2} \right), \\
p'_2 &= \bar{p}_{20} \sin \theta, \quad \bar{p}_{20} = -\frac{k\tilde{r}}{a} \frac{i\omega c \Gamma p}{q(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{d\phi'}{d\Psi} \times \\
&\times \left(\frac{3}{2} - \frac{n^2\omega_s^2(\omega^2 - n^2\omega_s^2 + \omega_s^2/q^2)}{(\omega^2 - n^2\omega_s^2 - \omega_s^2/q^2)^2 - 4n^2\omega_s^4/q^2} \right). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Теперь, интегрируя (2.13) по тороидальному и полоидальному углам при постоянной Ψ и пренебрегая слагаемыми $\sim \tilde{\epsilon}^2\sigma^2$, имеем

$$\frac{\tilde{\epsilon}}{q}\bar{p}_0 - \frac{\delta_0^2}{2q} \left(\frac{k\tilde{r}}{a} \left(\bar{p}_{1c} - \frac{5}{2}\bar{p}_0 \right) + \tilde{\epsilon}(\bar{p}_{1c} - 2\bar{p}_{20}) \right) + i\omega c \rho \frac{\tilde{r}^2}{q^2} \left(1 + \frac{3}{2}\tilde{\epsilon}^2 \right) \frac{d\phi'}{d\Psi} = 0,$$

что после подстановки (2.27) даёт искомый закон дисперсии ГАМ [128]:

$$\begin{aligned}
&\omega^2 \left(1 + \frac{3}{2}\tilde{\epsilon}^2 \right) - 2\omega_s^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} - \frac{\delta_0^2\omega_s^2}{(\omega^2 - \omega_s^2/q^2 - n^2\omega_s^2)^2 - 4n^2/q^2\omega_s^4} \times \\
&\times \left(\frac{k^2 R_0^2}{a^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} - n^2\omega_s^2 \right) + \right. \\
&\left. + \frac{kR_0}{a} \left(5 \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} - n^2\omega_s^2 \right)^2 - 16 \frac{n^2}{q^2} \omega_s^4 \right) \right) = 0. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

При нулевой амплитуде гофрировки, $\delta_0 = 0$, уравнение (2.28) сводится к ранее полученному выражению (2.20) для частоты ГАМ с учётом конечного обратного аспектного отношения токамака. Будем искать решение уравнения (2.28) вблизи этой частоты, полагая $\omega^2 = \omega_s^2(2 + 1/q^2 - 3\tilde{\epsilon}^2 + \delta_0^2\alpha)$, где α – поправка к квадрату частоты,

обусловленная гофрировкой. В итоге имеем

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} - 3\epsilon^2 - \frac{\delta_m^2}{(k+1)^2((n^2-2)^2 - 4n^2/q^2)} \times \right. \\ \left. \times \left(2 \left(\frac{kR_0}{a} \right)^2 (n^2 - 2) - \frac{kR_0}{a} \left(5(n^2 - 2)^2 - 16 \frac{n^2}{q^2} \right) \right) \right). \quad (2.29)$$

Выражение (2.29) представляет собой модификацию частоты ГАМ с учётом гофрировки магнитного поля, характеризуемой номером тороидальной гармоники n и параметром k , определяющим неоднородность гофрировки внутри пламенного шнура согласно формуле (2.26). Вместо величины δ_0 в (2.29) используется $\delta_m = (k+1)\delta_0$ – максимальная амплитуда гофрировки на внешнем обводе тора – величина известная из эксперимента.

Как уже отмечалось ранее, в рассматриваемом приближении вклад гофрировки в дисперсию ГАМ связан с неоднородностью её амплитуды в полоидальном сечении плазменного шнура. Амплитуда гофрировки входит в закон дисперсии в произведении с аспектным отношением токамака. Это отражает соотношение между эффектом гофрировки и эффектом тороидальной кривизны магнитного поля, служащей триггером для колебательного процесса ГАМ. Величина α , характеризующая эффект гофрировки, растёт с ростом аспектного отношения, но при высоких n от n не зависит. Формальная зависимость $\alpha(n)$ как от непрерывной переменной представлена на рис. 2.2.

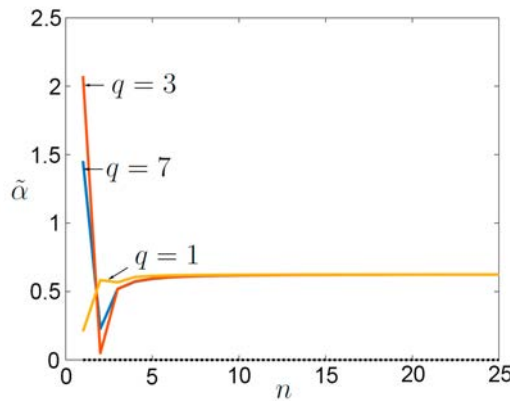


Рис. 2.2: Зависимость величины $\tilde{\alpha} = \alpha(n)/\alpha(0)$ от n при $R_0/a = 3$ и разных значениях q .

Оценим количественное влияние эффектов тороидальной асимметрии магнитного поля на частоту ГАМ, используя экспериментальные и прогнозируемые данные по гофрировке магнитного поля на токамаках. Для этого рассчитаем разницу между частотой моды в присутствии и без ($\delta_m = 0$) тороидальной гофрировки, используя формулу (2.29): $\Delta = |\omega - \omega(\delta_m = 0)|/\omega(\delta_m = 0) \times 100\%$. В расчётах будем полагать $k = 1$, $\tilde{\epsilon} = a/R_0$, $q = 5$; номер тороидальной гармоники n положим равным числу катушек тороидального поля.

Амплитуда тороидальной гофрировки магнитного поля в токамаке преимущественно определяется числом катушек тороидального поля и может составлять от десятой доли процента до почти десяти процентов. С увеличением числа катушек амплитуда гофрировки падает.

В токамаке Т-10 число магнитных катушек относительно невелико, $n = 16$, что приводит к заметной гофрировке магнитного поля на периферии плазмы, $\delta_m \sim 3\%$ [262]. Подставляя эти параметры в формулу (2.29), находим $\Delta \sim 0,15\%$. Таким образом, влияние гофрировки на частоту ГАМ пренебрежимо мало.

Аналогичный вывод справедлив и для других крупных токамаков, что отражено в таблице 1.

Токамак	$\delta_m, \%$	n	R_0/a	$\Delta, \%$	$\bar{p}_{1c}/\bar{p}_0$
Т-10 [262]	3	16	5	0,15	6×10^{-4}
Tore Supra [263]	7	18	3,3	0,57	7×10^{-4}
JET [264]	0,08	32	3	7×10^{-5}	2×10^{-6}
ИТЭР [265]	0,5	18	3,1	3×10^{-3}	5×10^{-5}

Таблица 1: Оценка эффекта гофрировки магнитного поля на частоту ГАМ для различных токамаков.

В таблице 1 также приведено значение отношения тороидально неоднородного возмущения давления плазмы ($\sim \cos n\varphi$) к его осесимметричной составляющей:

$$\frac{\bar{p}_{1c}}{\bar{p}_0} \approx \frac{2\delta_m}{(k+1)((n^2-2)^2 - 4n^2/q^2)} \left(\frac{kR_0}{a}(n^2-2) - \frac{n^2}{q^2} \right).$$

Видно, что несмотря на формальное зацепление колебаний электрического потенциала плазмы с n -ой тороидальной гармоникой колебаний давления, описываемое (2.27), величина последней оказывается весьма малой, что сильно затрудняет возможность её регистрации на эксперименте.

Таким образом, показано, что осевая асимметрия магнитного поля, обусловленная дискретностью магнитных катушек, в крупных токамаках не оказывает сколь-нибудь заметного влияния на частоту и структуру ГАМ.

2.2 Общее описание глобальных ГАМ и ЗТ в токамаке с тороидальным вращением плазмы

Исследуем динамику осесимметричных ($n = 0$) возмущений в токамаке с низким давлением плазмы, $\beta \sim \epsilon^2$, отказавшись от предположения о сильной локализованности мод вблизи магнитных поверхностей (2.14).

В пределе большого аспектного отношения из уравнений (1.44), (1.45) следует, что

$$p = \bar{p}(r) \left(1 + \Gamma M^2 \frac{r}{R_0} \cos \theta \right), \quad \rho = \bar{\rho}(r) \left(1 + \frac{\Gamma M^2}{\alpha} \frac{r}{R_0} \cos \theta \right),$$

где $\bar{p}(r)$, $\bar{\rho}(r)$ – давление и массовая плотность плазмы в отсутствие вращения, $\omega_s = \sqrt{\Gamma \bar{p} / \bar{\rho}} / R_0$ – соответствующая им частота звука, $M = \Omega / \omega_s$ – звуковое число Маха.

С учётом этих соотношений система редуцированных МГД-уравнений (1.48), (1.49) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 + \frac{\omega_s^2}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \zeta = \\ & = 2 \left(i M \omega \omega_s + \frac{\omega_s^2}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\sin \theta \frac{\partial \phi'}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} \right], \quad (2.30) \\ & \frac{1}{q R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \operatorname{div} \nabla \left(\frac{\phi'}{q} \right) + \operatorname{div} \left\{ \frac{4 \pi \bar{\rho} \omega^2}{B_a^2} \nabla \phi' + \frac{8 \pi}{B_a^2} (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \times \right. \\ & \times \left[\left(i \bar{\rho} M \omega \omega_s + \frac{\rho_0 \omega_s^2}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \zeta + \frac{[\mathbf{B} \times \nabla \phi']}{R_0 B_a} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\bar{\rho} \omega_s^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \nabla R^2 + \nabla \left((p - \bar{p}) \left(1 + \frac{\Gamma M^2}{2\alpha} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{p} \left(1 + \frac{\Gamma M^2}{2} \right) \right) \right) + \frac{\eta}{q B_a R_0^2} \left[\mathbf{B} \times \nabla \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\phi'}{q} \right) \right] \Big\} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь параметр $\eta = 2 - s$, $s = (r/q) dq/dr$ определяет равновесный продольный ток (последнее слагаемое в уравнении (1.49)).

Будем искать решения для ϕ' и ζ в виде

$$\phi' = \phi_0(r) + \phi_{2c}(r) \cos 2\theta + i\phi_{2s}(r) \sin 2\theta, \quad \zeta = \zeta_c(r) \cos \theta + \zeta_s(r) \sin \theta.$$

Исключая функцию ζ из (2.31) с использованием уравнения (2.30), приходим к системе связанных дифференциальных уравнений для гармоник электрического потенциала ϕ_0 , $\Phi_{2c} = r^2 \phi_{2c}$ и $\Phi_{2s} = r^2 \phi_{2s}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ \frac{4\pi \bar{\rho} r}{B_a^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \left[D \frac{d\phi_0}{dr} + \frac{G_c}{r^2} \frac{d\Phi_{2c}}{dr} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\bar{\rho} r^2 f} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \frac{df^2}{dr} \Phi_{2c} + \frac{G_s}{r^2} \frac{d\Phi_{2s}}{dr} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{2c}}{q} \right) \right] - \frac{\Phi_{2c}}{r^4 q} \frac{d}{dr} \left(\frac{\eta}{q} \right) - \\ & - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\omega_A^2 r} \frac{G_c}{(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{d\phi_0}{dr} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{2s}}{q} \right) \right] - \frac{\Phi_{2s}}{r^4 q} \frac{d}{dr} \left(\frac{\eta}{q} \right) - \\ & - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\omega_A^2 r} \frac{G_s}{(\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{d\phi_0}{dr} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \omega^4 - \omega_s^2 \omega^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\Gamma M^4}{2\alpha} \right) + \omega_s^4 \frac{\Gamma - \alpha}{\alpha} \frac{M^4}{2q^2}, \\ G_c &= \frac{1}{2} \left(\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) - D \right), \quad G_s = \frac{2M\omega\omega_s^3}{q} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right), \\ f &= \bar{\rho} \omega_s^2 \frac{M^2}{2} \left(1 + \frac{\Gamma M^2}{2\alpha} \right), \quad \omega_A = \frac{c_A}{R_0}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

При $(\phi_{2c}, \phi_{2s}) = 0$ уравнение (2.32) сводится к условию $D = 0$, описывающему сплошной спектр ГАМ и ЗТ в тороидально вращающейся плазме токамака (см. далее формулу (2.51)). Электромагнитные эффекты делают возможным реализацию глобальных мод низкочастотных флуктуаций электрического потенциала.

Эта возможность исследована далее. В разделе 2.3 рассмотрены глобальные ГАМ в статической плазме токамака. Исследованию влияния эффектов вращения на собственные моды ГАМ и ЗТ посвящён раздел 2.4.

2.3 Глобальные геодезические акустические моды

В рамках идеальной МГД-теории решения в виде собственных геодезических акустических мод впервые были обнаружены численно в [266, 267]. В [266, 267] было показано, что глобальная ГАМ (ГГАМ) может существовать в зазоре между сплошным спектром ГАМ (2.1) и альфвеновским спектром, вблизи максимума локальной частоты ГАМ. При этом решения были найдены исключительно для равновесий, характеризующихся наличием *внеосевого* максимума (2.1), реализуемого либо в разрядах с отрицательным магнитным широм, либо при мощном неосевом нагреве плазмы. Далее исследуем проблему собственных ГАМ в токамаке, опираясь на редуцированную модель, изложенную в предыдущем разделе. При этом будут получены аналитические решения как для равновесий с максимумом локальной частоты ГАМ, так и для монотонной зависимости $\omega_{GAM}(r)$.

2.3.1 Уравнения глобальных ГАМ

Начнём с исследования глобальных ГАМ в статической плазме. При $M = 0$ $\sin 2\theta$ -гармоника возмущения потенциала не “зацепляется” с основной (нулевой) гармоникой возмущения, поэтому в качестве решения уравнения (2.34) можно выбрать тривиальное $\Phi_{2s} = 0$. Тогда, подставляя в (2.32), (2.33) явные выражения для коэффициентов $G_c = \omega^2 \omega_s^2$, $D = \omega^2(\omega^2 - \omega_{GAM}^2)$ и интегрируя (2.32) один раз по радиусу, имеем [104]:

$$(\omega^2 - \omega_{GAM}^2) \frac{d\phi_0}{dr} + \frac{\omega_s^2}{r^2} \frac{d\Phi_{2c}}{dr} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi_{2c}}{q} \right) \right] - \frac{\Phi_{2c}}{qr^4} \frac{d}{dr} \left(\frac{\eta}{q} \right) - \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\omega^2}{4r\omega_A^2} \frac{d\phi_0}{dr} \right\} = 0. \quad (2.37)$$

При выводе (2.36), (2.37) заведомо предполагалось решение с частотой вблизи ω_{GAM} . В пренебрежении вкладом от Φ_{2c} уравнение (2.36) описывает известный спектр электростатических ГАМ (2.1).

Уравнения (2.36), (2.37), дополненные соответствующими граничными условиями, описывают собственные ГАМ в статической плазме токамака. В следующих подразделах приведены их аналитические решения для некоторых представительных классов равновесий плазмы. Аналитические результаты сопоставлены с результатами численного решения задачи на собственные значения, реализованного кодом [107]. Методика численного расчёта глобальных мод разработана и применена в [35].

2.3.2 Глобальные ГАМ в токамаке с положительным магнитным широм и монотонным профилем температуры

Для построения аналитических решений будем полагать $\eta = 0$ и $\bar{\rho}(r) = \text{const}$. Как будет показано далее в численных расчётах эффект равновесного продольного тока не оказывает существенного влияния на собственную частоту моды и может лишь незначительно изменить радиальную структуру собственной функции в области большого магнитного шира.

Систему уравнений (2.36), (2.37) удобно переписать в безразмерном виде:

$$\left(\hat{\omega}^2 - \hat{T} \left(2 + \frac{1}{q^2} \right) \right) \frac{d\phi_0}{d\hat{r}} + \frac{\hat{T}}{\hat{r}^2} \frac{d\Phi_{2c}}{d\hat{r}} = 0, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\omega}^2 \hat{\beta}}{4} \frac{d}{d\hat{r}} \left(\frac{1}{\hat{r}} \frac{d\phi_0}{d\hat{r}} \right) - \frac{d}{d\hat{r}} \left(\frac{1}{\hat{r}^3 q^2} \frac{d\Phi_{2c}}{d\hat{r}} \right) - \\ & - \frac{\Phi_{2c}}{\hat{r}^3 q^3} \left\{ \frac{3}{\hat{r}} \frac{dq}{d\hat{r}} - \frac{d^2 q}{d\hat{r}^2} + \frac{2}{q} \left(\frac{dq}{d\hat{r}} \right)^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь введены нормированный радиус $\hat{r} = r/a$, нормированный профиль температуры $\hat{T}(\hat{r})$: $\hat{T}|_{\hat{r}=0} = 1$, а частота нормирована на частоту звука в центре плазмы, $\hat{\omega}^2 = \omega^2/\omega_s^2|_{\hat{r}=0}$; $\hat{\beta} = \omega_s^2/\omega_A^2|_{\hat{r}=0}$. Ниже

в данном разделе будем опускать шляпки над $\hat{\beta}$ и $\hat{r}$, $\hat{\omega}$, $\hat{T}$, работая исключительно с нормированными величинами.

Для интегрирования уравнения (2.39) рассмотрим “итэроподобный” [268] профиль коэффициента запаса устойчивости

$$q(r) = \frac{q_0 q_1}{q_1 - (q_1 - q_0)r^4}, \quad (2.40)$$

где $q_0 = q|_{r=0}$, $q_1 = q|_{r=1}$, предложенный в [103]. При $q_1 > q_0$ зависимость (2.40) описывает монотонный профиль q с малым градиентом вблизи магнитной оси.

После интегрирования (2.39) получим явные выражения для производных потенциала $d\phi_0/dr$ и $d\Phi_{2c}/dr$:

$$\frac{d\phi_0}{dr} = \frac{KrTq^2}{\omega^2(1 + \beta Tq^2/4) - T(2 + 1/q^2)}, \quad (2.41)$$

$$\frac{d\Phi_{2c}}{dr} = -\frac{Kr^3q^2(\omega^2 - T(2 + 1/q^2))}{\omega^2(1 + \beta Tq^2/4) - T(2 + 1/q^2)}, \quad (2.42)$$

где K – произвольная константа интегрирования.

Проанализируем возможность существования глобальной ГАМ в статической плазме с положительным магнитным широм. Возможность существования глобальной моды определяется двумя условиями. Во-первых, глобальное решение должно быть гладким, что предполагает отсутствие сингулярностей в правых частях уравнений (2.41), (2.42). В рассматриваемом случае это условие сводится к положительности их знаменателя:

$$\omega^2(1 + \beta Tq^2/4) - T(2 + 1/q^2) > 0,$$

что должно удовлетворяться в каждой точке внутри объёма плазмы. Во-вторых, глобальная мода должна удовлетворять граничным условиям:

$$\Phi_{2c}|_{r=0} = 0, \quad \Phi_{2c}|_{r=1} = 0, \quad (2.43)$$

обеспечивающим регулярность решения на магнитной оси токамака и нулевую радиальную скорость на границе плазменного шнура, соответственно. Граничные условия (2.43) сводятся к интегральному уравнению на собственную частоту ГГАМ:

$$\int_{q_0}^{q_1} \frac{(\omega^2 - T(2 + 1/q^2))dq}{\omega^2(1 + \beta Tq^2/4) - T(2 + 1/q^2)} = 0. \quad (2.44)$$

Нуль знаменателя в (2.44) определяет частоту сплошного спектра ГАМ с учётом возмущений магнитного поля (второй полоидальной гармоники электрического потенциала):

$$\omega_{GAM}^\beta = \frac{\omega_{GAM}}{\sqrt{1 + \omega_s q^2 / (4\omega_A)}}.$$

Частота ω_{GAM}^β всегда меньше локальной частоты ГАМ ω_{GAM} , полученной в чисто электростатическом приближении.

Для явного интегрирования полученного условия (2.44) необходимо определить профиль температуры T как функцию коэффициента запаса устойчивости q . Интересуясь монотонной зависимостью локальной частоты ГАМ (2.1) от r , рассмотрим представительный класс профилей температуры вида

$$T = q^2 / (C_0 + C_2 q^2 + C_4 q^4) \quad (2.45)$$

где

$$C_0 = \frac{(1 - T_1)q_0^2 q_1^2 q_m^4}{T_1(q_1^2 - q_0^2)(q_0^2 q_1^2 - q_m^4)}, \quad C_2 = \frac{T_1 q_0^2 (q_1^4 + q_m^4) - q_1^2 (q_0^4 + q_m^4)}{T_1(q_1^2 - q_0^2)(q_0^2 q_1^2 - q_m^4)},$$

$$C_4 = \frac{(1 - T_1)q_0^2 q_1^2}{T_1(q_1^2 - q_0^2)(q_0^2 q_1^2 - q_m^4)},$$

$T|_{r=1} = T_1$, r_m – точка формального максимума функции (2.45), $q_m = q(r_m)$.

В рассматриваемом случае условие (2.44) сводится к уравнению

$$q_1 - q_0 + \frac{\beta}{4C_4}(cI_0 + bI_2) = 0, \quad (2.46)$$

где

$$I_0 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{q^4 + bq^2 + c}, \quad I_2 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{q^2 dq}{q^4 + bq^2 + c}$$

и $b = (C_2 - 2/\omega^2)/(C_4 + \beta/4)$, $c = (C_0 - 1/\omega^2)/(C_4 + \beta/4)$.

Для получения явных аналитических выражений для I_0 и I_2 важно учесть, что для монотонных профилей температуры величина $\vartheta = b^2 - 4c$ всегда положительна. При $\vartheta > 0$ уравнение (2.46) принимает вид:

$$q_1 - q_0 - \frac{\beta}{8C_4\sqrt{\vartheta}}\{(bb_- - c)I(b_-) - (bb_+ - c)I(b_+)\} = 0, \quad (2.47)$$

где функция $I(x)$ определена как

$$I(x_b) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x_b}} \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{\sqrt{x_b}}\right) \Big|_{q_0}^{q_1}, & x_b > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x_b}} \ln \left| \frac{\sqrt{-x_b} - q}{\sqrt{-x_b} + q} \right| \Big|_{q_0}^{q_1}, & x_b < 0 \end{cases}.$$

Для краткости здесь использованы обозначения: $b_- = (b - \sqrt{\vartheta})/2$, $b_+ = (b + \sqrt{\vartheta})/2$.

Если собственная частота определена из (2.47), то радиальная структура собственных функций описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_0}{dr} &= \frac{Krq^4}{\omega^2(C_0 + C_2q^2 + C_4q^4 + \beta q^4/4) - q^2(2 + 1/q^2)}; \\ \Phi_{2c} &= \frac{-Kq_0q_1}{4(q_1 - q_0)(1 + \beta/4C_4)} \left(q - \frac{\beta}{8C_4\sqrt{\vartheta}} \{ (bb_- - c)I(b_-, q) - \right. \\ &\quad \left. - (bb_+ - c)I(b_+, q) \} \right) + Q, \end{aligned}$$

$$\text{где } I(x_b, q) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x_b}} \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{\sqrt{x_b}}\right), & x_b > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x_b}} \ln \left| \frac{\sqrt{-x_b} - q}{\sqrt{-x_b} + q} \right|, & x_b < 0 \end{cases}.$$

Здесь Q – константа интегрирования, которая должна быть выбрана из условия равенства нулю Φ_{2c} на границе плазмы.

Отметим, что поиск собственной частоты из уравнения (2.47) не вполне тривиален. Первый член в уравнении (2.47) должен быть скомпенсирован членом с малым коэффициентом $\sim \beta$, содержащем комбинации арктангенса и логарифмической функции. Заметная разница $q_1 - q_0$ может быть скомпенсирована либо за счёт малости ϑ , что однако не реализуется при монотонных профилях температуры, либо за счёт расходимости в логарифмическом слагаемом, всегда присутствующем в (2.47) при $T_1 \ll 1$ ($b_- < 0$).

Продemonстрируем это на примере монотонно спадающего профиля $T = q_0^2/q^2$, описываемого (2.45) при $q_m = 0$, $T_1 = q_0^2/q_1^2$. В рассматриваемом случае $b = -2q_0^2/\omega^2(1 + \beta q_0^2/4)$, и $\vartheta = b(b - 2)$ положителен. Дисперсионное соотношение (2.47) сводится к уравнению:

$$q_1 - q_0 - \frac{\beta q_0^2}{8\sqrt{1 + \omega^2(1 + \beta q_0^2/4)/q_0^2}} \times \left\{ \frac{2b_- - 1}{2\sqrt{-b_-}} \ln \left| \frac{\sqrt{-b_-} + q}{\sqrt{-b_-} - q} \right| \Big|_{q_0}^{q_1} + \right.$$

$$+\frac{2b_+-1}{\sqrt{b_+}}\arctg\left(\frac{q}{\sqrt{b_+}}\right)\Big|_{q_0}^{q_1}\Big\}=0. \quad (2.48)$$

Собственная частота, удовлетворяющая (2.48), соответствует малости $|\sqrt{-b_-} - q_0| \ll 1$. Поскольку логарифмическая расходимость является достаточно слабой, для выполнения дисперсионного соотношения величина ω должна быть подобрана очень точно. Такая “сверхчувствительность” закона дисперсии к собственной частоте для заданного профиля температуры позволяет найти ГГАМ только при довольно малой разности $(q_1 - q_0)$ и относительно большой величине β – см. рис. 2.3а ($\beta = 0,04$, $q_1 - q_0 = 0,4$, $q_0 = 1,5$). Поэтому, хотя решение (2.48) и должно существовать всегда, на практике найти его довольно сложно, особенно численно. Область локализации $d\phi_0/dr$ при этом оказывается весьма узкой. Очевидно, что дисперсионному уравнению гораздо легче удовлетворить при малой разности $q_1 - q_0$ и большем множителе βq_0^2 .

При фиксированном q_0 и большей величине q_1 , ГГАМ реализуются при более плоских профилях температуры [105]. Выберем для определённости $q_m = q_0$; $\beta = 0,04$. Для монотонного профиля температуры с $q_0 = 1,5$, $T_1 = 0,005$ решение в виде ГГАМ найдено для $q_1 = 2$ – см рис. 2.3б. Нормированная собственная частота найденного решения $\omega^2 = 2,39$. Радиальная структура полученного решения значительно отличается от собственных функций ранее известных ГГАМ [266, 267], реализующихся в случае наличия локального максимума частоты сплошного спектра ГАМ внутри плазмы (см. подраздел 2.3.3). Возмущение давления, пропорциональное производной нулевой гармоники потенциала, не локализовано на какой-либо определённой магнитной поверхности, а существует в широкой области в центре плазмы с малыми градиентами q и T . Вторая гармоника электрического потенциала также гладкая и не имеет скачков. Хотя амплитуда электромагнитных колебаний мала по сравнению с амплитудой нулевой гармоники, тем не менее их наличие необходимо для реализации глобального решения.

Как обсуждалось ранее, чтобы найти ГГАМ в конфигурации с большей разностью $(q_1 - q_0)$, необходимо конкретизировать собственную частоту всё более и более точно, приближаясь к резонансу в логарифме. При этом профиль возмущённого давления становится более локализованным и смещается в область малых градиентов q и T . Напротив, увеличение q_0 и уплотнение профиля температуры

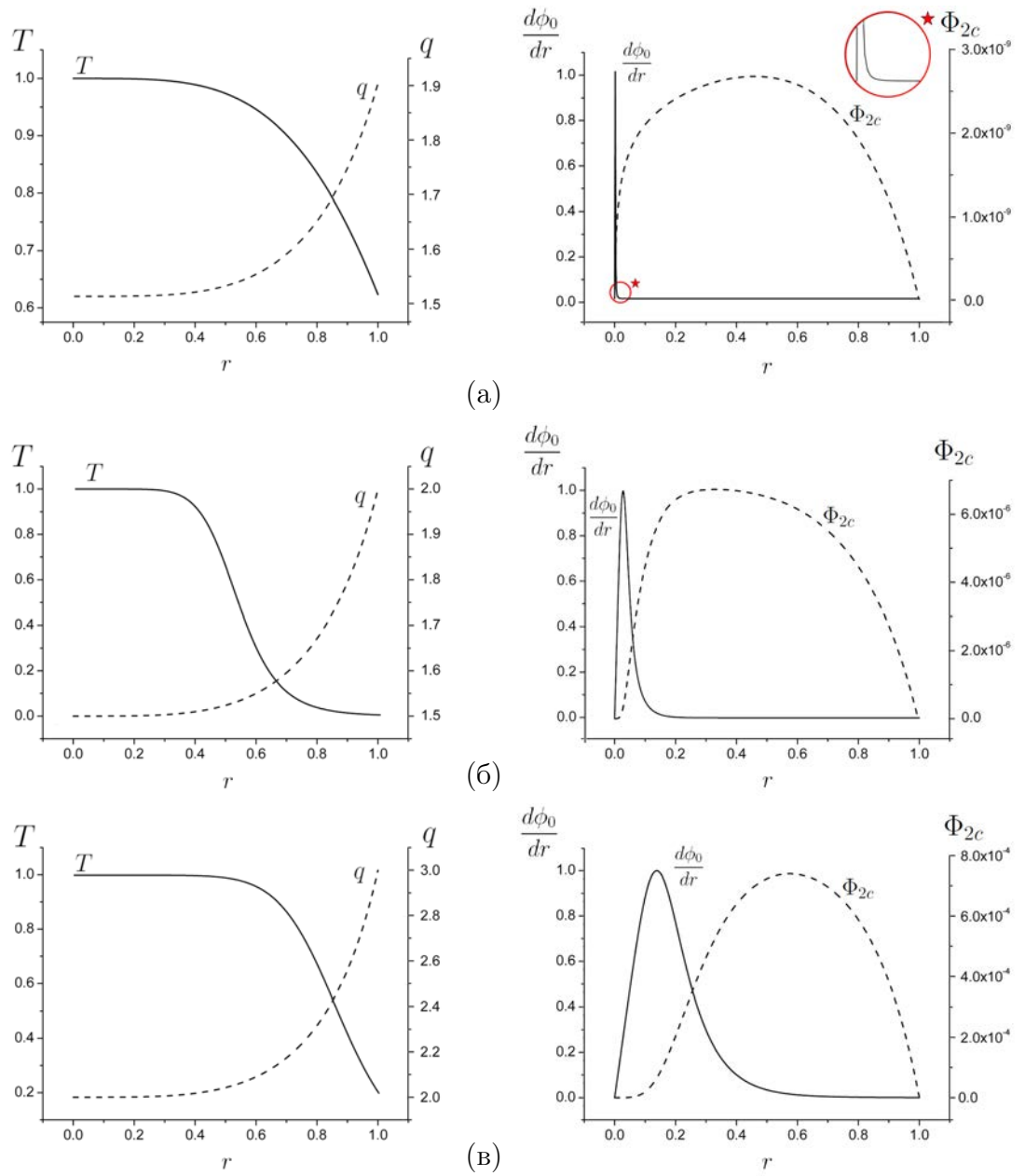


Рис. 2.3: Радиальные профили температуры и коэффициента запаса устойчивости (слева); собственных функций $d\phi_0/dr$ и Φ_{2c} (справа): (а) $q_1 - q_0 = 0,4$, $q_0 = 1,5$, $q_m = 0$, $T_1 = 0,62$; (б) $q_1 - q_0 = 0,5$, $q_0 = 1,5$, $q_m = 1,5$, $T_1 = 0,005$; (в) $q_1 - q_0 = 1$, $q_0 = 2$, $q_m = 2$, $T_1 = 0,2$. Всюду $\beta = 0,04$.

приводит к уширению собственных функций, как показано на рис. 2.3в. Собственная частота последнего из представленных решений: $\omega^2 = 2, 16$.

2.3.3 Глобальные ГАМ в токамаке с максимумом локальной частоты ГАМ

В случае $\vartheta < 0$, что соответствует наличию внеосевого максимума у локальной частоты ГАМ, уравнение (2.46) сводится к

$$\begin{aligned} q_1 - q_0 - \frac{\beta}{8D_4\sqrt{-\vartheta}} \left\{ \frac{(b - \sqrt{c})c_+}{2} \ln \left| \frac{q^2 + qc_- + \sqrt{c}}{q^2 - qc_- + \sqrt{c}} \right| \right|_{q_0}^{q_1} - \\ - c_- \left[b \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2q + c_-}{c_+} \right) \right) \right|_{q_0}^{q_1} + \operatorname{arctg} \left(\frac{2q - c_-}{c_+} \right) \right|_{q_0}^{q_1} \right] + \\ + \sqrt{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{q^2 - \sqrt{c}}{qc_+} \right) \right|_{q_0}^{q_1} \Big\} = 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где использованы обозначения $c_- = \sqrt{2\sqrt{c} - b}$, $c_+ = \sqrt{2\sqrt{c} + b}$. Это трансцендентное уравнение относительно ω^2 . Видно, что дисперсионное уравнение (2.49) легко может быть удовлетворено вблизи $\vartheta = 0$, что соответствует максимальному значению $\omega_{ГАМ}$.

Радиальная структура собственных функций ГГАМ при $\vartheta < 0$ даётся следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_0}{dr} &= \frac{-Kr q^4}{\omega^2(D_0 + D_2 q^2 + D_4 q^4 + \beta q^4/4) - q^2(2 + 1/q^2)}; \quad (2.50) \\ \Phi_{2c} &= \frac{Kq_0 q_1}{4(q_1 - q_0)(1 + \beta/4D_4)} \times \\ &\times \left(q - \frac{\beta}{8D_4\sqrt{-\vartheta}} \left\{ \frac{(b - \sqrt{c})c_+}{2} \ln \left| \frac{q^2 + qc_- + \sqrt{c}}{q^2 - qc_- + \sqrt{c}} \right| - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_- \left[b \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2q + c_-}{c_+} \right) \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2q - c_-}{c_+} \right) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{q^2 - \sqrt{c}}{qc_+} \right) \right] \right\} + G \right). \end{aligned}$$

Здесь G – константа интегрирования, которая должна быть выбрана таким образом, чтобы обеспечить $\Phi_{2c}|_{r=1} = 0$.

На рис. 2.4 представлен пример глобальной геодезической акустической моды, реализующейся при наличии максимума $\omega_{\text{ГАМ}}$, достигнутого за счёт локального роста температуры внутри объёма плазмы. Такой рост, к примеру, может быть обеспечен мощным неосевым дополнительным нагревом плазмы. Рассмотрен профиль коэффициента запаса устойчивости вида (2.40) с $q_0 = 1$ и $q_1 = 3$ и профиль температуры вида (2.45) с максимумом в точке $r = 0,4$, $T_1 = 0,005$ (см. рис. 2.4а). Локальная частота ГАМ при этом достигает своего максимального значения в точке $r_M = 0,38$ (см. рис. 2.4б). При $\beta = 0,04$ решение уравнения (2.49) найдено на частоте $\omega^2 = 3,04$, что соответствует $\vartheta = -3,3 \times 10^{-7}$. Радиальная структура собственных функций представлена на рисунках 2.4б–г. В точке максимума локальной частоты ГАМ, профиль электрического поля ГГАМ сильно пикирован. Электромагнитная часть возмущений не локализована радиально и доходит до границы плазменного шнура – см. рис. 2.4в. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами численного расчёта [266, 267], а также воспроизводятся с помощью метода асимптотической сшивки [104, 269].

На рис. 2.4 построена зависимость электрического потенциала ϕ_0 от r , рассчитанная путём численного интегрирования величины $d\phi_0/dr$. Такая зависимость наиболее интересна с точки зрения сравнения с экспериментальными данными, полученными с помощью диагностики пучком тяжёлых ионов (Heavy Ion Beam Probe – HIBP), посредством которой измеряется именно потенциал. Видно, что амплитуда ϕ_0 практически не меняется с радиусом вплоть до точки r_M , где она терпит скачок. Независимость амплитуды электрического потенциала ГАМ от радиуса наблюдается в эксперименте [76].

2.3.4 О соотношении теории и эксперимента по глобальным ГАМ

Представленный выше анализ ГГАМ был в значительной степени инспирирован явным расхождением наблюдений и сделанных на их основе выводов о глобальном характере ГАМ в действующих токамаках с расчётами, аналогичными пионерской работе [266], допускающими существование ГГАМ лишь при весьма экзотических условиях.

Описанные в предыдущих разделах результаты заметно уменьшили указанное расхождение, причём представительные решения построены даже аналитически. Помимо моды, возможной лишь при наличии внеосевого максимума у частоты сплошного спектра локаль-

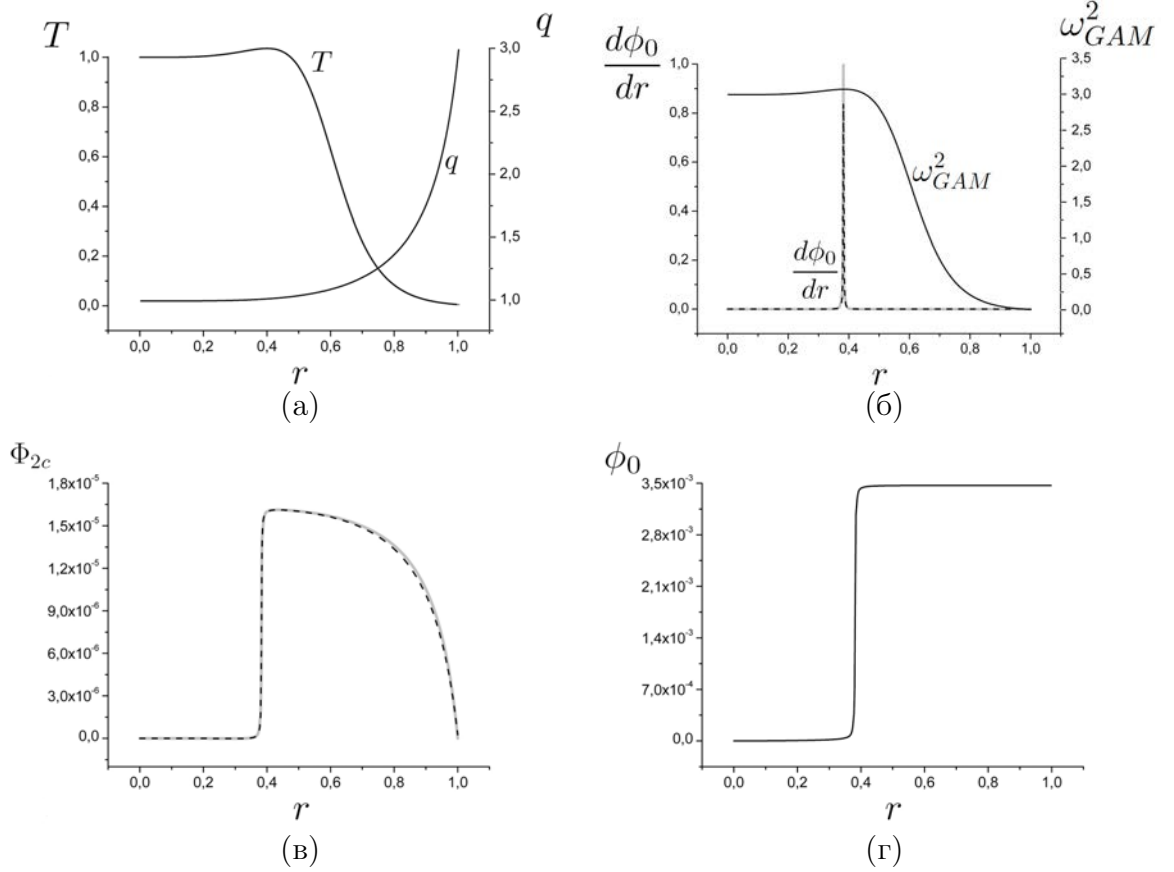


Рис. 2.4: Радиальные профили T и q (а), $d\phi_0/dr$ (б) и ω_{GAM}^2 , Φ_{2c} (в), ϕ_0 (г) для равновесия с максимумом локальной частоты ГАМ, достигнутого за счёт локального роста температуры. На рисунках (б), (в): пунктирные линии – точные аналитические решения, серые сплошные линии – результаты численного расчёта. Здесь $\beta = 0,04$.

ных мод (именно такого типа мода, сильно пикированная вблизи магнитной поверхности с максимумом $\omega_{GAM}(r)$, была обнаружена численно в работах [266,267]), впервые были построены моды иного типа, возможные даже при монотонной зависимости ω_{GAM} от радиуса плазмы. При монотонном профиле температуры и положительном магнитном шире ГГАМ существуют, если профили T и q обладают малыми градиентами в центре плазменного шнура. Глобальная ГАМ не локализована радиально и обладает заметной амплитудой в широком диапазоне r с малым градиентом локальной частоты ГАМ. Электростатический потенциал собственной моды практически не зависит от радиуса плазменного шнура, что соответствует экспериментальным наблюдениям ГАМ [76]. При этом, хотя основное возмущение с полоидальным волновым числом $m = 0$ является электростатическим, оно может быть сцеплено с электромагнитным возмущением $m = 2$.

Отметим, что полоидальная структура $m = 2$ возмущений магнитного поля, ассоциируемых с ГАМ, подтверждена экспериментально – см., например, [75, 270–273].

Найденные аналитические решения для монотонной зависимости ω_{GAM} от r демонстрируют принципиальную возможность существования ГГАМ в типичных разрядах токамака с положительным магнитным широм и монотонными профилями температуры, что является заметным прогрессом в вопросе теоретической интерпретации экспериментальных данных по измерению геодезических акустических мод. Тем не менее окончательного согласия теории с результатами эксперимента пока не достигнуто. Во-первых, использованные при получении аналитического решения пологие профили T и q более соответствуют реакторным условиям, чем типовым условиям современного эксперимента. Во-вторых, аналитически рассчитанная частота собственной моды заметно превосходит измеряемую частоту ГАМ. Отметим, что если пространственная ширина найденной собственной моды оказывается порядка ларморовского радиуса ионов, применимость рассмотренной МГД-модели может быть нарушена; в этом случае необходимо кинетическое рассмотрение. Также существенную роль могут играть и диссипативные эффекты, напротив, “размывая” прирезонансную локализацию градиента ϕ_0 . Еще более значимым может быть влияние стационарного вращения плазмы. Анализ этого эффекта посвящён следующий раздел диссертации.

2.4 Глобальные моды зональных течений в токамаке с тороидальным вращением плазмы

Условия существования глобальной ГАМ могут существенно видоизмениться под влиянием стационарного вращения плазмы. Вращение способно не только модифицировать частоту и структуру существующих мод, но и привести к возникновению новых ветвей колебаний, отсутствующих в статическом равновесии плазмы, которые к тому же могут быть неустойчивыми, что было напрямую продемонстрировано ранее для мод сплошного спектра ГАМ и ЗТ – см., например, [232, 233].

В рамках модели идеальной одножидкостной МГД сплошной спектр шировых течений, ассоциируемых с низкочастотными флуктуациями электрического потенциала $n = 0$, $m = 0$, в осесимметричной тороидально вращающейся плазме токамака характеризуется

следующими двумя ветвями колебаний [204]:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_s^2}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\Gamma M^4}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\Gamma M^4}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Gamma - \alpha}{\alpha} \frac{2M^4}{q^2}} \right\}. \quad (2.51)$$

Здесь M , как и ранее, обозначает звуковое число Маха, рассчитанное по угловой частоте тороидально вращения плазмы Ω , α – параметр, характеризующий тип динамического равновесия плазмы – см. (1.44). Дисперсионные уравнения (2.51) следуют из представленных в разделе 2.2 уравнений при условии $D = 0$ (2.35).

Высокочастотная ветвь (2.51) соответствует геодезической акустической моде, $\omega_+ = \omega_{GAM}$. ГАМ линейно устойчива. Наличие стационарного тороидального вращения плазмы приводит к увеличению частоты ГАМ по сравнению со статическим случаем; при $M = 0$ выражение (2.51) переходит в стандартный закон (2.1) [227]. Низкочастотная ветвь, $\omega_- = \omega_{ZF}$, описывает зональные течения, проявляющиеся в экспериментах в виде осесимметричных колебаний потенциала плазмы на частоте ~ 1 кГц [222], что на порядок ниже частоты ГАМ. В отсутствие тороидального вращения ($M = 0$) частота ЗТ строго равна нулю. Равновесное вращение приводит к конечной величине $\omega_{ZF} \neq 0$. Такие колебания устойчивы при $\alpha < \Gamma$ и апериодически неустойчивы в противном случае. В выделенном случае изоэнтропных магнитных поверхностей ($\alpha = \Gamma$) частота ЗТ всегда равна нулю. Механизм возможной неустойчивости низкочастотных зональных течений связан с полоидальной стратификацией плазмы на магнитной поверхности и был впервые рассмотрен в [232]. При $M \rightarrow 0$ частота/инкремент ЗТ стремится к нулю как $\sim M^2$: $\omega_{ZF} \approx \omega_s M^2 \sqrt{(\Gamma - \alpha)/(2\alpha(1 + 2q^2))}$.

Далее в разделе будут изложены результаты расчёта глобальных мод ЗТ в плазме токамака с тороидальным вращением [125].

2.4.1 Аналитическое решение, описывающее структуру апериодически неустойчивого ЗТ

Для получения аналитических решений, описывающих глобальные зональные течения во вращающейся плазме токамака, снова рассмот-

рим профиль коэффициента запаса устойчивости q вида (2.40) и будем пренебрегать влиянием равновесного продольного тока ($\eta = 0$). Тогда уравнение (2.32) напрямую интегрируется, а система (2.32)–(2.34) приобретает вид [106]:

$$\frac{d\phi_0}{dr} = -\frac{1}{r^2 D} \left\{ G_c \frac{d\Phi_{2c}}{dr} + \frac{2}{\rho} \frac{df}{dr} \left(\omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \Phi_{2c} + G_s \frac{d\Phi_{2s}}{dr} \right\}, \quad (2.52)$$

$$\frac{d\Phi_{2c}}{dr} - \frac{r^2 q^2 G_c}{2\omega_A^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{d\phi_0}{dr} = K_c r^3 q^2,$$

$$\frac{d\Phi_{2s}}{dr} - \frac{r^2 q^2 G_s}{2\omega_A^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} \frac{d\phi_0}{dr} = K_s r^3 q^2,$$

где K_c , K_s – константы, определяющие амплитуды $\sin 2\theta$ - и $\cos 2\theta$ -гармоник возмущений электрического потенциала.

Теперь, исключая

$$\frac{d\phi_0}{dr} = -\frac{2df/dr (\omega^2 - \omega_s^2/q^2) \Phi_{2c}/(\rho r^2) + r q^2 \{K_c G_c + K_s G_s\}}{D^*},$$

из полученной системы, приходим к двум связанным дифференциальным уравнениям для функций Φ_{2c} и Φ_{2s} :

$$D^* \frac{d\Phi_{2c}}{dr} + G_c k \Phi_{2c} = g_c,$$

$$D^* \frac{d\Phi_{2s}}{dr} + G_s k \Phi_{2c} = g_s,$$

где

$$D^* = D + \frac{q^2 (G_c^2 + G_s^2)}{2\omega_A^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)}, \quad k(r) = \frac{q^2}{\rho_0 \omega_A^2} \frac{df}{dr},$$

$$g_c(r) = r^3 q^2 \left\{ K_c D^* - \frac{q^2 G_c}{2\omega_A^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} (K_c G_c + K_s G_s) \right\},$$

$$g_s(r) = r^3 q^2 \left\{ K_s D^* - \frac{q^2 G_s}{2\omega_A^2 (\omega^2 - \omega_s^2/q^2)} (K_c G_c + K_s G_s) \right\}.$$

Условие $D^* = 0$ определяет сплошной спектр ГАМ с учётом вращения и электромагнитных эффектов.

Как и ранее будем полагать нулевые граничные условия для искоемых функций:

$$\Phi_{2c}|_{r=0;a} = 0, \quad \Phi_{2s}|_{r=0;a} = 0. \quad (2.53)$$

В случай твердотельного ($\Omega(r) = \text{const}$) вращения плазмы с $\rho = \rho(\Psi)$ ($\alpha \rightarrow \infty$, что соответствует линейно неустойчивому 3Т) граничные условия (2.53) сводятся к двум интегральным уравнениям

$$\int_0^a \frac{g_c}{D^*} dr = 0; \quad \int_0^a \frac{g_s}{D^*} dr = 0, \quad (2.54)$$

которые должны быть решены относительно ω^2 и отношения констант K_s/K_c .

Используя определения g_c и g_s и исключая из (2.54) отношение констант интегрирования K_s/K_c , приходим к единственному уравнению на частоту собственной моды

$$\omega^2 \left(q_1 - q_0 - \frac{\beta}{2} I_s \Big|_{q_0}^{q_1} \right) \left(q_1 - q_0 - \frac{\beta}{2} I_c \Big|_{q_0}^{q_1} \right) - \frac{\beta^2}{4} \left(\omega I_{cs} \Big|_{q_0}^{q_1} \right)^2 = 0, \quad (2.55)$$

где

$$\begin{aligned} I_c &= \int \frac{q^2 G_c^2}{D^*(\omega^2 - T/q^2)} dq, \quad I_s = \int \frac{q^2 G_s^2}{D^*(\omega^2 - T/q^2)} dq, \\ I_{cs} &= \int \frac{q^2 G_c G_s}{D^*(\omega^2 - T/q^2)} dq, \end{aligned} \quad (2.56)$$

а $|_{q_0}^{q_1}$ обозначает подстановку соответствующих пределов в интегралы. Здесь, как и в уравнениях (2.38), (2.39), описывающих структуру глобальных ГАМ в статической плазме токамака, введён нормированный профиль температуры, T , и частота нормирована на частоту звука в центре плазмы. Величина β определяется отношением квадрата частоты звука к квадрату альфвеновской частоты на оси токамака: $\beta = \omega_s^2/\omega_A^2|_{r=0}$; радиус нормирован на малый радиус токамака.

В качестве примера рассмотрим нормированный профиль температуры плазмы в виде $T = q_0^2/q^2$ и сфокусируемся на поиске собственных решений, соответствующих низкочастотной ветви спектра (2.51), ω_{ZF} . Из условия твердотельного вращения плазмы следует, что $M = M_0/\sqrt{T}$ растёт на радиусе плазменного шнура (M_0 – значение тороидального числа Маха на магнитной оси токамака). Полный профиль тороидального числа Маха характерен для разрядов с ICRH-нагревом и инъекцией нейтральных атомов в направлении против основного тока плазмы (counter-NBI) – см., например, результаты с токамака JET [274]. Рассматриваемые профили параметров плазмы

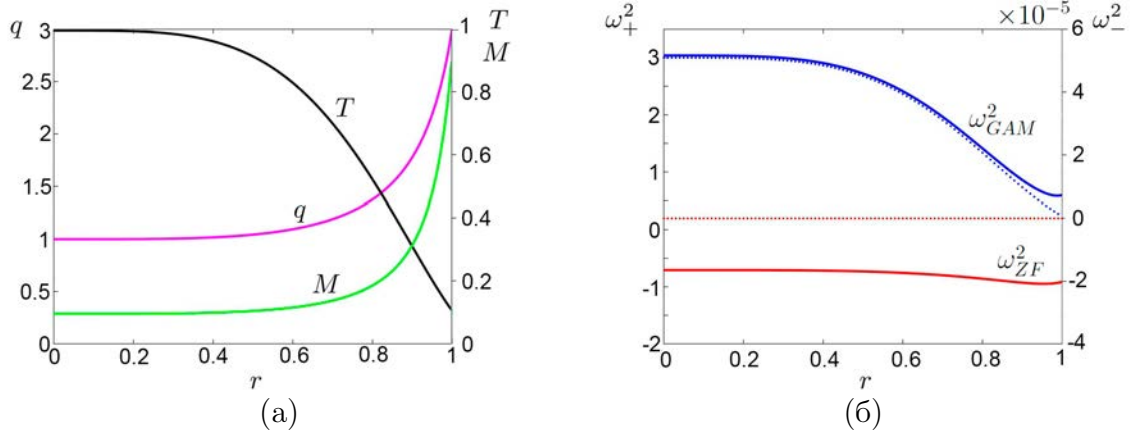


Рис. 2.5: Профили параметров плазмы (а) и соответствующие профили частот сплошного спектра ЗТ $\omega_{\pm}^2$ (2.51) при $\alpha \rightarrow \infty$ (б). Пунктирные линии на рис. (б) показывают $\omega_{\pm}^2$ при $M = 0$. Здесь $q_0 = 1$, $q_1 = 3$, $M_0 = 0, 1$.

при $q_0 = 1$, $q_1 = 3$, $M_0 = 0, 1$ и соответствующая зависимость частоты мод сплошного спектра (2.51) показаны на рис. 2.5. Частота ГАМ монотонно спадает с радиусом, в то время как частота (фактически инкремент) неустойчивых ЗТ обладает внеосевым экстремумом вблизи границы плазмы.

Для низкочастотных зональных течений интегралы (2.56) могут быть аппроксимированы следующими выражениями:

$$I_c = \frac{c^2 \omega^2 \Omega^2}{q_0^2} I_2, \quad I_s = -q_0^2 (b I_2 + c I_0), \quad \omega I_{cs} = -\frac{c \omega^2 \Omega}{2} I_{22}, \quad (2.57)$$

где

$$I_0 = \int \frac{dq}{q^4 + b q^2 + c}, \quad I_2 = \int \frac{q^2 dq}{q^4 + b q^2 + c},$$

$$I_{22} = \int \frac{q^2 dq^2}{q^4 + b q^2 + c}, \quad (2.58)$$

$b = (2q_0^2 + \Omega^4/2\omega^2)/(4\Omega^2 - \omega^2 + 2\beta q_0^2 \Omega^2)$, $c = q_0^2/(4\Omega^2 - \omega^2 + 2\beta q_0^2 \Omega^2)$. В (2.57) удерживались только потенциально резонансные слагаемые, способные внести заметный вклад в дисперсионное уравнение (2.55). Явный вид интегралов (2.58) зависит от знака параметра $\vartheta = b^2 - 4c$, в который помимо параметров равновесной плазмы входит собственная частота колебаний.

При $\beta = 0, 04$ решение уравнения (2.55) было найдено на частоте $\omega^2 = -2, 08 \cdot 10^{-5}$, соответствующей $\vartheta = -0, 1$ [121]. Собственные

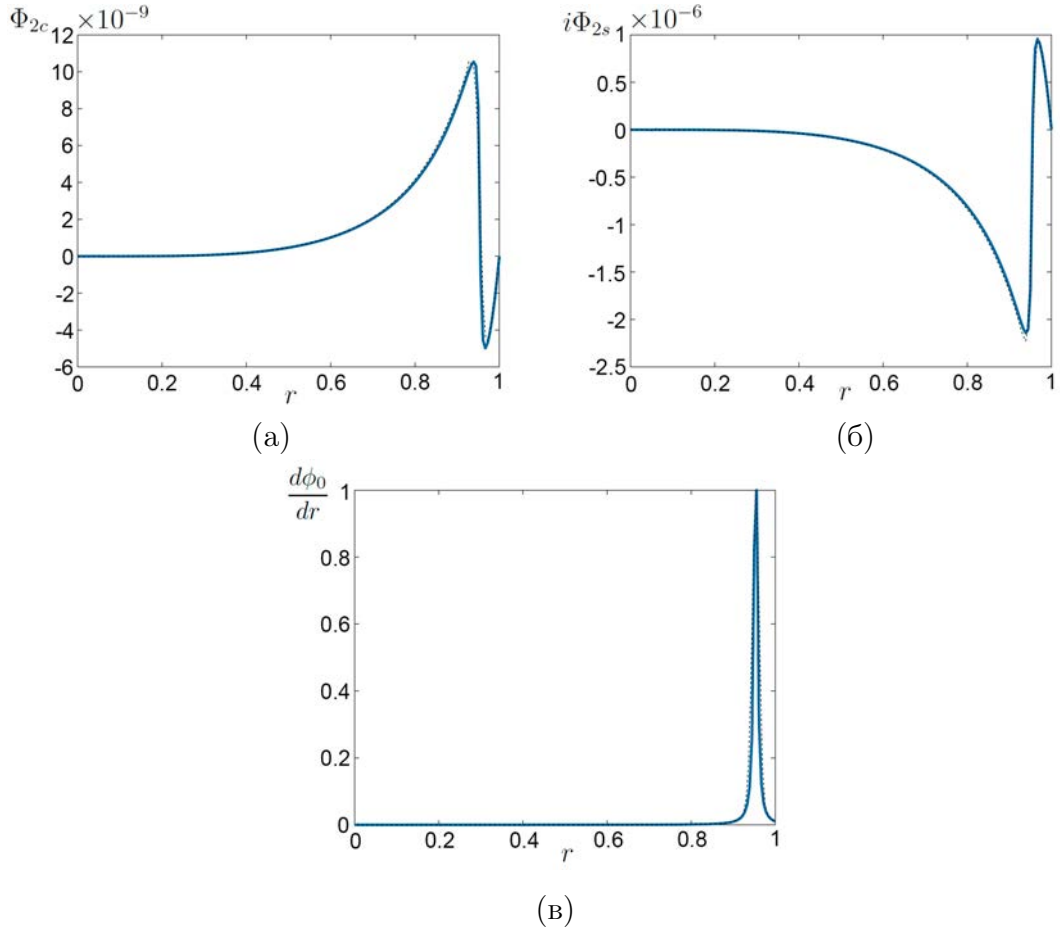


Рис. 2.6: Собственные функции неустойчивого ЗТ с $\omega^2 = -2,08 \cdot 10^{-5}$: (а) Φ_{2c} , (б) $i\Phi_{2s}$, (в) $d\phi_0/dr$, найденные аналитически для профилей параметров плазмы, представленных на рис. 2.5, и $\rho_0(r) = \text{const}$. Здесь $\beta = 0,04$, $\eta = 0$. Константа K_c выбрана таким образом, чтобы нормировать $d\phi_0/dr$ на единицу. Пунктирные кривые показывают результат численного решения той же задачи.

функции этого решения показаны на рис. 2.6. Для их расчёта использовались следующие выражения:

$$\Phi_{2c} = \frac{K_c q_1 q_0}{4(q_1 - q_0)} \left(q - \frac{\beta}{2} I_c - \frac{\beta \omega K_s \omega I_{cs}}{2 K_c \omega^2} \right) + C_0,$$

$$\omega \Phi_{2s} = \frac{K_c q_1 q_0}{4(q_1 - q_0)} \left(\frac{\omega K_s}{K_c} \left(q - \frac{\beta}{2} I_s \right) - \frac{\beta}{2} \omega I_{cs} \right) + S_0,$$

где

$$\frac{\omega K_s}{K_c} = \omega^2 \left(2(q_1 - q_0) - \beta I_c \Big|_{q_0}^{q_1} \right) / \left(\beta \omega I_{cs} \Big|_{q_0}^{q_1} \right).$$

Константы интегрирования C_0 и S_0 выбраны таким образом, чтобы обеспечить нулевые граничные значения Φ_{2c} и Φ_{2s} . При отрицательном ϑ запись интегралов (2.58) через элементарные функции

имеет следующий вид:

$$I_0 = \frac{1}{4\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt{-\vartheta}} \left(c_p \ln \left| \frac{q^2 + c_m q + \sqrt{c}}{q^2 - c_m q + \sqrt{c}} \right| + 2c_m \operatorname{atan} \left(\frac{q^2 - \sqrt{c}}{q_0 c_p} \right) \right),$$

$$I_2 = -\frac{1}{4\sqrt{-\vartheta}} \left(c_p \ln \left| \frac{q^2 + c_m q + \sqrt{c}}{q^2 - c_m q + \sqrt{c}} \right| - \right. \\ \left. - 2c_m \left(\operatorname{atan} \left(\frac{2q + c_m}{c_p} \right) + \operatorname{atan} \left(\frac{2q - c_m}{c_p} \right) \right) \right),$$

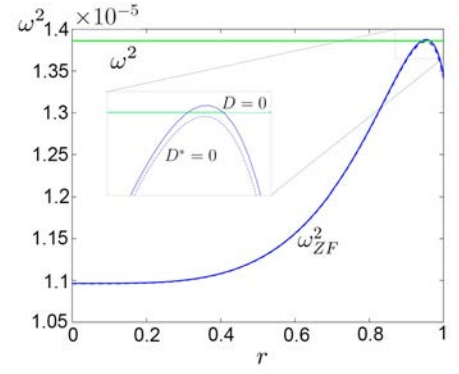
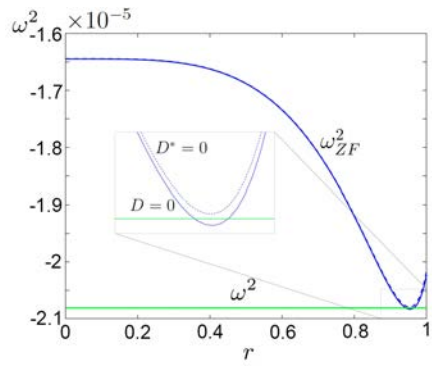
$$I_{22} = \frac{1}{2} \ln |q^4 + bq^2 + c| - \frac{b}{\sqrt{-\vartheta}} \operatorname{atan} \left(\frac{2q^2 + b}{\sqrt{-\vartheta}} \right),$$

где $c_m = \sqrt{2\sqrt{c} - b}$, $c_p = \sqrt{2\sqrt{c} + b}$. После определения собственной частоты и отношения K_s/K_c радиальное распределение электрического поля глобальной моды ЗТ $\sim d\phi_0/dr$ напрямую рассчитывается из уравнения (2.52).

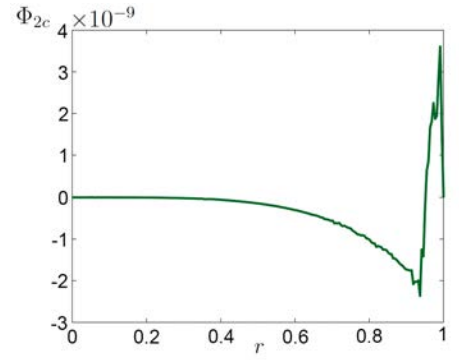
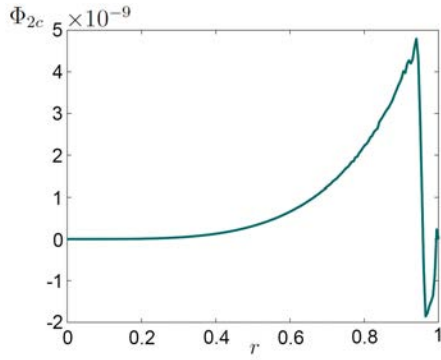
Полученное решение обладает гладкой радиальной структурой. Как электромагнитные, так и электростатические возмущения глобальной моды локализованы преимущественно на периферии плазменного шнура, что обусловлено положением минимума частоты сплошного спектра ЗТ – см. рис. 2.5б. Собственная частота решения лежит между экстремумами сплошного спектра, рассчитанного с учётом ($D^* = 0$) и без учёта ($D = 0$) электромагнитных возмущений, как и для глобальной ГАМ (см. раздел 2.3), и может быть приближённо определена из условия $\vartheta \approx 0$, которое даёт $\omega^2 \approx -\Omega^4/(4q_0^2(1 + 2\Omega/q_0)) = -2,083 \cdot 10^{-5}$. В отличие от ГГАМ в полоидальной структуре ЗТ доминирует возмущение $\sin 2\theta$ -гармоники $\sim \Phi_{2s}$, связанное с вращением плазмы.

2.4.2 Численные решения с учётом эффектов равновесного продольного тока

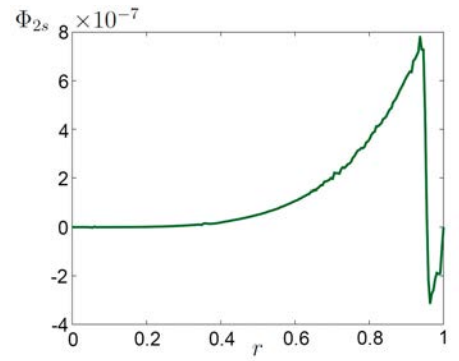
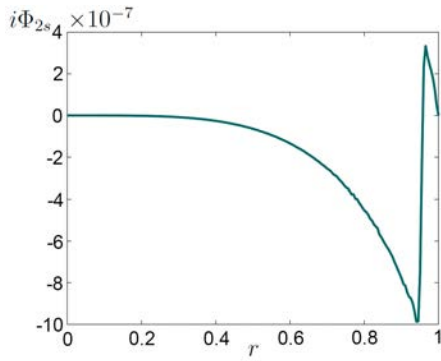
Численное решение уравнений (2.32)–(2.34) может быть проведено для любых произвольных профилей параметров плазмы. Далее представлены результаты расчёта глобальной моды ЗТ для более реалистичного спадающего профиля плотности плазмы $\rho_0 = \rho_0|_{r=0}/q$ и с учётом эффекта продольного тока ($\eta \neq 0$). Наряду со случаем $\alpha \rightarrow \infty$



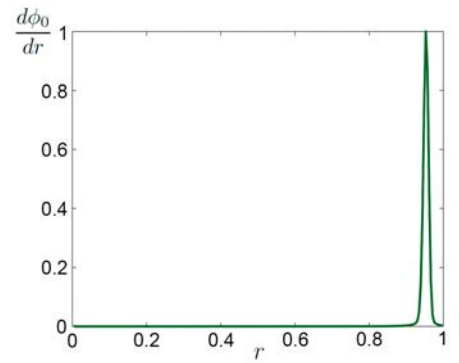
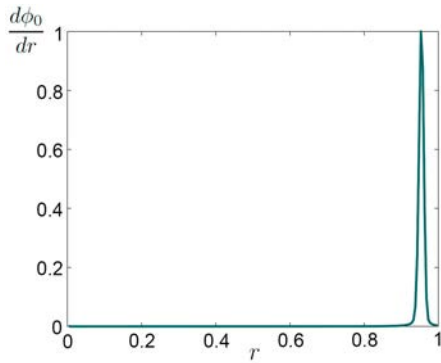
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 2.7: Неустойчивое ЗТ с $\omega^2 = -2,081 \cdot 10^{-5}$ при $\alpha = 100000$ (левый столбец) и устойчивое ЗТ с $\omega^2 = 1,386 \cdot 10^{-5}$ при $\alpha = 1$ (правый столбец): (а) ω^2 , (б) Φ_{2c} , (в) $i\Phi_{2s}$ (слева) и Φ_{2s} (справа), (г) $d\phi_0/dr$, найденные численно для профилей параметров плазмы, показанных на рис. 2.5, и $\rho_0 \sim 1/q$. Здесь $\beta = 0,04$.

рассмотрено изотермическое равновесие с $\alpha = 1$, характеризующееся устойчивым спектром низкочастотных ЗТ – см. (2.51).

Результаты численного интегрирования уравнений (2.32)–(2.34) представлены на рис. 2.7: левый столбец – магнитные поверхности с $\rho = \rho(\Psi)$, $\alpha \rightarrow \infty$; правый столбец – магнитные поверхности с $T = T(\Psi)$, $\alpha = 1$. Видно, что при $\alpha \rightarrow \infty$ результаты численного расчёта хорошо согласуются с упрощённым аналитическим рассмотрением, представленным ранее. Область локализации мод и их структура практически совпадают, а собственные частоты решений различаются в четвёртом значащем знаке. Главное различие заключается в амплитудах вторых гармоник возмущений потенциала плазмы при одинаковой нормировке для $d\phi_0/dr$.

В случае устойчивого равновесия с $\alpha = 1$ решение найдено на частоте $\omega^2 = 1,386 \cdot 10^{-5}$ вблизи максимума низкочастотной ветки сплошного спектра ω_{ZF} . Как и у неустойчивого ЗТ радиальное электрическое поле собственной моды локализовано на краю плазменного шнура. Вторые гармоники потенциала не локализованы и испытывают скачок производной в точке экстремума ω_{ZF} .

2.5 Нелинейное взаимодействие ГАМ-ЗТ

Ранние систематические экспериментальные исследования ГАМ на установке ASDEX Upgrade [82] выявили ряд явлений, не описываемых стандартной теорией непрерывного спектра ГАМ [227]. Измерения флуктуаций радиального электрического поля методом доплеровской рефлектометрии показали, что амплитуда ГАМ модулирована с глубиной модуляции вплоть до 50%, что выражается в периодической перемежаемости сигнала (с периодом в несколько миллисекунд) и в смещении спектрального пика частоты ГАМ. Причиной такого поведения может быть временная модуляция огибающей интенсивности ГАМ низкочастотным ЗТ. На амплитудную модуляцию колебаний ГАМ низкочастотным ЗТ впервые, по-видимому, было указано в работе [275] при анализе спектров турбулентности, рассчитанных дрейфово-альфвеновским кодом DALF3. Процесс нелинейного самовоздействия ГАМ рассматривался в [276] с выводом о генерации второй гармоники ГАМ; однако экспериментально этот эффект не наблюдается [86, 221]. В гирокинетическом рассмотрении были показаны возможности нелинейного возбуждения ГАМ ТАЕ-модой (Toroidal Alfvén Eigenmode) [277] и ЗТ нулевой частоты нелинейной ГАМ [278].

В [241] низкочастотная модуляция ГАМ объяснялась особенностями динамики волновых пакетов ГАМ в неоднородной среде.

Проявления эффекта модуляции наблюдались позже на многих других токамаках – см., например, [77,87,89,90,279] – и стали предметом интенсивных исследований. Так, исследования с использованием диагностики пучком тяжёлых ионов на токамаке T-10 [77,86,221,280] позволили установить, что в большинстве разрядов в спектре колебаний потенциала плазмы вблизи теоретически рассчитанной частоты ГАМ присутствуют два амплитудных пика, разделённые интервалом ~ 5 кГц; для более высокочастотного пика авторы использовали термин сателлит.

На существование ЗТ имеются прямые указания в экспериментах [222], хотя их экстремально низкая частота существенно затрудняет возможность достоверной идентификации моды по сравнению с той же ГАМ. На токамаке T-10 систематические исследования ЗТ не проводились, однако опубликованные спектрограммы колебаний электрического потенциала плазмы в ряде разрядов [281] отчётливо демонстрируют наличие амплитудного пика колебаний в районе ~ 2 кГц, который естественно ассоциировать с ЗТ. Присутствие ЗТ в плазме T-10 также обнаруживают средства корреляционной рефлектометрии [221].

Далее представлены результаты расчётов нелинейной динамики ГАМ и ЗТ в плазме токамака и показано её соответствие экспериментальным наблюдениям, описанным выше. Показано, что наблюдаемая экспериментально “двугорбость” спектра ГАМ (наличие сателлита) является естественным следствием нелинейного взаимодействия собственных мод потенциальных колебаний плазмы, ГАМ и ЗТ. Для такого взаимодействия существенными факторами оказываются кривизна магнитного поля и наличие стационарного тороидального вращения плазмы. Первый приводит к зацеплению колебаний электрического потенциала и давления плазмы, формируя ГАМ, а второй обеспечивает ненулевую частоту ЗТ. К формированию ЗТ конечной частоты могут приводить и иные эффекты, в том числе дрейфовые [282], анизотропия давления плазмы [229, 283] и др.

2.5.1 МГД-модель нелинейной динамики флуктуаций электрического потенциала плазмы в токамаке

Для моделирования нелинейной динамики осесимметричных флуктуаций электрического потенциала и сцепленных с ними возмущений плотности, давления и продольной скорости плазмы в классическом токамаке с большим аспектным отношением используем уравнения идеальной МГД-модели (2.2)–(2.6), учитывая в них квадратичные по амплитуде возмущений нелинейности. Кубическими нелинейностями можно пренебречь по малости обратного аспектного отношения.

В главном порядке разложения по обратному аспектному отношению для равновесия плазмы со стационарным тороидальным течением (см. подраздел 1.2.2) из уравнений (2.3), (2.4) и проекции уравнения движения (2.2) на направление магнитного поля следуют уравнения, описывающие динамику массовой плотности, давления и продольной скорости плазмы:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\rho}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla v'_{\parallel} - cFA' \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\rho}{B^2} = \frac{cFA'}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \rho', \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\Gamma p}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla v'_{\parallel} - cFA' \times \\ & \times \left(\Gamma p \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla p \right) = \frac{cFA'}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla p', \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial v'_{\parallel}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla p'}{B\rho} - \frac{c\Omega A'}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 = \frac{cFA'}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla v'_{\parallel}. \quad (2.61)$$

Левые части уравнений (2.59)–(2.61) содержат линейные по амплитуде возмущений слагаемые, в правых частях собраны квадратичные нелинейности. Введена переменная $A'(\Psi) \equiv d\phi'/d\Psi$, имеющая смысл амплитуды возмущений радиального электрического поля.

Условие квазинейтральности (2.5) после подстановки выражения для плотности поперечного тока из уравнения баланса сил (2.2) и усреднения по магнитной поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} & \oint \left[p' \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + \frac{c\rho |\nabla \Psi|^2}{FB^2} \frac{\partial A'}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{\Omega}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \left(\frac{\Omega \rho'}{2} + \frac{\rho v'_{\parallel}}{R} \right) \right] d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

и явно не содержит нелинейных слагаемых.

Уравнения (2.59)–(2.61) и (2.62) формируют замкнутую систему уравнений, описывающую динамику рассматриваемого типа течений в осесимметричной плазме токамака [127].

После подстановки явного вида оператора $\mathbf{B} \cdot \nabla \dots = B_a/(qR)\partial \dots / \partial \theta$, нормировки времени, $T = t\omega_s$, и введения безразмерных переменных $\tilde{A} = cA'/\omega_s$, $\tilde{\rho} = qR_0\rho'/(r\rho)$, $\tilde{p} = qR_0p'/(r\Gamma p)$, $\tilde{v} = qv'_{\parallel}/(r\omega_s)$ уравнения (2.59)–(2.62) принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T} + \frac{1}{q} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \tilde{A} \sin \theta \left(2 + \frac{\Gamma}{\alpha} M^2 \right) &= \frac{\tilde{A}}{q} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial T} + \frac{1}{q} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \tilde{A} \sin \theta (2 + M^2) &= \frac{\tilde{A}}{q} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial T} + \frac{1}{q} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + 2\tilde{A}M \sin \theta &= \frac{\tilde{A}}{q} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta}, \\ \pi \frac{\partial \tilde{A}}{\partial T} - \oint \sin \theta \left(\tilde{p} + M\tilde{v} + \frac{M^2}{2} \tilde{\rho} \right) d\theta &= 0.\end{aligned}$$

Будем искать их решение в форме первых полоидальных гармоник функций $\tilde{f} = \{\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{v}\}$:

$$\tilde{f}(r, \theta, t) = f_s(r, t) \sin \theta + f_c(r, t) \cos \theta.$$

Возмущение электрического поля есть функция магнитной поверхности и не зависит от полоидального угла, $\tilde{A} \equiv A(r, t)$. Зависимость от r всех искомых возмущений предполагается в виде δ -функции радиуса: рассматриваются возмущения строго локализованные на магнитных поверхностях (2.14).

Итоговая система уравнений – объект последующего численного анализа – имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_c}{\partial T} + \frac{v_s}{q} &= \frac{A}{q} \rho_s, & \frac{\partial \rho_s}{\partial T} - \frac{v_c}{q} + A \left(2 + \frac{\Gamma}{\alpha} M^2 \right) &= -\frac{A}{q} \rho_c, \\ \frac{\partial p_c}{\partial T} + \frac{v_s}{q} &= \frac{A}{q} p_s, & \frac{\partial p_s}{\partial T} - \frac{v_c}{q} + A (2 + M^2) &= -\frac{A}{q} p_c, \\ \frac{\partial v_c}{\partial T} + \frac{p_s}{q} &= \frac{A}{q} v_s, & \frac{\partial v_s}{\partial T} - \frac{p_c}{q} + 2AM &= -\frac{A}{q} v_c,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial T} - p_s - Mv_s - \frac{M^2}{2}\rho_s = 0. \quad (2.63)$$

Нелинейная динамика флуктуаций описывается системой из семи зацепленных дифференциальных уравнений первого порядка: одно уравнение описывает временную эволюцию электрического поля и по два уравнения на динамику полоидальных гармоник давления, плотности и продольной скорости. Это в совокупности с зависимостью характеристик зональных течений от стационарного состояния плазмы делает возможным существование большого набора режимов колебаний в рассматриваемой системе.

Можно показать, что система (2.63) обладает по крайней мере двумя точными интегралами:

$$I_1 = A^2 + \frac{v_s^2 + v_c^2 + p_s^2 + p_c^2}{2} + qM^2(p_c - \rho_c), \quad (2.64)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(p_s - \rho_s)^2 + \frac{1}{2}(p_c - \rho_c)^2 + qM^2(p_c - \rho_c) \left(1 - \frac{\Gamma}{\alpha}\right). \quad (2.65)$$

Интегралы (2.64), (2.65) удобно использовать для верификации численных расчётов.

Без учёта нелинейностей (правых частей уравнений) система (2.63) приводит к известному дисперсионному уравнению (2.51) для частот ГАМ и ЗТ в тороидально вращающейся плазме токамака.

2.5.2 Теоретическая модель сателлитов ГАМ

Представим упрощённое аналитическое решение уравнений (2.63), объясняющее формирование сателлитов ГАМ. Анализ основывается на методе теории слабой турбулентности, предполагающем, что нелинейное взаимодействие собственных колебаний плазмы (в рассматриваемом случае ГАМ и низкочастотного ЗТ) приводит к тому, что их амплитуды становятся медленно меняющимися функциями времени [284]. Помимо этого будем пренебрегать самовоздействием мод, а нелинейность учтём итеративно, используя линейные выражения для возмущённых величин в нелинейных слагаемых.

При таком подходе система уравнений (2.63) сводится к только трём уравнениям для функций p_s , p_c и A . Исключая возмущения ρ' и $v'_\parallel$, имеем:

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial T^2} + \frac{p_s}{q^2} + (2 + M^2) \frac{\partial A}{\partial T} = -\frac{1}{q} \left(p_c \frac{\partial A}{\partial T} + 2A \frac{\partial p_c}{\partial T} \right), \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial T^2} + \frac{p_c}{q^2} - \frac{2MA}{q} = \frac{1}{q} \left(p_s \frac{\partial A}{\partial T} + 2A \frac{\partial p_s}{\partial T} + (2 + M^2) A^2 \right), \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + 2AM^2 + A \frac{M^4}{2} \left(\frac{\Gamma}{\alpha} - 1 \right) - \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) \frac{\partial p_s}{\partial T} - \frac{Mp_c}{q} = \\ = -MA \left(\frac{\partial p_s}{\partial T} + (2 + M^2)A \right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

В линейном приближении $p_{c,s} = p_{c,s}^c \cos(\omega T) + p_{c,s}^s \sin(\omega T)$, $A = A^c \cos(\omega T) + A^s \sin(\omega T)$ и уравнения (2.66), (2.67) определяют линейные связи между флуктуациями давления и электрического поля в рассматриваемых модах

$$p_s^{c,s} = \pm \frac{(2 + M^2)\omega A^{s,c}}{(\omega^2 - 1/q^2)}, \quad p_c^{c,s} = -\frac{2MA^{c,s}}{q(\omega^2 - 1/q^2)}. \quad (2.69)$$

Здесь и далее в разделе частоты измеряются в единицах ω_s .

Для дальнейшего анализа разложим возмущения давления плазмы и электрического поля на флуктуации типа ГАМ и ЗТ, а именно

$$p_{c,s} = p_{GAM c,s} + p_{ZF c,s}, \quad A = A_{GAM} + A_{ZF}.$$

Далее будем пренебрегать самовоздействием мод и рассматривать нелинейную динамику ГАМ под влиянием “заданной” линейной собственной моды ЗТ постоянной амплитуды, в которой возмущения давления и электрического поля связаны линейными соотношениями (2.69) с подстановкой $\omega = \omega_{ZF}$, заданной (2.51). Постоянство амплитуды ЗТ оправдано сильным взаимодействием зональных течений с дрейфовой турбулентностью в реальных условиях эксперимента [285], что делает их огромным энергетическим резервуаром.

Поскольку частота ЗТ существенно ниже частоты ГАМ, будем полагать, что наличие ЗТ в силу нелинейности приводит к медленному изменению амплитуды ГАМ. Таким образом, будем искать решение уравнений (2.66)–(2.68) для ГАМ в виде

$$p_{GAM c,s} = \bar{p}_{c,s}^c(T) \cos(\omega_{GAM} T) + \bar{p}_{c,s}^s(T) \sin(\omega_{GAM} T),$$

$$A_{GAM} = \bar{A}^c(T) \cos(\omega_{GAM} T) + \bar{A}^s(T) \sin(\omega_{GAM} T),$$

где $\bar{p}_{c,s}^{c,s}$ и $\bar{A}^{c,s}$ – зависящие от времени амплитуды колебаний давления и электрического поля ГАМ, при этом

$$\frac{\partial \bar{p}_{c,s}^{c,s}}{\partial T} \ll \omega_{GAM} \bar{p}_{c,s}^{c,s}, \quad \frac{\partial \bar{A}^{c,s}}{\partial T} \ll \omega_{GAM} \bar{A}^{c,s}.$$

Такое представление естественно для учёта взаимодействия мод существенно различных частот.

Тогда исходные уравнения разбиваются на “быстрые” и “медленные” уравнения. Быстрые уравнения совпадают с линейными уравнениями и сводятся к выражению для собственной частоты ГАМ. Медленные уравнения описывают изменение амплитуды ГАМ в результате нелинейного взаимодействия с ЗТ:

$$\begin{aligned} \omega_{GAM} \frac{\partial \bar{p}_s^{c,s}}{\partial T} \mp \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\partial \bar{A}^{s,c}}{\partial T} = \\ = \frac{M\omega_{GAM}}{q^2} \left(\frac{1}{\omega_{ZF}^2 - 1/q^2} + \frac{2}{\omega_{GAM}^2 - 1/q^2} \right) A_{GAM}^{c,s} A_{ZF}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \omega_{GAM} \frac{\partial \bar{A}^{c,s}}{\partial T} \pm \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \frac{\partial \bar{p}_s^{s,c}}{\partial T} = \\ = \pm M \left(1 + \frac{M^2}{2}\right) \left(2 - \frac{\omega_{GAM}^2}{\omega_{GAM}^2 - 1/q^2}\right) A_{GAM}^{s,c} A_{ZF}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Для вывода уравнений (2.70), (2.71) в правых частях уравнений (2.66)–(2.68) использовались линейные собственные моды и присутствующие им соотношения (2.69). Теперь, исключая $\partial \bar{p}_s^{c,s}/\partial T$, приходим к уравнению, описывающему изменение амплитуды электрического поля ГАМ во времени под воздействием ЗТ:

$$\frac{\partial \bar{A}^{c,s}}{\partial T} = \mp \nu A_{GAM}^{s,c} A_{ZF} \quad (2.72)$$

где ω_{GAM} , ω_{ZF} – собственные частоты (2.51), а

$$\nu \approx \frac{M(1 + M^2/2)\omega_{GAM}}{q^2(2\omega_{GAM}^2 - (1 + M^2/2)^2)} \left[\frac{4}{\omega_{GAM}^2 - 1/q^2} + \frac{3}{\omega_{ZF}^2 - 1/q^2} \right]$$

– коэффициент нелинейного взаимодействия ГАМ и ЗТ с учётом $\omega_{ZF} \ll \omega_{GAM}$.

Правая часть уравнения (2.72) пропорциональна произведению амплитуд колебаний электрического поля ГАМ и ЗТ, а также частоте стационарного вращения плазмы. Таким образом, в отсутствие стационарного вращения моды не взаимодействуют, и амплитуда ГАМ постоянна.

В качестве примера выберем начальные фазы ГАМ и ЗТ равными нулю: $A_{GAM}^s = A_{ZF}^s = 0$. Интегрируя уравнение (2.72) по времени,

приходим к окончательному выражению, описывающему динамику ГАМ

$$A_{GAM}(T) = A_{GAM}^c \left(\cos(\omega_{GAM}T) + \frac{\eta \omega_{GAM}}{2 \omega_{ZF}} (\cos(\omega_{GAM} - \omega_{ZF})T - \cos(\omega_{GAM} + \omega_{ZF})T) \right). \quad (2.73)$$

Согласно (2.73) нелинейность приводит к амплитудной модуляции ГАМ низкой частотой ЗТ. Даже в случае $|\eta| \ll 1$, где $\eta = \nu A_{ZF}^c / \omega_{GAM}$, большой множитель $\omega_{GAM} / \omega_{ZF}$ делает возможным существование режимов с большой глубиной модуляции.

Первое слагаемое в (2.73) соответствует “исходному” ГАМ. Таким образом, итоговое колебание ГАМ представляет собой сумму трёх колебаний с частотами ω_{GAM} , $\omega_{GAM} + \omega_{ZF}$ и $\omega_{GAM} - \omega_{ZF}$. На языке радиотехники колебание на частоте ω_{GAM} является несущим. Две остальные гармоники описывают спутники ГАМ.

Коэффициент $k = \eta \omega_{GAM} / \omega_{ZF}$ определяет глубину модуляции. Он пропорционален амплитуде ЗТ, а именно, отношению возмущения тороидальной скорости $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа к скорости звука и обратно пропорционален тороидальному числу Маха. Поскольку частота ЗТ пропорциональна квадрату числа Маха, при стремлении стационарной скорости вращения к нулю эффект модуляции будет пропадать, несмотря на усиление коэффициента, характеризующего глубину модуляции. Так же спутники ГАМ естественным образом пропадают при стремлении к нулю амплитуды ЗТ.

Для сравнения с экспериментом удобно переписать параметр k , определяющий глубину модуляции, через отношение электрических полей, связанных с ЗТ, E'_{ZF} , и со стационарным вращением плазмы, E_0 . Для определённости далее рассмотрим равновесие, в котором магнитные поверхности являются изотермами, т.е. $\alpha = 1$, $\Gamma = 5/3$, считая при этом $1/q^2 \ll 1$. Тогда $k \approx 2\sqrt{3}qE'_{ZF}/E_0$.

На рис. 2.8а приведены экспериментально измеренные спектры колебаний электрического потенциала в плазме токамака Т-10 в омической стадии разряда (слева) и в стадии разряда с комбинированным (центральным и нецентральным) ЭЦР-нагревом плазмы (справа) [281]. В омической стадии выделяются два пика вблизи частоты ГАМ ($f \approx 19$ кГц и $f \approx 23$ кГц), также отчётливо виден дополнительный максимум в районе 2 кГц, который, согласно выдвинутой

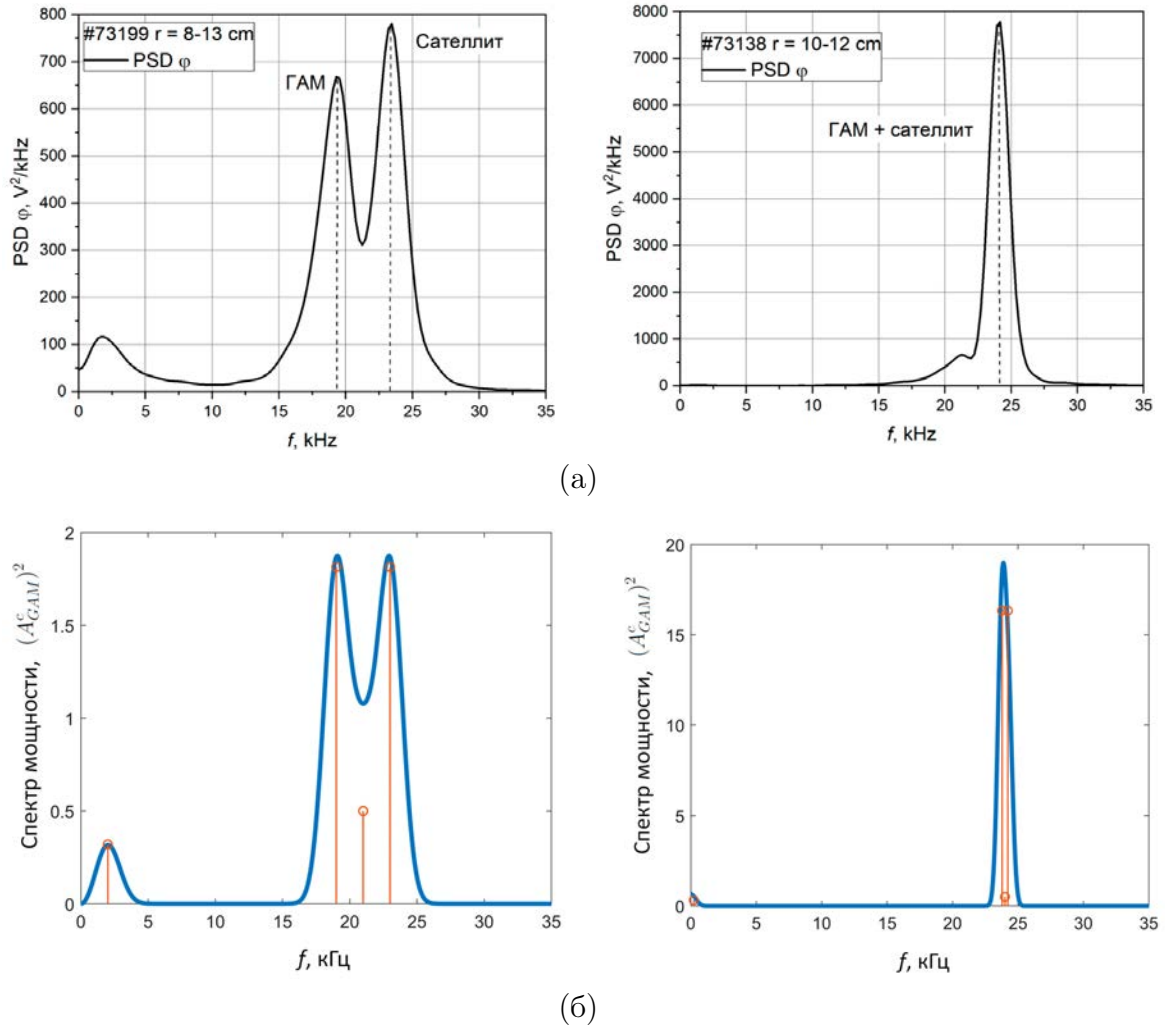


Рис. 2.8: Спектр мощности (а) колебаний потенциала плазмы на токамаке Т-10 [281], (б) сигнала $A(t) = A_{GAM} + A_{ZF}$, рассчитанного с помощью уравнения (2.73). Слева на (а) – омическая стадия разряда, на (б) – расчёт с $E'_{ZF}/E_0 = -0,55$, $f_{GAM} = 21$ кГц, $f_{ZF} = 2$ кГц; справа на (а) – стадия разряда с комбинированным ЭЦР-нагревом, на (б) – расчёт с $E'_{ZF}/E_0 = 1,65$, $f_{GAM} = 24$ кГц, $f_{ZF} = 0,2$ кГц.

гипотезе, соответствует ЗТ. Режим с мощным дополнительным нагревом характеризуется наличием одного пика на частоте $f \sim 24$ кГц. Конечная ширина спектров обусловлена ограниченным по времени измерением цуга сигнала ГАМ – см. [266, 286]. Простое сопоставление представленных рисунков демонстрирует очевидную корреляцию наличия сателлита с присутствием ЗТ.

Наблюдаемая картина описывается предложенной моделью. На рис. 2.8б представлены рассчитанные спектры мощности сигнала колебаний электрического поля $A(t) = A_{GAM} + A_{ZF}$, где A_{GAM} определяется уравнением (2.73). Частоты мод определены данными экспериментов: на рис. 2.8б (слева) $f_{GAM} = 21$ кГц, $f_{ZF} = 2$ кГц; на

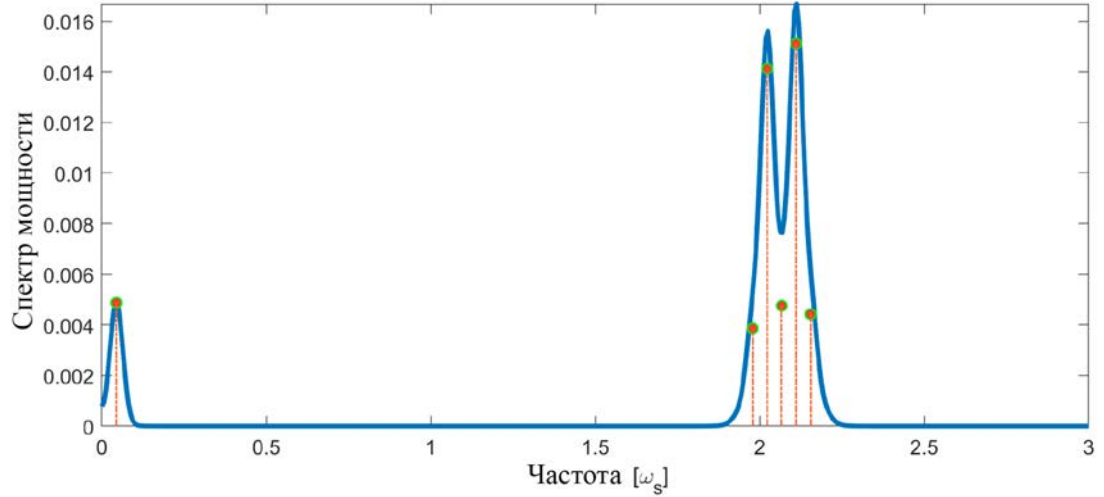
рис. 2.8б (справа) $f_{GAM} = 24$ кГц, $f_{ZF} \approx 0$. Частота дискретизации в обоих расчётах – 200 кГц. Для сопоставления с экспериментом анализируются сигналы конечной длины в 1, 3 мс (слева) и 3, 6 мс (справа) с наложением окна Кайзера с параметром 24. Точками на 2.8б показан спектр мощности, полученный путём Фурье-преобразования “идеального” гармонического сигнала бесконечной длины без умножения на функцию окна. Амплитуда зонального течения выбрана равной $A_{ZF}^c = 0,8A_{GAM}^c$; $q = 2$.

Будем полагать, что в омическом режиме величина электрического поля, связанного со стационарным вращением плазмы, превышает поле ЗТ, $E'_{ZF}/E_0 = -0,55$, что соответствует $k = -3,8$ ($\eta = 0,36$). Спектр мощности соответствующего сигнала, представленный на рис. 2.8б (слева), помимо низкочастотного максимума, связанного с ЗТ, демонстрирует наличие двух пиков на частотах $f_{GAM} - f_{ZF} = 19$ кГц и $f_{GAM} + f_{ZF} = 23$ кГц. Помимо этого в модельном спектре также присутствует несущая частота ГАМ $f_{GAM} = 21$ кГц, однако за счёт перекрытия сигналов конечной ширины и близких частот пик ГАМ не наблюдается. Описанная картина идентична экспериментальной – ср. рис. 2.8а и 2.8б.

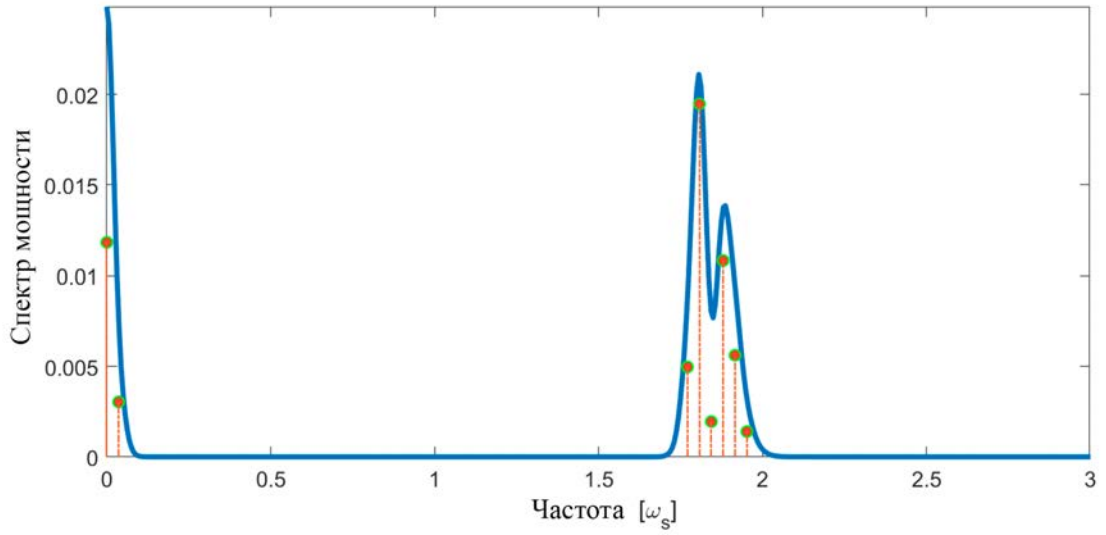
По мере нагрева плазмы в токамаке Т-10 происходит существенное снижение величины стационарного электрического поля в плазме и даже изменение его направления [281, 287]. Поэтому для второго расчёта будем полагать $E'_{ZF}/E_0 = 1,65$, что соответствует трёхкратному снижению скорости стационарного вращения плазмы по сравнению с омической фазой. Соответствующие результаты расчёта с $k = 11,4$ ($\eta = 0,1$) представлены на рис. 2.8б (справа). Ввиду малости M частота ЗТ близка к нулю, $f_{ZF} = 0,2$ кГц. В результате частоты ГАМ и сателлитов не разрешаются – вблизи частоты ГАМ наблюдается единый пик – ср. с рис. 2.8а.

В заключении подраздела представим результаты численного моделирования, детальному описанию которого посвящены два последующих подраздела, демонстрирующие эффект появления сателлитов ГАМ в результате взаимодействия с ЗТ в рамках “точной” модели, без каких-либо априорных предположений о структуре решения [134].

В качестве начальных условий зададим значения A_{GAM}^c и A_{ZF}^c , вычисляя начальные значения $\{\rho', p', v'_{\parallel}\}$ с использованием известных линейных отношений этих колебаний к A' . Чтобы избежать ограничений конкретными значениями параметров плазмы, результаты ниже



(а)



(б)

Рис. 2.9: Спектр мощности колебаний электрического поля A , рассчитанный путём численного интегрирования уравнений (2.63) при (а) $\alpha = 1$, $M = 0,7$, $q = 3$, $A_{GAM}^c = 0,3$, $A_{ZF}^c = 0,1$, (б) $\alpha = 1000$, $M = 0,7$, $q = 3$, $A_{GAM}^c = 0,3$, $A_{ZF}^c = 0,1$. Кружки соответствуют спектру, рассчитанному на временном интервале $568T_s$ (а), $1160T_s$ (б), линия – спектру с уменьшенным спектральным разрешением.

приведены в безразмерных переменных, а именно частоты даны в единицах ω_s , а время – в $T_s = 2\pi/\omega_s$.

На рис. 2.9а показан спектр мощности флуктуаций электрического поля, рассчитанный для равновесия с $\alpha = 1$ (изотермические магнитные поверхности), $M = 0,7$ (быстрое тороидальное вращение плазмы) и $q = 3$. Для этих значений параметров плазмы $\omega_{GAM} \approx 2,1$, $\omega_{ZF} \approx 0,05$. В качестве начальных значений используются $A_{GAM}^c = 0,3$, $A_{ZF}^c = 0,1$. Видно, что общая структура спектра

очень близка к структуре упрощённой модели. Спектральная картина ГАМ имеет двугорбую структуру с расстоянием между пиками, равным удвоенной частоте ЗТ. Амплитуда пика, соответствующего частоте стандартного ГАМ $\omega_{ГАМ}$, меньше амплитуды гармоник сателлитов.

Численный расчёт выявляет дополнительные эффекты, которые не проявлялись в вышеприведённом примере расчёта по упрощённой модели взаимодействия ГАМ-ЗТ: появление вторичных сателлитов ГАМ и “асимметрия” сателлитных пиков.

Результаты для равновесия с магнитными поверхностями постоянной плотности представлены на рис. 2.9б. Как уже неоднократно отмечалось, особенностью этого случая является то, что ЗТ линейно неустойчиво. Из-за нелинейности амплитуда линейно неустойчивого ЗТ насыщается на ранних стадиях эволюции системы и трансформируется в колебания конечной частоты (см. подраздел 2.5.3). Дальнейшее взаимодействие насыщенной моды ЗТ с ГАМ аналогично такому в устойчивом случае.

2.5.3 Численное моделирование нелинейной динамики линейно неустойчивых $n = 0$ электростатических возмущений

Откажемся от приближения медленно меняющихся амплитуд, а также от прочих допущений, использованных в аналитической модели. Динамику ЗТ будем рассчитывать самосогласованно с ГАМ, отслеживая полную эволюцию потенциала плазмы без разбиения на “независимые” колебания ГАМ и ЗТ [131]. Расчёт проведён численно с использованием нелинейного кода [132].

Далее рассмотрен случай линейно неустойчивого ЗТ, соответствующий $\alpha > \Gamma$. Эволюция электрического потенциала такого возмущения при $M \neq 0$ в линейном приближении демонстрирует экспоненциальный рост,

$$A_{ZF}(t) = A_{ZF}^0 \exp(-i\omega_{ZF}t),$$

где A_{ZF}^0 – начальная амплитуда возмущения.

Для системы (2.63) решим задачу Коши. Зафиксируем значения параметров $\Gamma = 5/3$, $q = 2$ и $\alpha = 1000$, что практически соответствует равновесию с магнитными поверхностями постоянной плотности. В настоящем подразделе ограничимся рассмотрением режимов с нулевыми начальными флуктуациями давления, плотности и продольной скорости плазмы, полагая $p_c(0) = p_s(0) = \rho_c(0) = \rho_s(0) = v_c(0) =$

$v_s(0) = 0$. При этом будем задавать начальное возмущение электрического поля, варьируя его величину: $A(0) = 0,01$, $A(0) = 0,1$, $A(0) = 1$, осуществляя тем самым переход от практически линейных (по крайней мере на начальной стадии) колебаний к динамике флуктуаций с сильным нелинейным взаимодействием. В физических величинах значение $A = 1$ соответствует тому, что угловая частота полоидального вращения плазмы, связанная с возмущением электрического поля, достигает частоты продольного звука, ω_s/q .

Также будем варьировать величину тороидального числа Маха: $M = 0$, $M = 0,5$, $M = 0,95$. Это продемонстрирует принципиальную роль стационарного вращения плазмы в нелинейной динамике низкочастотных колебаний электрического потенциала. Отметим, что в отсутствие стационарного вращения ($M = 0$) и нелинейных эффектов ГАМ включает колебания p_s , v_c , ρ_s , таким образом, эти флуктуации можно считать основными для ГАМ.

Для каждого режима изложение следует одной схеме: сначала демонстрируется временная эволюция всех участвующих в процессе колебаний характеристик плазмы, далее представлены соответствующие Фурье-спектры для амплитуд флуктуаций электрического поля и полоидальных гармоник давления, а также спектр мощности электростатических колебаний. Наконец, там где это представляет интерес, показаны частотно-временные диаграммы для сигналов электрического поля. Длина сигнала при анализе спектров колебаний выбиралась в диапазоне от $200T_s$ до $300T_s$ ($T_s = 2\pi/\omega_s$) таким образом, чтобы обеспечить достаточное пространственно-временное разрешение и минимизировать просачивание спектральных составляющих. Спектр амплитуды рассчитывался с помощью процедуры быстрого Фурье преобразования (FFT) с частотой дискретизации $15\omega_s$. При анализе спектров мощности и частотно-временных диаграмм флуктуаций электрического поля использовалось окно Ханна и варьировалось частотное разрешение сигнала (где это не оговорено отдельно частотное разрешение составляло $0,1\omega_s$). Это сделано для приближения расчётных графиков к экспериментальным картинкам спектров, всегда оперирующих с сигналами конечного разрешения и длины.

Для демонстрации эффектов нелинейности полученные результаты также сопоставлены с результатами “линейной” эволюции системы, под которой подразумевается решение системы (2.63) без правых частей.

Статическое равновесие плазмы, $M = 0$

В отсутствие стационарного тороидального вращения плазмы рассматриваемая система линейно устойчива. ЗТ стационарно, его частота и инкремент равны нулю. Частота ГАМ, рассчитанная для выбранных значений параметров плазмы по формуле (2.1), составляет $\omega_{ГАМ} = 1,5\omega_s$. Забегая вперёд, отметим, что динамика флуктуаций электрического потенциала в отсутствие стационарного вращения не отличается от линейной даже при больших амплитудах возмущений и сводится к колебательному процессу ГАМ. Нелинейность приводит лишь к слабому возбуждению колебаний звукового типа на частоте продольного звука и второй гармонике частоты ГАМ.

Режим слабой нелинейности, $A(0) = 0,01$

Режим слабой нелинейности в отсутствие стационарного вращения фактически соответствует линейным колебаниям (линейная динамика и нелинейная динамика не демонстрируют сколь-нибудь заметных отличий). Начальное возмущение электрического поля запускает колебательный процесс ГАМ, включающий строго периодические флуктуации A , p_s , ρ_s и v_c . Амплитуда колебаний электрического поля постоянна и определяется величиной начального возмущения $A(0)$. Несвойственные ГАМ гармоники p_c , ρ_c и v_s в ходе колебаний не возбуждаются. Временная динамика всех рассчитываемых гидродинамических характеристик системы показана на рис. 2.10. Расчёт проведён на интервале времени от $t = 0$ до $t = 8T_s$. На этом интервале укладывается 12 полных периодов колебаний, что соответствует теоретически предсказанной линейной частоте ГАМ. На рис. 2.10а также показано сохранение интегралов движения системы, I_1 и I_2 , в ходе временной эволюции.

На рис. 2.11 показаны Фурье-спектры амплитуд колебаний (а) и спектр мощности флуктуаций электрического поля (б) в рассматриваемом режиме. Оба графика демонстрируют пики на частоте ГАМ, а также небольшой подъём на нулевой частоте. Отметим, что на рис. 2.11а и на последующих рисунках такого типа фактически представлено три независимых Фурье-спектра: электрического поля A , $\sin \theta$ -гармоники давления p_s и $\cos \theta$ -гармоники давления p_c . Пики на различных кривых могут как совпадать, что характерно, например, для пиков A и p_s на частоте ГАМ (это отражает совместное возмущение указанных характеристик плазмы в процессе колебаний), так и

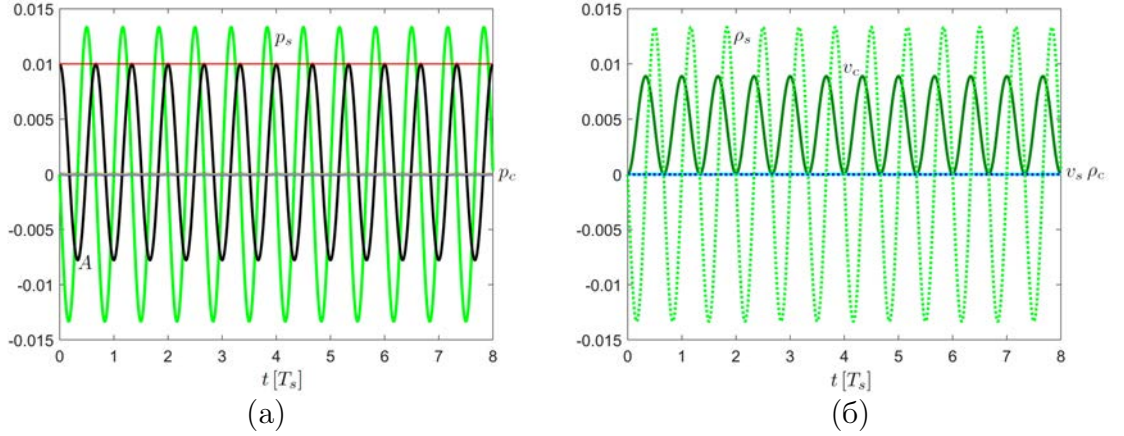


Рис. 2.10: Устойчивые колебания плазмы в режиме слабой нелинейности, $A(0) = 0,01$, и в отсутствие стационарного вращения, $M = 0$, (а) электрического поля и давления: A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]; (б) продольной скорости и плотности: v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]. На рис. (а) показаны интегралы: $10^2 I_1$ [красный] и $10^2 I_2$ [жёлтый]. Здесь и на последующих рисунках шкала времени дана в единицах T_s .

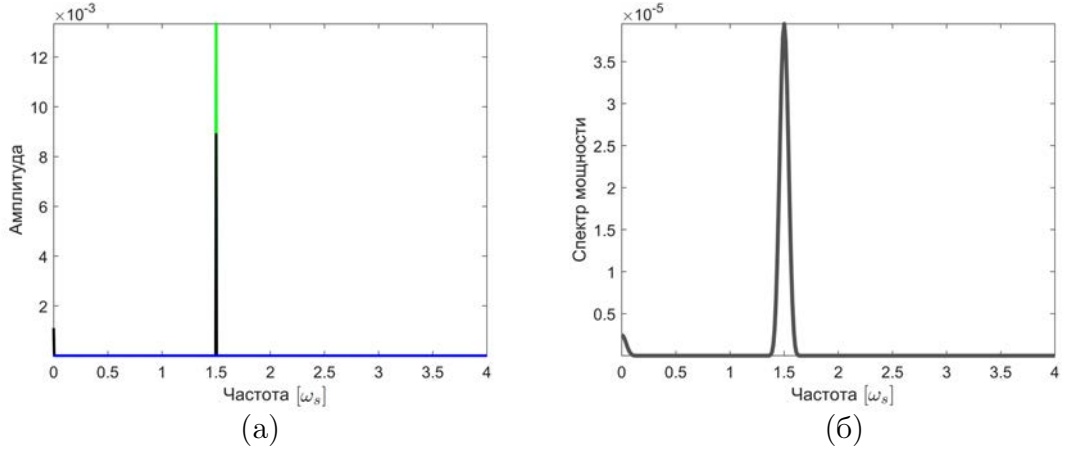


Рис. 2.11: Фурье-спектр амплитуд флуктуаций электрического поля A [чёрный] и давления (p_s [зелёный], p_c [синий]) в плазме в режиме слабой нелинейности, $A(0) = 0,01$, без равновесного вращения, $M = 0$, (а) и соответствующий спектр мощности флуктуаций электрического поля A (б). Здесь и на последующих рисунках шкала частоты дана в единицах ω_s .

быть разнесёнными по частоте. Так, отсутствие на рис. 2.11а пика на p_c -спектре демонстрирует отсутствие составляющей ЗТ в рассматриваемом колебательном процессе.

Описанная картина оказывается малочувствительна к изменению величины начального возмущения электрического поля. Так, увеличение $A(0)$ в 10 раз не приводит к сколь-нибудь существенным

изменениям характеристик колебаний, помимо тривиального десятикратного роста их амплитуды. Поэтому далее перейдём сразу к рассмотрению режима сильной нелинейности.

Режим сильной нелинейности, $A(0) = 1$

При начальной амплитуде возмущения электрического поля $A(0) = 1$ нелинейные слагаемые в правых частях уравнений (2.63) сопоставимы с линейными даже в отсутствие неустойчивости. Несмотря на это, картина флуктуаций, показанная на рис. 2.12, не имеет кардинальных отличий от линейных колебаний (ср. с рис. 2.10). В дополнение к колебательному процессу ГАМ наблюдается слабая генерация возмущений, ранее не задействованных в процессе колебаний, а именно: p_c , v_s , ρ_c . Этот набор флуктуаций характерен для колебаний типа продольного звука, поскольку не задействует возмущения электрического поля. Амплитуда нелинейно возбуждаемого сигнала существенно уступает амплитуде ГАМ, а сам сигнал периодически модулирован.

В спектре колебаний (рис. 2.13а) флуктуации p_c действительно проявляются на частоте продольного звука $0,5\omega_s$ (ω_s/q), но также, причём даже более существенно, и на частоте $\approx 3\omega_s$, что соответствует удвоенной частоте ГАМ. При этом спектр мощности электрического поля остаётся неизменным и содержит лишь собственную частоту ГАМ – см. рис. 2.13б.

Таким образом, в отсутствие стационарного тороидального вращения плазмы, и как следствие флуктуаций ЗТ, нелинейность не воздействует на ГАМ. Ни генерации высших гармоник ГАМ, ни сколь-нибудь существенного сдвига частоты, потенциально возможных из-за самовоздействия моды, не происходит. Вся роль нелинейности сводится к возбуждению совместных флуктуаций давления и продольной скорости типа продольного звука, которые как правило не регистрируются в экспериментах на токамаках из-за сильного затухания.

Рассмотренный режим дополнительно иллюстрируется частотно-временными диаграммами флуктуаций электрического поля – рис. 2.14 – демонстрирующими наличие единственного спектрального пика на частоте ГАМ и его неизменность в ходе динамической эволюции системы.

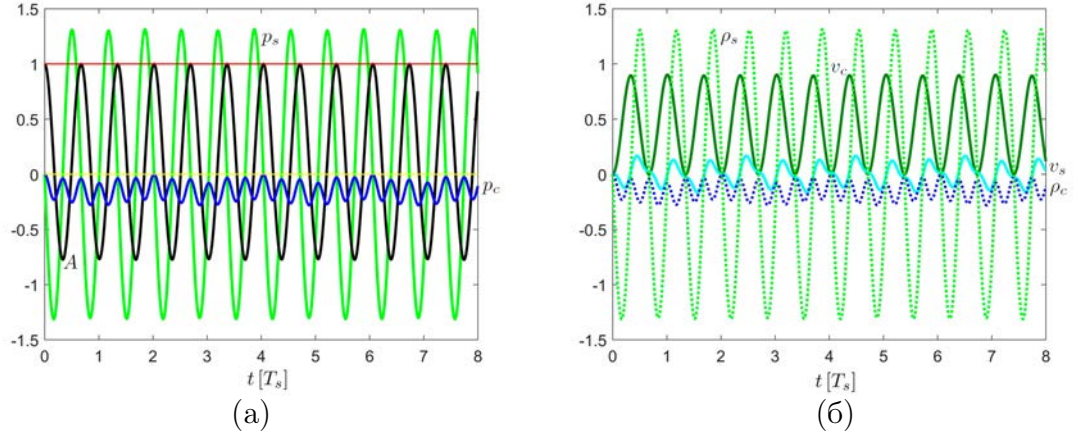


Рис. 2.12: Устойчивые колебания плазмы в отсутствие стационарного вращения, $M = 0$, в режиме сильной нелинейности с $A(0) = 1$ (а) электрического поля и давления: A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]; (б) продольной скорости и плотности: v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]. На рис. (а) показаны интегралы: I_1 [красный] и I_2 [жёлтый].

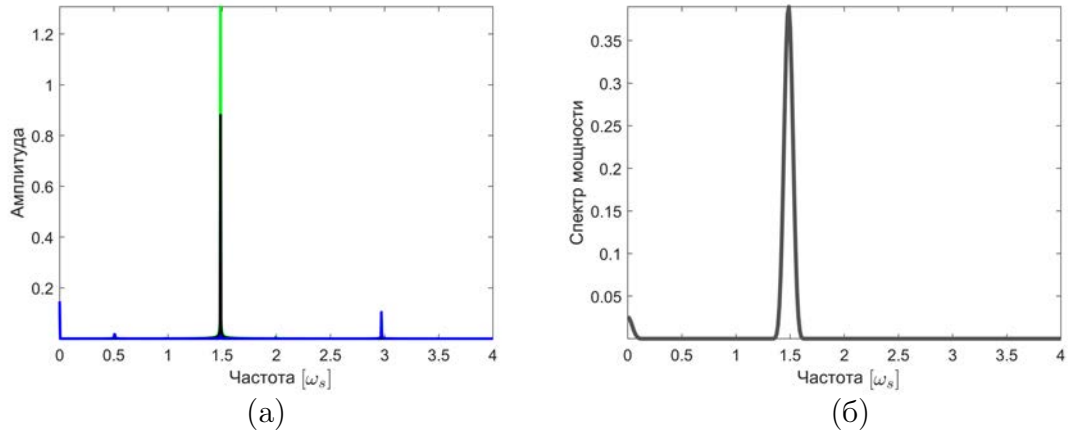


Рис. 2.13: Фурье-спектр амплитуд флуктуаций электрического поля A [чёрный] и давления (p_s [зелёный], p_c [синий]) в режиме сильной нелинейности (а) и соответствующий спектр мощности флуктуаций электрического поля A (б). Здесь $M = 0$, $A(0) = 1$.

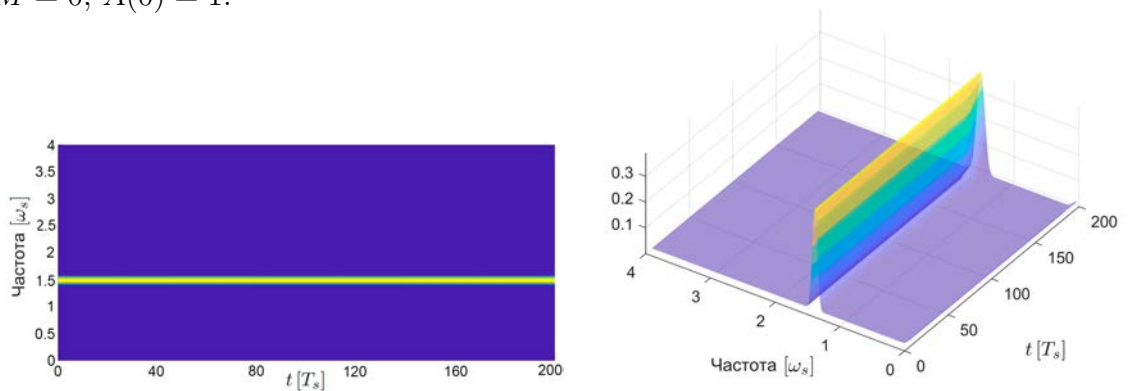


Рис. 2.14: Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля A , демонстрирующие устойчивый сигнал на частоте ГАМ. Здесь $M = 0$, $A(0) = 1$.

Умеренное вращение, $M = 0,5$

Как было отмечено выше, стационарное тороидальное вращение плазмы, практически всегда и в силу различных причин (инжекция, гофрировка магнитного поля, спонтанное вращение и т. д.) существующее в токамаке, в рассматриваемом случае постоянства плотности на магнитной поверхности, приводит к линейной дестабилизации ЗТ, происходящей беспорогово. Далее рассмотрен случай умеренной скорости тороидального течения с $M = 0,5$. Для выбранных параметров плазмы инкремент неустойчивости ЗТ составляет $0,05\omega_s$.

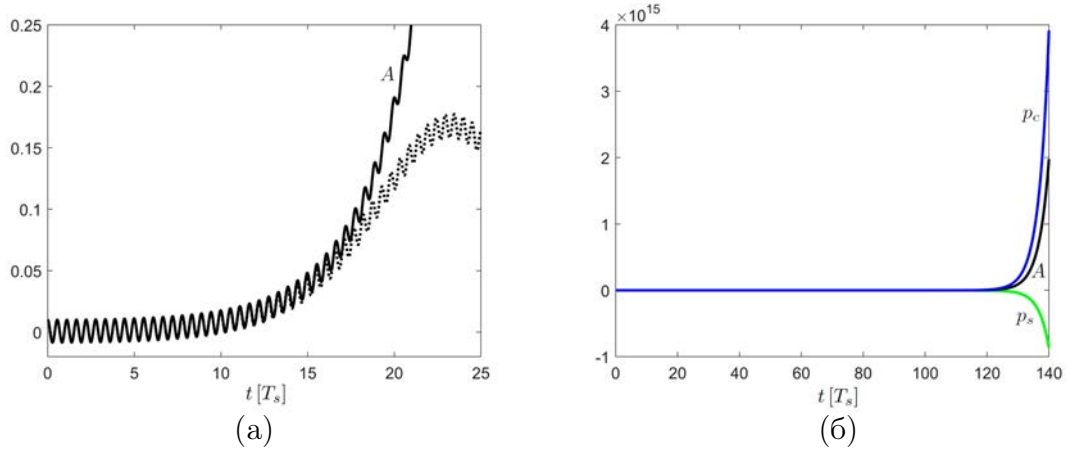


Рис. 2.15: Начальная стадия роста экспоненциально неустойчивых колебаний электрического поля в отсутствие нелинейных эффектов (а); развитая экспоненциальная неустойчивость (б): A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]. Здесь $M = 0,5$, $A(0) = 0,01$. На рис. (а) для сравнения пунктиром также приведены результаты нелинейного моделирования.

Начальная стадия эволюции флуктуаций электрического потенциала в плазме при их малом начальном возмущении с $A(0) = 0,01$, рассчитанная в рамках линейной модели, показана на рис. 2.15а. На временном интервале до $\sim 10T_s$ наблюдаются колебания практически постоянной амплитуды на частоте $1,8\omega_s$, что соответствует собственной частоте ГАМ, рассчитанной с учётом эффекта вращения плазмы. На больших временах начинает проявляться экспоненциальный рост возмущений, связанный с неустойчивостью ЗТ. Как видно, амплитуда высокочастотной составляющей колебаний (ГАМ) при этом остаётся неизменной и постепенно “теряется” на фоне роста стационарного возмущения потенциала. В линейном приближении не существует факторов насыщения неустойчивости, поэтому

процесс роста амплитуды возмущений происходит неограниченно – см. рис. 2.15б, на котором показан более длительный временной интервал расчёта в $140T_s$. Экспоненциально нарастают возмущения всех гидродинамических характеристик плазмы, причём наиболее интенсивно происходит рост p_c (напомним, что начальное возмущение давление было нулевым), что опять-таки свидетельствует о доминантной роли ЗТ. Отметим, что результаты линейного расчёта заведомо становятся неприменимы уже на временах порядка $25T_s$, когда величина нормированного возмущения электрического поля приближается к единице. Расчёт на более длительном интервале приведён лишь в иллюстративных целях для демонстрации эффекта линейной неустойчивости.

Режим слабой нелинейности, $A(0) = 0,01$

Начальная стадия эволюции флуктуаций потенциала, рассчитанная в рамках нелинейной модели, показаны на том же рис. 2.15а пунктиром. Отклонения от линейного расчёта начинают проявляться при $t \sim 15T_s$, а при $t \approx 23T_s$ амплитуда флуктуаций выходит на насыщение. Происходит нелинейная стабилизация линейной неустойчивости ЗТ.

Динамика всех составляющих процесса нелинейных колебаний на более длительном временном интервале в $140T_s$ (таком же как на рис. 2.15б) показана на рис. 2.16. После насыщения флуктуации выходят на низкочастотные колебания с частотой $\approx 0,02\omega_s$. Нелинейные колебания ЗТ являются строго периодическими, но не гармоническими; обладают постоянной амплитудой. В процессе колебаний задействованы флуктуации всех характеристик плазмы с доминирующей ролью p_c и ρ_c .

Можно заметить, что кривые сигналов A и p_s имеют конечную толщину. Это происходит из-за наложения на низкочастотную моду ЗТ колебаний ГАМ малой амплитуды и высокой частоты, что мы наблюдали ранее при анализе рис. 2.15а, демонстрирующего ту же картину в более крупном масштабе.

Частотный спектр сигнала колебаний в режиме слабой нелинейности показан на рис. 2.17. Действительно, доминирующей в картине спектра выступает низкочастотная активность на p_c и A . Помимо низкочастотных колебаний наблюдается слабый сигнал вблизи частоты ω_{GAM} с доминирующими A и p_s . Размытие пика ГАМ обусловлено

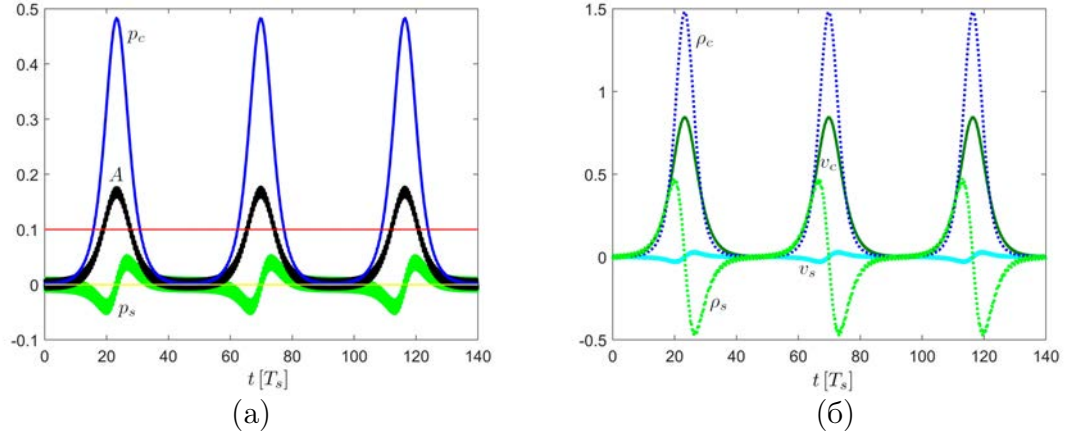


Рис. 2.16: Стабилизированное низкочастотное ЗТ в режиме слабой нелинейности (а) A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]; (б) v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]. На рис. (а) показаны интегралы: $10^3 I_1$ [красный] и $10^3 I_2$ [жёлтый]. Здесь $M = 0,5$, $A(0) = 0,01$.

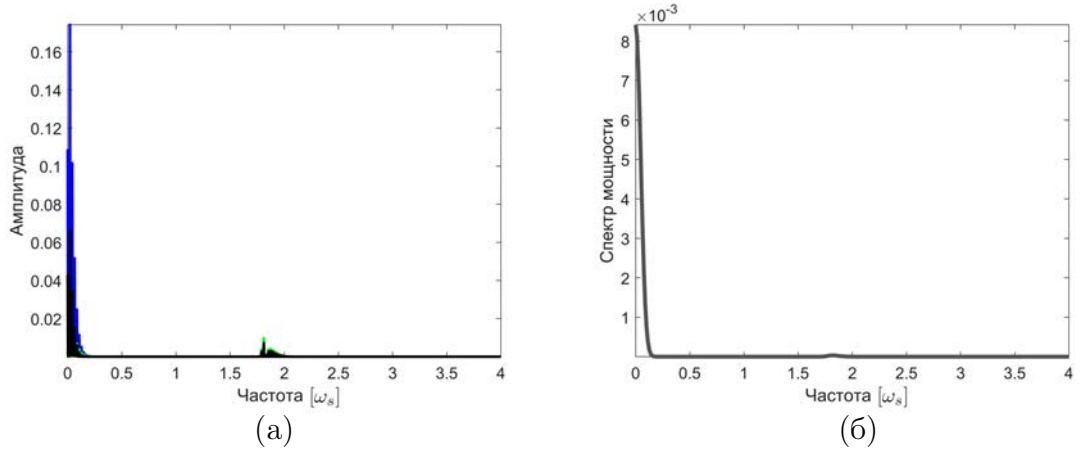


Рис. 2.17: Спектры амплитуд флуктуаций электрического поля A [чёрный] и давления (p_s [зелёный], p_c [синий]) во вращающейся плазме с $M = 0,5$ при малой величине начального возмущения, $A(0) = 0,01$, (а) и соответствующий спектр мощности флуктуаций электрического поля A (б).

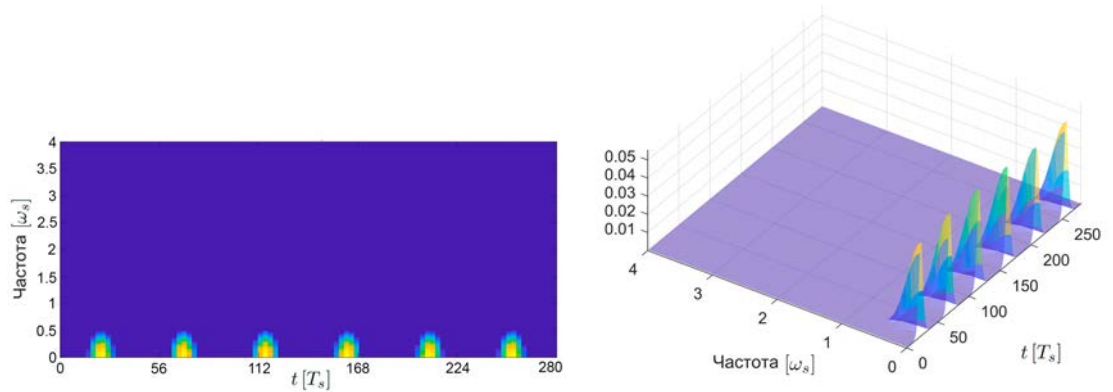


Рис. 2.18: Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля A : низкочастотные вспышки стабилизированного ЗТ. Здесь $M = 0,5$, $A(0) = 0,01$.

нелинейным взаимодействием с низкочастотной модой ЗТ. Амплитуда ГАМ не превышает малую амплитуду начального возмущения потенциала. Из этого следует, что линейная неустойчивость ЗТ, приводящая к развитию низкочастотной моды, не вносит вклад в рост амплитуды ГАМ.

На диаграммах частотно-временной зависимости при разрешаемой частоте в $0, 1\omega_s$ стабилизированные колебания ЗТ проявляются в виде всплесков очень низкой частоты – см. рис. 2.18. Из-за малости амплитуды высокочастотная активность ГАМ на этих графиках не видна.

Промежуточный режим, $A(0) = 0, 1$

При увеличении начального возмущения электрического поля амплитуда стабилизированной низкочастотной моды практически не меняется, а вот развивающиеся на её фоне высокочастотные колебания становятся заметными – см. рис. 2.19. Можно предположить, что амплитуда низкочастотного ЗТ определяется инкрементом его линейной неустойчивости, т.е. в конечном итоге равновесными параметрами плазмы, а амплитуда колебаний ГАМ наиболее чувствительна к величине начального возмущения электрического поля. При сравнении рис. 2.16 и рис. 2.19 видно, что на одном и том же временном интервале укладывается уже большее число периодов, т.е. при увеличении амплитуды начального возмущения происходит рост частоты стабилизированного ЗТ. Частота низкочастотной моды в рассматриваемом режиме составляет $\approx 0, 03\omega_s$.

В спектре колебаний – рис. 2.20а – ГАМ проявляется уже в виде гораздо более существенного пика, также состоящего из набора очень близких частот. При анализе спектра мощности сигнала конечной длины – рис. 2.20б – эти отдельные частоты не разрешаются, в результате чего наблюдается единый “размытый” пик ГАМ. Амплитуда пика ГАМ не превышает величину начального возмущения потенциала. Частотно-временная диаграмма флуктуаций электрического поля демонстрирует картину, весьма схожую с наблюдаемой в режиме слабой нелинейности, но с уже различимой полосой высокочастотного сигнала вблизи частоты ГАМ – см. рис. 2.21. Кроме того, начинает проявляться модуляция ГАМ низкочастотным ЗТ: хорошо видна корреляция между всплесками ЗТ и “приподнятием” частоты ГАМ.

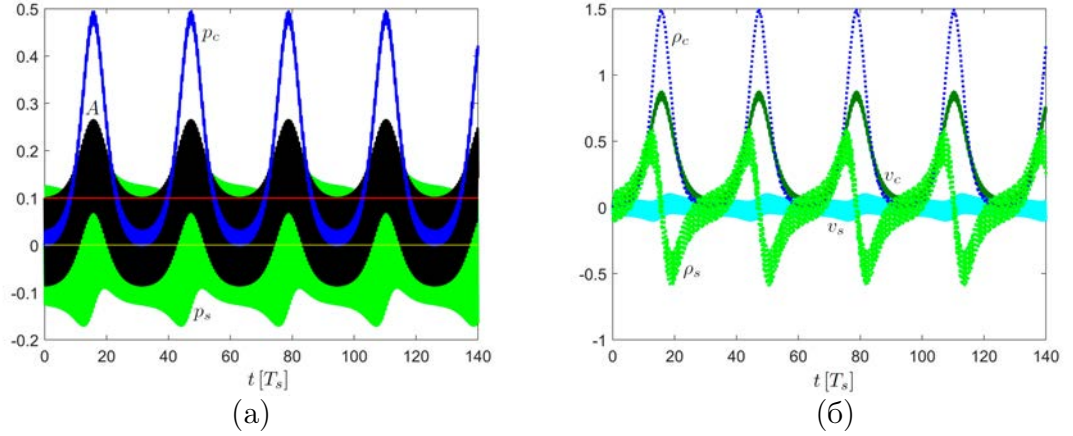


Рис. 2.19: Динамика флуктуаций во вращающейся плазме с $M = 0,5$ при сопоставимых амплитудах НЧ и ВЧ-составляющих колебаний (а) A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]; (б) v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]. На рис. (а) показаны интегралы: $10I_1$ [красный] и $10I_2$ [жёлтый]. Здесь $A(0) = 0,1$.

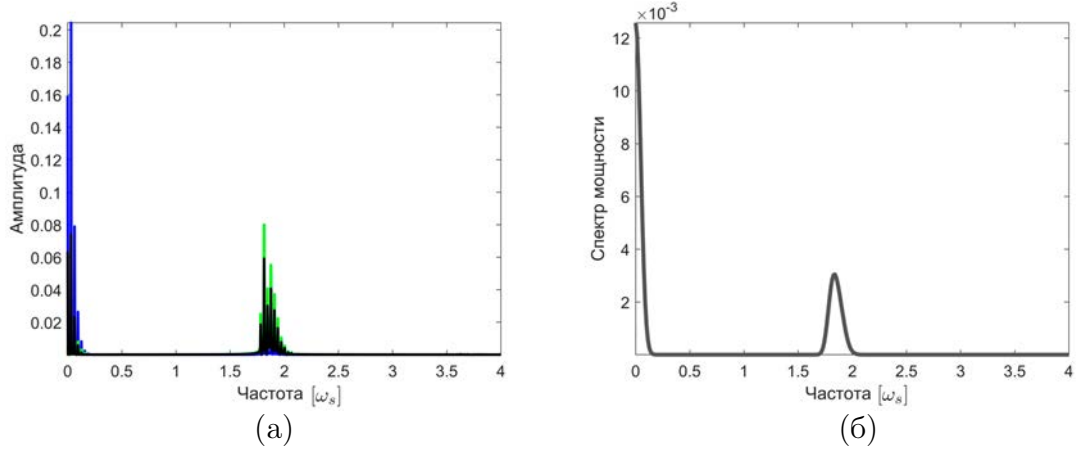


Рис. 2.20: Спектры колебаний электрического поля A [чёрный] и давления (p_s [зелёный], p_c [синий]) в промежуточном режиме (а) и соответствующий спектр мощности флуктуаций электрического поля A (б). Здесь $M = 0,5$, $A(0) = 0,1$.

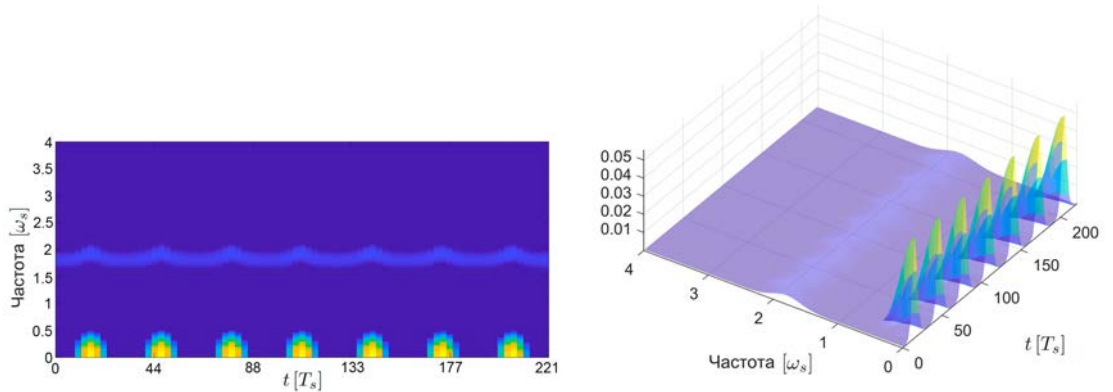


Рис. 2.21: Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля A : проявление модуляции ГАМ низкочастотным ЗТ. Здесь $M = 0,5$, $A(0) = 0,1$.

Режим сильной нелинейности, $A(0) = 1$

Режим сильной нелинейности с $A(0) = 1$ при промежуточных скоростях стационарного вращения плазмы существенным образом отличается от двух ранее рассмотренных случаев. В отличие от них основной модой (с наибольшей амплитудой) выступает высокочастотная мода ГАМ, а стабилизированное низкочастотное ЗТ проявляется на этих колебаниях в виде огибающей – см. рис. 2.22. Частота модуляции составляет $\approx 0,06\omega_s$, что опять-таки свидетельствует о росте частоты ЗТ с усилением эффекта нелинейности.

Увеличение частоты ЗТ делает картину спектра более отчётливой, поскольку позволяет визуально разрешить расстояние между близкими частотными пиками – см. рис. 2.23а. Пик стабилизированного ЗТ ожидаемо наблюдается на частоте $0,06\omega_s$, и его величина близка к значениям в режимах слабой нелинейности. В высокочастотной области выделяются три основных пика с частотами $1,81\omega_s$, $1,87\omega_s$ и $1,93\omega_s$, отстоящие друг от друга на величину частоты ЗТ. Центральный пик в описанных условиях численного эксперимента имеет наибольшую амплитуду и может быть ассоциирован с частотой основной ГАМ, а два соседних пика представляют его сателлиты, возникающие в результате взаимодействия ГАМ с низкочастотным ЗТ, и отстоящие по частоте от основного пика ГАМ на частоту ЗТ. Напомним, что в линейной теории $\omega_{ГАМ} = 1,8\omega_s$. Таким образом, наблюдается незначительный рост частоты моды ГАМ под влиянием нелинейных эффектов.

В предыдущем подразделе было аналитически показано, что возникновение сателлитов ГАМ объясняется нелинейным взаимодействием ГАМ с ЗТ, амплитуда которого для наглядности считалась неизменной. При рассмотрении самосогласованной эволюции ГАМ-ЗТ мы приходим к весьма близкой постановке. Линейно неустойчивое ЗТ на ранних этапах эволюции стабилизируется и выходит на колебания конечной частоты и постоянной амплитуды, которые уже можно рассматривать как заданные, исследуя далее их влияние на высокочастотную моду ГАМ. Таким образом, задача де-факто сводится к упрощённой аналитической постановке, хотя, конечно же, обладает более сложной и богатой картиной колебаний за счёт неитеративного учёта нелинейных эффектов.

В качестве вторичных нелинейных эффектов выступает генерация дополнительных сателлитов ГАМ, а также возбуждение звуко-

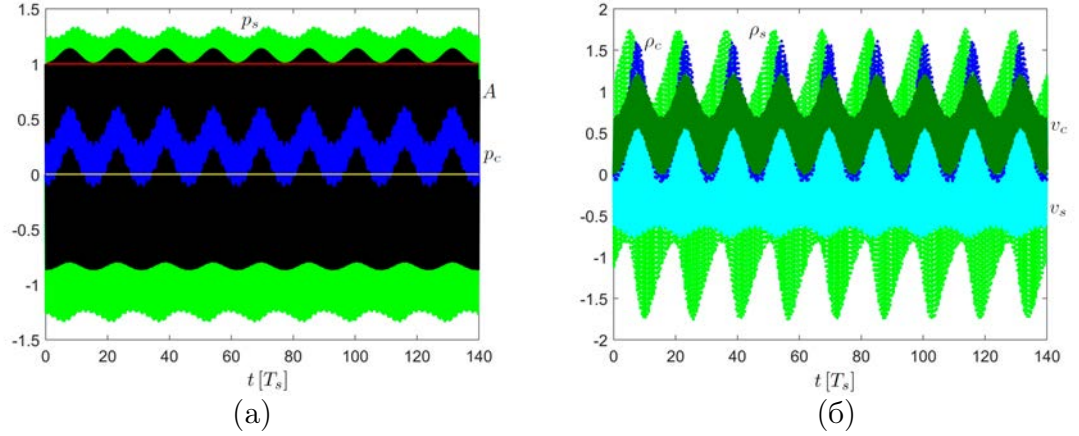


Рис. 2.22: Эволюция флуктуаций в режиме сильной нелинейности, $A(0) = 1$, и промежуточной скорости стационарного вращения плазмы с $M = 0,5$: (а) электрическое поле и давление (A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]); (б) продольная скорость и плотность (v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]). На рис. (а) показаны интегралы: I_1 [красный] и I_2 [жёлтый].

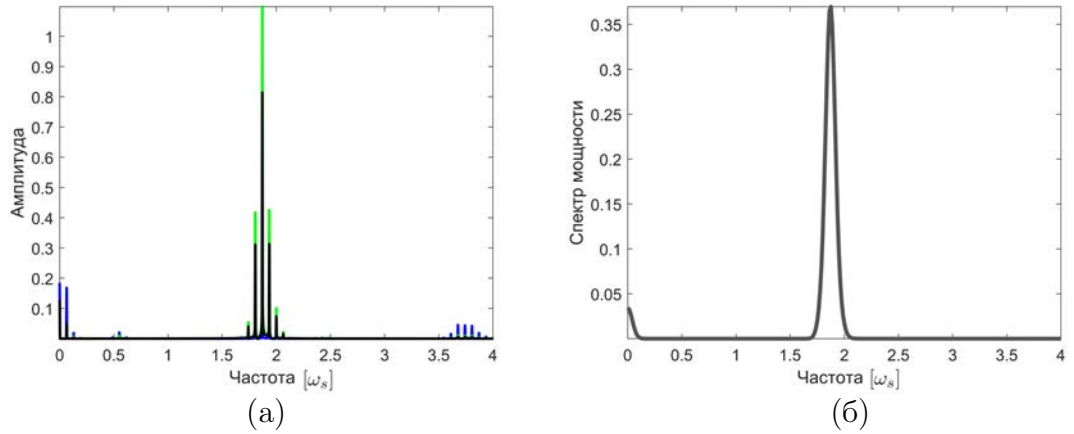


Рис. 2.23: Спектр флуктуаций электрического поля A [чёрный] и давления: p_s [зелёный], p_c [синий] (а); спектр мощности флуктуаций электрического поля A (б) в режиме сильной нелинейности, $A(0) = 1$, и умеренной скорости стационарного вращения плазмы, $M = 0,5$.

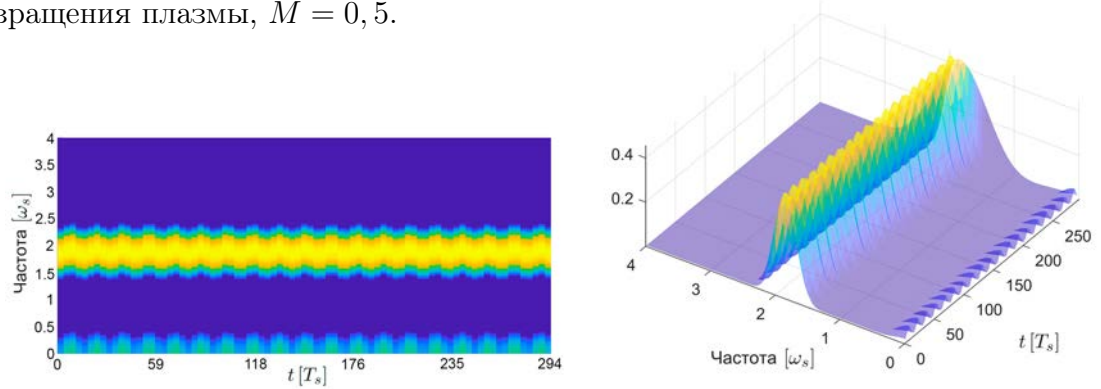


Рис. 2.24: Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля A в режиме сильной нелинейности, $A(0) = 1$, и умеренной скорости стационарного вращения плазмы, $M = 0,5$. Здесь частотное разрешение $0,4\omega_s$.

вых колебаний на частоте продольного звука и удвоенной частоте ГАМ. Примечательно, что генерации второй гармоники самой ГАМ не наблюдается – так же, как и в экспериментах [18].

Спектр мощности флуктуаций электрического поля, показанный на рис. 2.23б, демонстрирует единый уширенный пик вблизи частоты ГАМ, поскольку на этом рисунке не разрешена малая разница частот между сателлитами и ГАМ (разность частот $0,06\omega_s$, частотное разрешение $0,1\omega_s$). Это указывает на принципиальную роль методики анализа спектров и их пространственно-временного разрешения при интерпретации сигналов, содержащих колебания существенно различных частот.

Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля в рассматриваемом режиме показаны на рис. 2.24. Обсуждаемая нелинейная динамика колебаний проявляется в виде небольшого расщепления спектра ГАМ на две частоты, переход между которыми скоррелирован со всплесками на частоте ЗТ.

Сильное тороидальное вращение плазмы, $M = 0,95$

Рассмотрим режим “сильного” тороидального вращения плазмы с $M = 0,95$. Поскольку коэффициент нелинейного взаимодействия между ГАМ и ЗТ (2.72) пропорционален числу Маха, в этом случае следует ожидать весьма заметного влияния нелинейных эффектов на динамику флуктуаций. Согласно (2.51) при такой скорости вращения частота ГАМ составляет $\omega_{ГАМ} = 2,4\omega_s$, а линейный инкремент неустойчивости ЗТ $0,13\omega_s$.

Режим слабой нелинейности, $A(0) = 0,01$

Временная эволюция флуктуаций в быстро вращающейся плазме в режиме слабой нелинейности показана на рис. 2.25. Как и в случаях, рассмотренных ранее, нелинейность приводит к стабилизации линейно неустойчивого ЗТ и к выходу возмущений на низкочастотные ангармонические колебания. Разница заключается в том, что из-за увеличения инкремента неустойчивости с ростом M амплитуда стабилизированного ЗТ существенно возрастает и превосходит величину начального возмущения потенциала более чем в 30 раз; как и ранее особенно эффективно возбуждается $\cos\theta$ -гармоника давления. Частота результирующего ЗТ также возрастает и составляет $\sim 0,04\omega_s$.

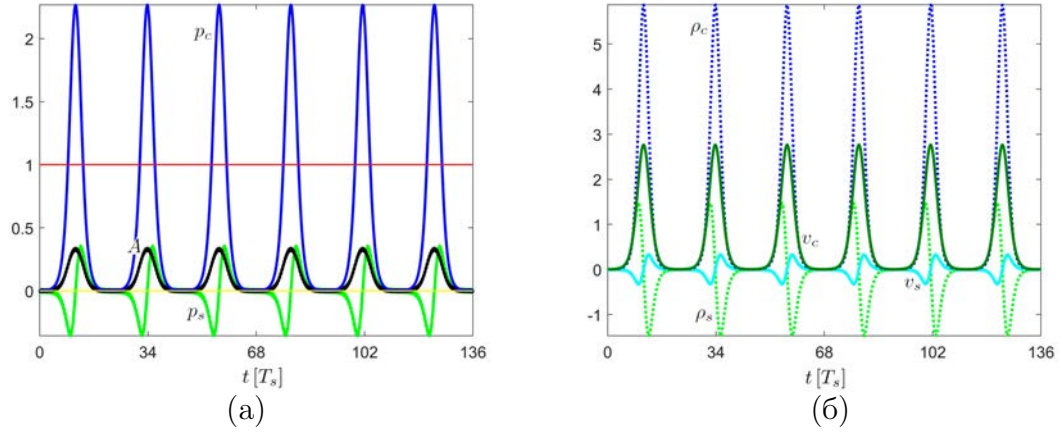


Рис. 2.25: Флуктуации характеристик плазмы в режиме быстрого вращения, $M = 0,95$, и слабой нелинейности, $A(0) = 0,01$: (а) A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]; (б) v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]. На рис. (а) показаны интегралы: $10^4 I_1$ [красный] и $10^4 I_2$ [жёлтый].

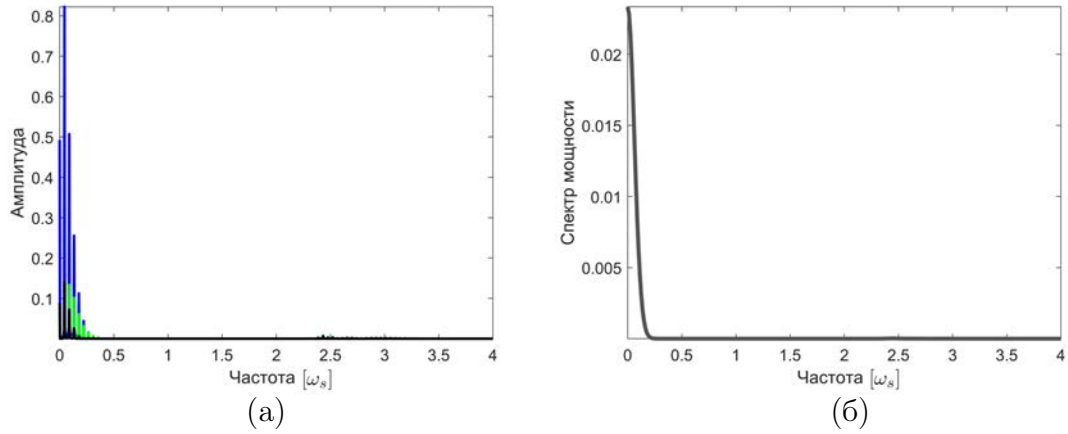


Рис. 2.26: Спектры флуктуаций в режиме быстрого вращения, $M = 0,95$, и слабой нелинейности, $A(0) = 0,01$: A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий] (а); спектр мощности A (б).

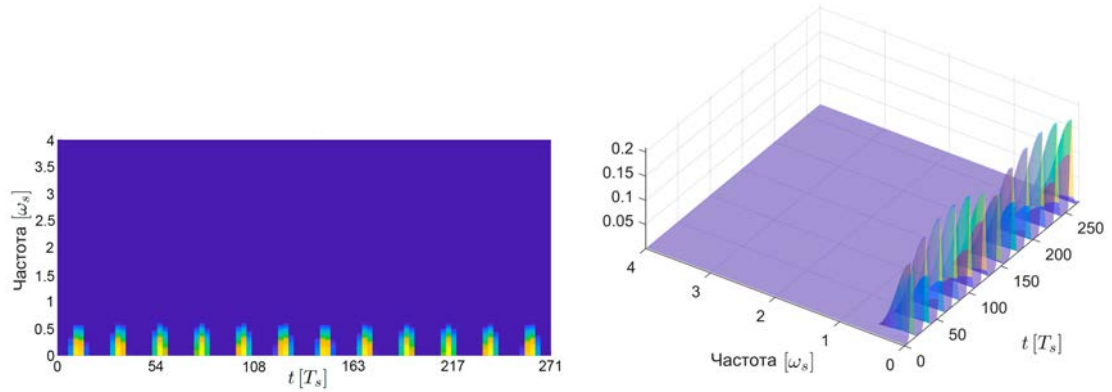


Рис. 2.27: Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля A : вспышки стабилизированного ЗТ. Здесь $M = 0,95$, $A(0) = 0,01$, частотное разрешение $0,5\omega_s$.

В спектре колебаний (рис. 2.26а) благодаря росту частоты ЗТ низкочастотная активность становится хорошо разрешимой. Спектральный пик ЗТ состоит из основной частоты $0,044\omega_s$ и её высших эквидистантных гармоник: $0,088\omega_s$, $0,133\omega_s$, $0,177\omega_s$ и т. д. Амплитуда вторичных гармоник падает с удалением от основного пика; на колебаниях потенциала видны только первые три из них. Колебания на частоте ГАМ в рассматриваемом режиме не наблюдаются – см. рис. 2.26б.

На частотно-временных диаграммах (рис. 2.27) низкочастотная активность ЗТ проявляется в виде периодических всплесков на низкой частоте.

Промежуточный режим, $A(0) = 0,1$

Увеличение начального возмущения приводит к усилению высокочастотной компоненты сигнала. На рис. 2.28 отчётливо видно уширение линий A и p_s по сравнению с аналогичными графиками на рис. 2.25. Конечная ширина линий связана с наложением на несущую низкочастотную составляющую сигнала высокочастотных колебаний ГАМ, период которых в представленном масштабе не различим. Амплитуда колебаний ГАМ в свою очередь определяется величиной начального возмущения электрического поля. Частота несущей моды стабилизированного ЗТ растёт с усилением нелинейности и равна $\approx 0,06\omega_s$.

В спектре колебаний в дополнение к низкочастотной активности с основным пиком на частоте $0,06\omega_s$ появляется слабый широкополосный “шум” вблизи частоты ГАМ – см. рис. 2.29 и рис. 2.30. Полоса ГАМ состоит из ~ 16 эквидистантных пиков, расстояние между которыми также составляет $0,06\omega_s$, т.е. в точности равно основной частоте стабилизированного ЗТ. В результате ширина полосы ГАМ оказывается практически равна удвоенной ширине полосы низкочастотной активности. Максимальный пик в спектре ГАМ соответствует частоте $2,43\omega_s$, что практически совпадает с линейной частотой моды $\omega_{ГАМ} = 2,4\omega_s$; при этом полоса ГАМ не центрирована относительно этого пика, а сдвинута в область больших частот. Очевидно, что такая спектральная картина возникает из-за взаимодействия ГАМ с набором низкочастотных гармоник стабилизированного ЗТ.

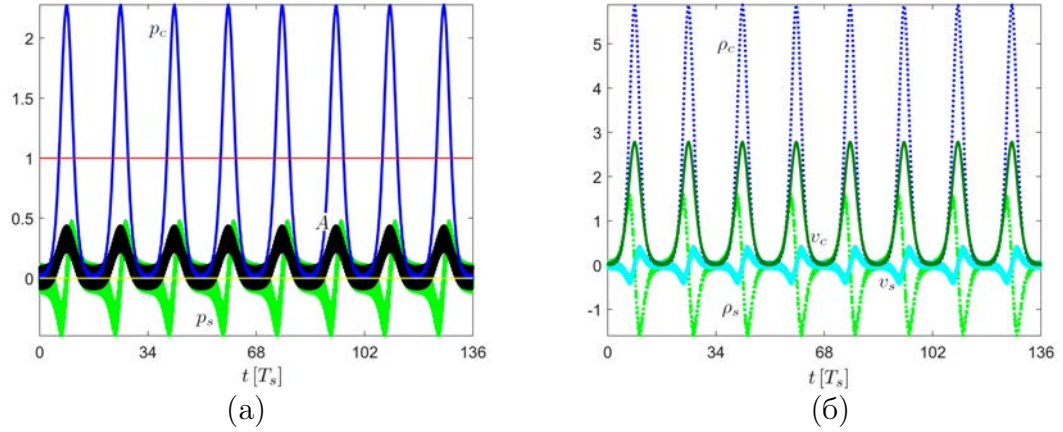


Рис. 2.28: Динамика флуктуаций в режиме сильного стационарного вращения плазмы, $M = 0,95$, и промежуточной амплитуды возмущения, $A(0) = 0, 1$: (а) A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]; (б) v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]. На рис. (а) показаны интегралы: $10^2 I_1$ [красный] и $10^2 I_2$ [жёлтый].

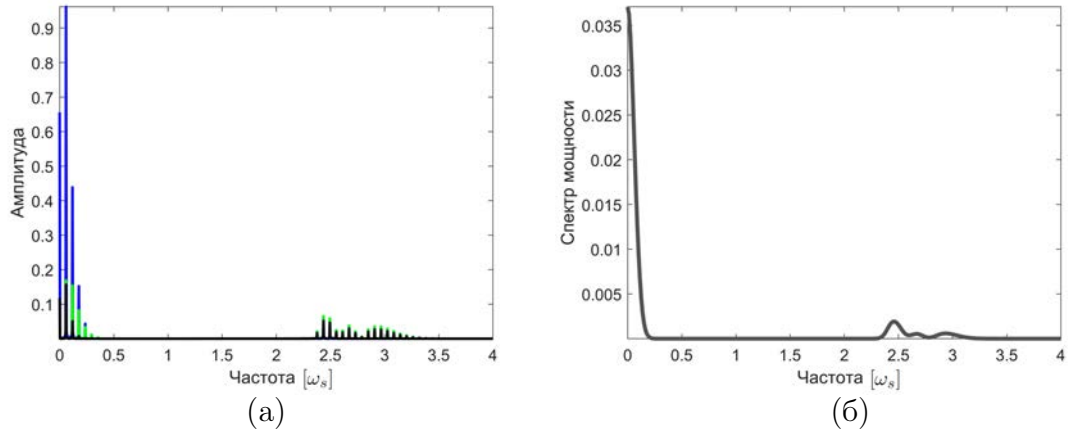


Рис. 2.29: Спектр флуктуаций в режиме сильного стационарного вращения плазмы, $M = 0,95$, и промежуточной нелинейности, $A(0) = 0, 1$: A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий] (а); спектр мощности A (б).

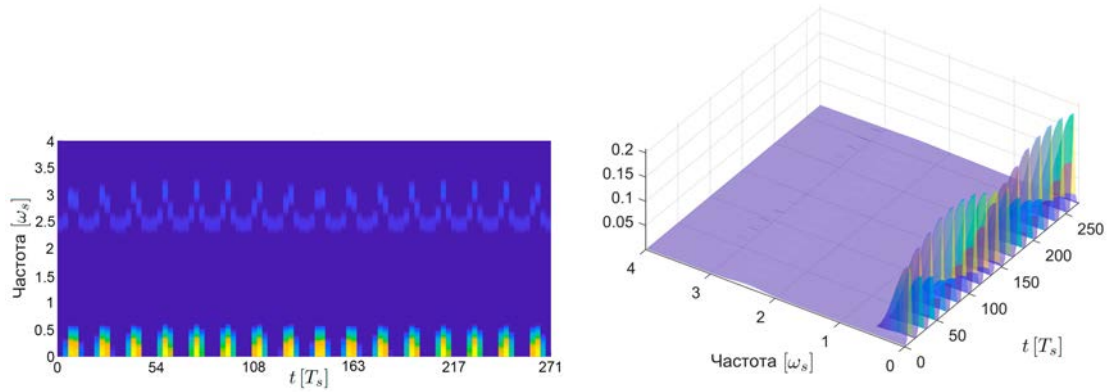


Рис. 2.30: Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля A : вспышки ЗТ и слабая широкополосная активность ГАМ. Здесь $M = 0,95$, $A(0) = 0, 1$, частотное разрешение $0,5\omega_s$.

Режим сильной нелинейности, $A(0) = 1$

Режим сильной нелинейности при высоких скоростях тороидального вращения плазмы представляет особенно интересную картину колебаний. Из-за большой величины начального возмущения электрического поля высокочастотный сигнал ГАМ доминирует в динамике флуктуаций (по крайней мере, электрического потенциала). В грубом приближении сигнал флуктуаций представляет собой колебания на частоте $\approx 2,5\omega_s$, модулированные низкой частотой $3T \approx 0,09\omega_s$ – см. рис. 2.31. Более детальный анализ спектра (рис. 2.32а) показывает, что вблизи частоты ГАМ имеет место набор эквидистантных пиков, разделённых на основную частоту $3T$. Наиболее интенсивный пик соответствует частоте $2,52\omega_s$. На частоте $2,79\omega_s$ напротив наблюдается локальный провал интенсивности, в результате чего спектр ГАМ интегрально имеет двугорбую структуру.

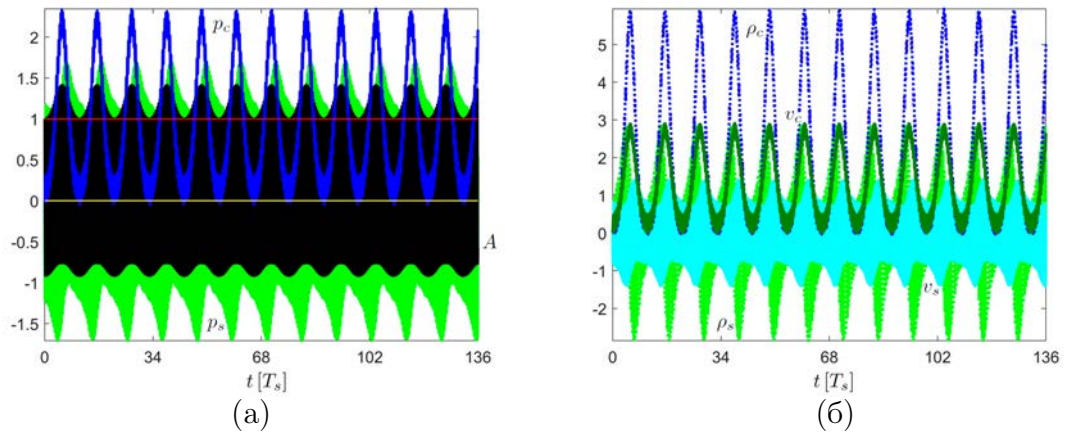


Рис. 2.31: Динамика флуктуаций большой начальной амплитуды, $A(0) = 1$, в плазме с сильным тороидальным вращением, $M = 0,95$: (а) A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий]; (б) v_c [тёмно зелёный], v_s [голубой], ρ_s [зелёный пунктир], ρ_c [синий пунктир]. На рис. (а) показаны интегралы: I_1 [красный] и I_2 [жёлтый].

Спектр мощности таких колебаний оказывается весьма чувствителен к качеству анализируемого сигнала. На рис. 2.32б–е показаны спектры мощности флуктуаций электрического поля, рассчитанные при разной разрешающей частоте с постепенным снижением качества разрешения: от $0,01\omega_s$ на рис. 2.32б до $0,5\omega_s$ на рис. 2.32е. Если разрешаемая частота меньше расстояния между пиками ГАМ, т.е. частоты $3T$ ($0,09\omega_s$), тонкая структура спектра хорошо видна – рис. 2.32б,в. При превышении этой величины соседние частотные пики

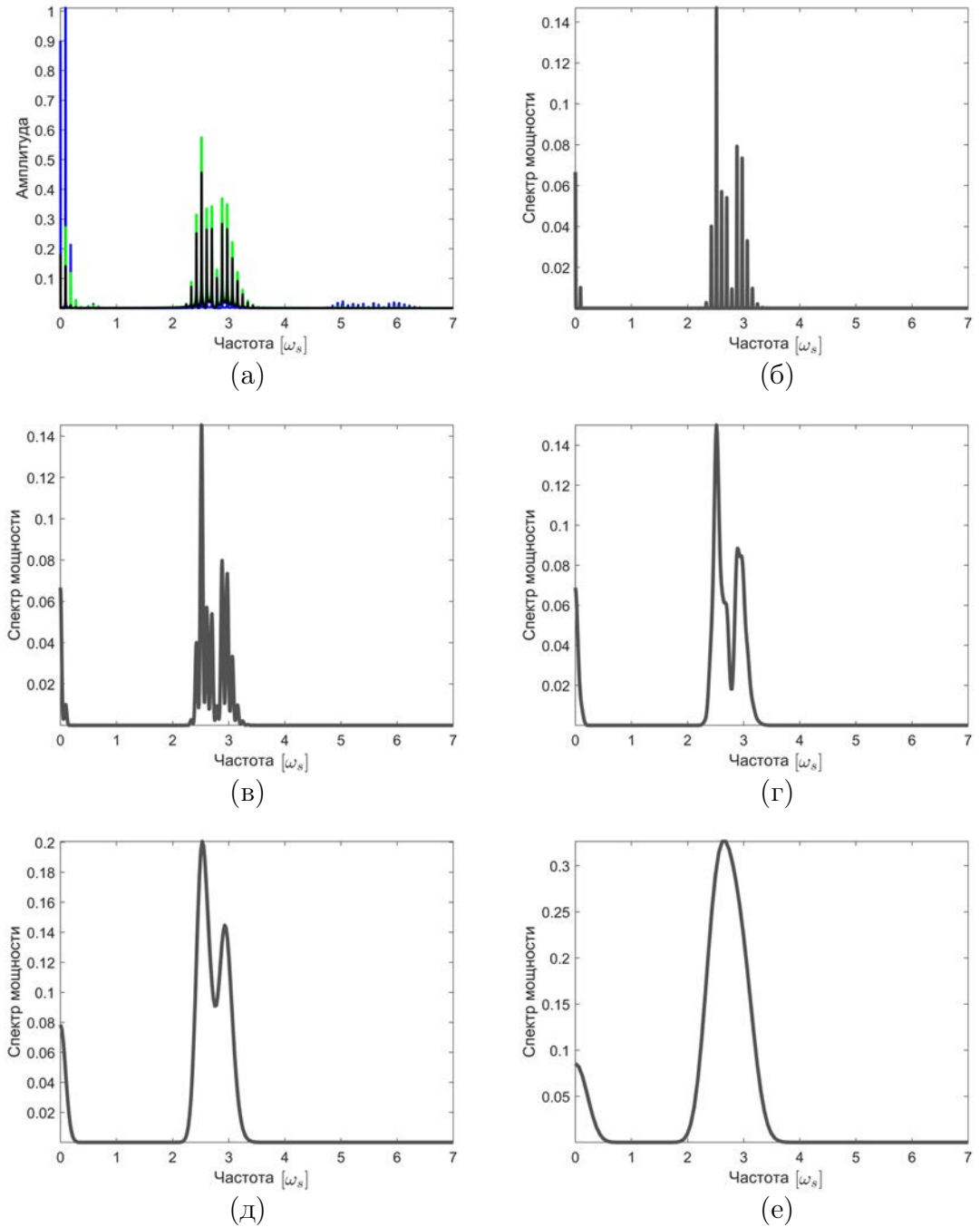


Рис. 2.32: Спектр флуктуаций A [чёрный], p_s [зелёный], p_c [синий] при большой амплитуде возмущений, $A(0) = 1$, и быстром вращении плазмы, $M = 0,95$, (а); соответствующие спектры мощности A при различном частотном разрешении: $0,01\omega_s$ (б), $0,05\omega_s$ (в), $0,1\omega_s$ (г), $0,2\omega_s$ (д), $0,5\omega_s$ (е).

сливаются – наблюдаются два интегральных пика с остатками тонкой структуры – рис. 2.32г. При разрешаемой частоте $0,2\omega_s$ спектр мощности демонстрирует два сателлита ГАМ. Левый спектральный максимум соответствует частоте $2,5\omega_s$, т.е. немного превышает ча-

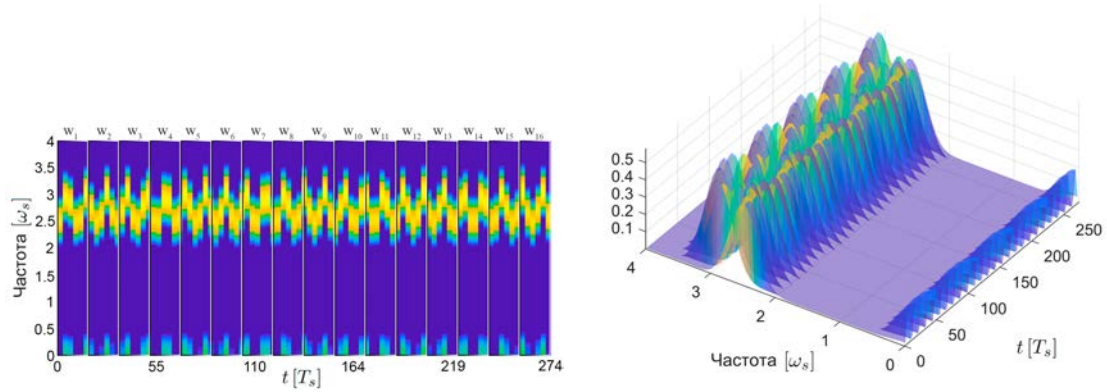


Рис. 2.33: Частотно-временные диаграммы флуктуаций электрического поля A в режиме сильной нелинейности. Здесь $M = 0,95$, $A(0) = 1$, частотное разрешение $0,5\omega_s$.

стоту линейной моды $\omega_{GAM} = 2,4\omega_s$, а правый максимум соответствует частоте $2,9\omega_s$. Таким образом, в рассматриваемом случае сильной нелинейности разность частот между “интегральными” сателлитами ГАМ составляет удвоенную ширину сигнала стабилизированного ЗТ. При частотном разрешении $0,5\omega_s$ не разрешаются уже даже и интегральные сателлиты ГАМ, и спектр мощности демонстрирует единый пик с максимумом на $2,7\omega_s$ – см. рис. 2.32д.

Отметим, что высокочастотная активность вблизи удвоенной частоты ГАМ на рис. 2.32а наблюдается лишь на колебаниях давления, но не затрагивает возмущений электрического поля – ср. с рис. 2.32б–е, на которых представлены спектры мощности A . Таким образом, даже в режиме сильной нелинейности генерации высших гармоник ГАМ не происходит.

Частотно-временные диаграммы сигнала демонстрируют перемежаемость спектра ГАМ, выражающуюся в “перескоке” максимума спектра мощности с частоты одного интегрального максимума активности ГАМ на частоту другого максимума – см. рис. 2.33. Переход на более высокочастотную моду происходит скоррелировано со вспышкой стабилизированного ЗТ.

Перемежаемость ГАМ полезно продемонстрировать в “динамике”. На рис. 2.34 показаны “мгновенные” картинки спектров мощности сигнала электрического поля в режиме сильной нелинейности, сделанные на одинаковых временных интервалах, но в разные моменты эволюции системы. Длина интервала выбрана таким образом, чтобы

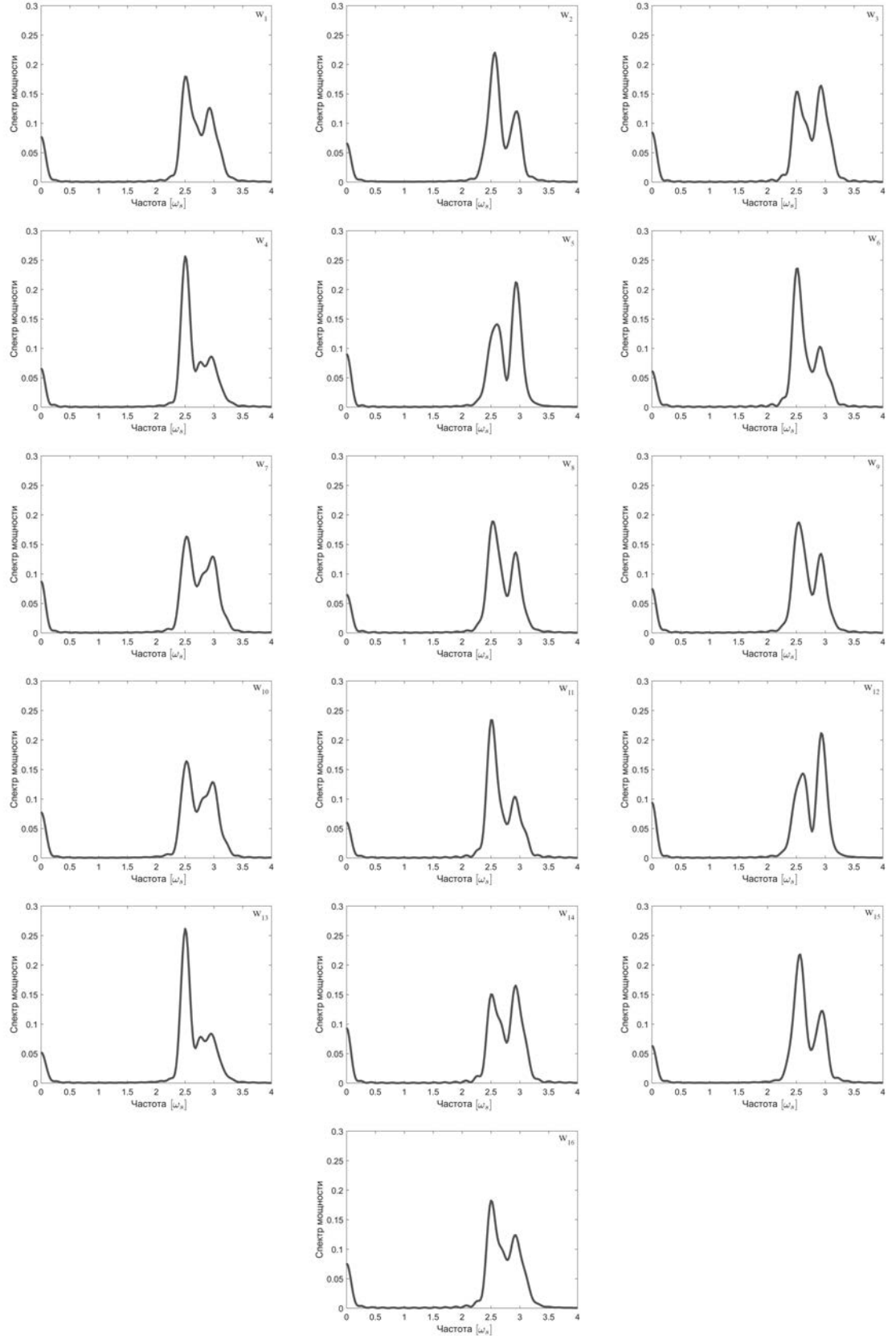


Рис. 2.34: Спектры мощности флуктуаций электрического поля A в режиме сильной нелинейности, рассчитанные в различные моменты эволюции сигнала на временных интервалах одной ширины в $17T_s$. Соответствующие окна w_i показаны на рис. 2.33 (слева). Здесь $M = 0,95$, $A(0) = 1$, используется прямоугольное окно, частотное разрешение $0,18\omega_s$.

захватить по крайней мере одну полную вспышку ЗТ, и составляет $17T_s$: соответствующие окна отмечены на рис. 2.33 (слева) надписями w_j , $j = 1 \div 16$. Видна периодическая перекачка мощности с одного сателлита ГАМ на другой. Такое явление наблюдается экспериментально – см., например, рис. 13 в [82].

2.5.4 Самосогласованная эволюция собственных мод ГАМ и ЗТ

Рассмотрим более общую картину нелинейной динамики низкочастотных шировых течений, широко варьируя начальные условия при численном моделировании [133]. В их качестве используем начальные значения возмущённого электрического поля для ГАМ и ЗТ: A_{GAM}^c и A_{ZF}^c . Начальные значения $\{\rho', p', v_{||}'\}$ рассчитываются на их основе с использованием известных линейных отношений этих колебаний к величине A' . Как отмечалось, рассматриваемые уравнения (2.63) описывают множество режимов колебаний, реализация которых зависит как от начальных условий, так и от параметров равновесия (а именно, q , M и α). Ниже представлены примеры различных режимов, воспроизводящие экспериментально наблюдаемые характеристики спектральной картины ГАМ. Рассмотрены два типа равновесий: устойчивое равновесие с изотермическими магнитными поверхностями ($\alpha = 1$) и неустойчивое равновесие с поверхностями постоянной плотности ($\alpha = 1000$). В расчётах временной интервал для спектрального анализа выбран порядка $600T_s$ и слегка варьируется, чтобы “уловить” несколько полных периодов низкочастотной моды; $q = 3$.

Устойчивое равновесие с изотермическими магнитными поверхностями

В линейно устойчивом равновесии как ГАМ, так и ЗТ имеют конечные частоты, а их амплитуды преимущественно определяются начальными условиями. Подтвердим, что в этом случае нелинейное взаимодействие мод приводит к появлению боковых гармоник ГАМ (сателлитов) на частотах $\omega_{GAM} \pm \omega_{ZF}$. Увеличение амплитуды ЗТ приводит к появлению “старших” сателлитов $\omega_{GAM} \pm n\omega_{ZF}$. Увеличение тороидального числа Маха способствует росту частоты ЗТ, что делает тонкую структуру спектра более различимой.

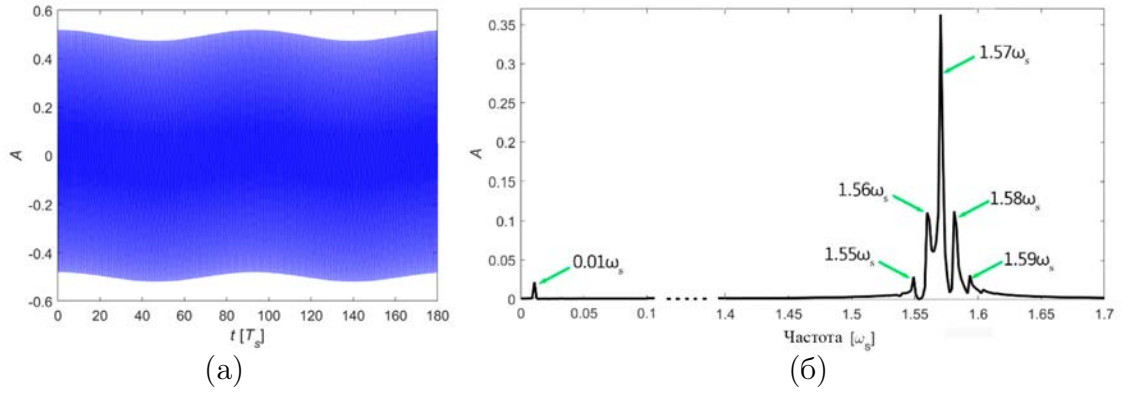


Рис. 2.35: Временная эволюция электрического поля $A(t)$ (а) и соответствующий спектр амплитуды (б) в режиме слабой модуляции. Здесь $M = 0,3$, $A_{GAM}^c = 0,5$, $A_{ZF}^c = 0,02$. Длительность анализируемого сигнала составляет $561T_s$.

Сателлиты ГАМ

Чтобы продемонстрировать появление сателлитов ГАМ, выберем режим, характеризующийся умеренной скоростью стационарного тороидального вращения плазмы с $M = 0,3$, значительной начальной амплитудой ГАМ, $A_{GAM}^c = 0,5$, и небольшой амплитудой ЗТ, $A_{ZF}^c = 0,02$. Собственные частоты линейных мод ГАМ и ЗТ, рассчитанные по формуле (2.51), в рассматриваемом случае есть $\omega_{GAM} = 1,57\omega_s$ и $\omega_{ZF} = 0,01\omega_s$.

На рис. 2.35а показана временная эволюция флуктуаций электрического поля, $A(t)$. Временной сигнал представляет собой суперпозицию высокочастотных колебаний ГАМ, слегка модулированных низкочастотным ЗТ. Поскольку $\omega_{GAM} \gg \omega_{ZF}$, на периоде ЗТ уместается множество высокочастотных колебаний ГАМ.

Спектральная картина сигнала показана на рис. 2.35б. Чётко различимы два сильно разделённых пика: основной пик вблизи частоты ГАМ и небольшой пик на околонулевой частоте ЗТ.

Высокочастотная активность состоит из набора близких равноудалённых пиков, разделённых на частоту ЗТ. Наиболее выраженный пик соответствует ω_{GAM} , и амплитуды сателлитов уменьшаются с удалением от него.

Двугорбая структура спектра ГАМ

Увеличение начальной амплитуды ЗТ приводит к увеличению числа сателлитов ГАМ и изменению структуры спектра

Рассмотрим равновесие, характеризуемое более высокой скоро-

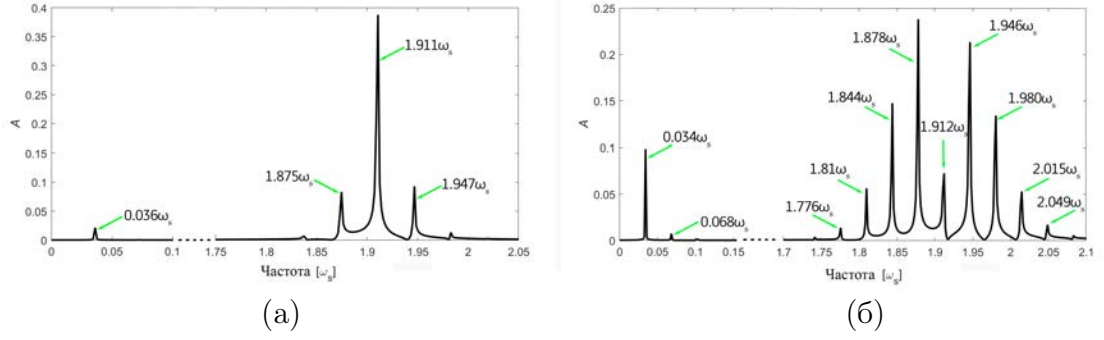


Рис. 2.36: Спектры амплитуд A при различных A_{ZF}^c : $A_{ZF}^c = 0,02$ (а); $A_{ZF}^c = 0,1$ (б). Здесь $M = 0,6$, $A_{GAM}^c = 0,5$. Длительность анализируемого сигнала составляет $582T_s$ для (а) и $615T_s$ для (б).

стью стационарного вращения плазмы, $M = 0,6$. С увеличением M собственная частота ЗТ растёт $\sim M^2$, что позволяет лучше разрешить сателлиты. При $M = 0,6$, собственные частоты ГАМ и ЗТ составляют $\omega_{GAM} \approx 1,91\omega_s$ и $\omega_{ZF} \approx 0,036\omega_s$. На рис. 2.36 показаны спектры амплитуд для режимов с $A_{GAM}^c = 0,5$ и двух различных значений начальной амплитуды ЗТ: $A_{ZF}^c = 0,02$ (рис. 2.36а) и $A_{ZF}^c = 0,1$ (рис. 2.36б).

В обоих случаях наличие низкочастотного ЗТ приводит к появлению боковых полос ГАМ. Сравнение рис. 2.36а и 2.36б демонстрирует, что увеличение начальной амплитуды ЗТ и, следовательно, усиление нелинейности приводит (i) к увеличению амплитуды сателлитов ГАМ, (ii) к росту их числа и (iii) к формированию двугорбой структуры спектра с минимумом вблизи собственной частоты ГАМ (аналогичный эффект был показан в предыдущем подразделе – см. рис. 2.32а). Такая картина спектра ГАМ, состоящего из близких эквидистантных пиков, была наглядно продемонстрирована в экспериментах на токамаке ASDEX Upgrade – ср. рис. 2.36б с рис. 10а в [82].

Неустойчивое равновесие с магнитными поверхностями постоянной плотности

Как мы обсуждали, равновесие с магнитными поверхностями постоянной плотности линейно неустойчиво по отношению к возмущениям типа ЗТ, которые обладают нулевой частотой и конечным инкрементом $\sim M^2$. В рамках линейной модели это выражается в неограниченном экспоненциальном росте таких возмущений.

Нелинейность способствует насыщению амплитуды линейно неустойчивого ЗТ и его переходу в устойчивую низкочастотную моду. Дальнейшее взаимодействие этой моды с ГАМ приводит к формированию боковых полос ГАМ и тонкой структуры спектральной картины.

Взаимодействие ГАМ с насыщенным ЗТ

Рассмотрим случай линейно неустойчивой системы при $M = 0,3$, выбрав $A_{GAM}^c = 0,2$, $A_{ZF}^c = 0,02$. На рис. 2.37 показаны соответствующая временная эволюция флуктуаций электрического поля и их спектр. Несмотря на линейную неустойчивость сигнал демонстрирует строго периодические колебания, которые содержат как высокочастотную составляющую ГАМ, так и насыщенную моду ЗТ, которая проявляется в виде низкочастотной модуляции огибающей. Отметим, что глубина модуляции превышает начальное значение амплитуды ЗТ, что связано с ростом последней на линейном этапе временной эволюции.

В низкочастотной области спектра колебаний активность стабилизированного ЗТ в основном проявляется на частоте $0,01\omega_s$; также видны гармоника $0,02\omega_s$ и более высокочастотные пики. В результате взаимодействия с низкочастотной модой генерируются множественные сателлиты ГАМ, разделенные частотой стабилизированного ЗТ, что формирует широкополосный пик ГАМ. Сложный частотный состав ЗТ определяет комплексную структуру спектра ГАМ, который, в частности, становится асимметричным по отноше-

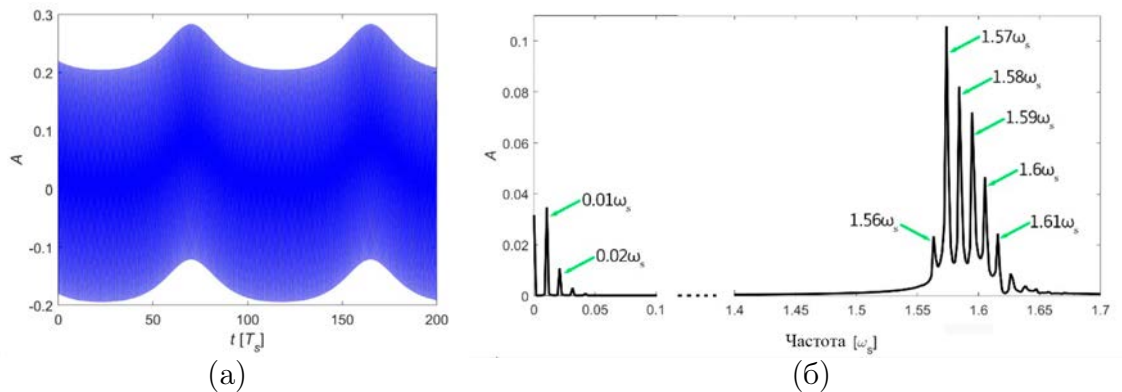


Рис. 2.37: Временная эволюция электрического поля $A(t)$ (а) и соответствующий спектр амплитуды (б) в линейно неустойчивой системе. Здесь $M = 0,3$, $A_{GAM}^c = 0,2$, $A_{ZF}^c = 0,02$. Длительность анализируемого сигнала составляет $570T_s$.

нию к линейной частоте ГАМ $\omega_{GAM} = 1,57\omega_s$.

Вспышки ГАМ

Линейная неустойчивость приводит к формированию насыщенной моды ЗТ, даже если начальная амплитуда ЗТ равна нулю. Это демонстрируется следующим расчётом при $M = 0,4$, $A_{GAM}^c = 0,2$ и $A_{ZF}^c = 0,0$. Из-за довольно сильного стационарного вращения и, как следствие, достаточно большого инкремента линейно неустойчивого ЗТ, амплитуда насыщенной моды ЗТ оказывается значительной и даже сравнимой с амплитудой ГАМ. Это видно по глубине модуляции огибающей на рис. 2.38а. Соответствующий Фурье спектр – рис. 2.38б – демонстрирует сложную широкополосную активность в областях как низких, так и высоких частот. Частота основной гармоники насыщенного ЗТ равна $0,009\omega_s$, при этом амплитуды высших гармоник ЗТ также значительны. Активность ГАМ комплексная: она имеет тонкую структуру, которая представляет собой набор равноудалённых сателлитов, разделённых основной частотой насыщенного ЗТ, и интегрально двугорбую форму, что является результатом взаимодействия с широкополосной активностью ЗТ. Максимум спектра ГАМ соответствует частоте, близкой к линейной собственной частоте ГАМ $\omega_{GAM} = 1,66\omega_s$, при этом спектр не центрирован относительно неё.

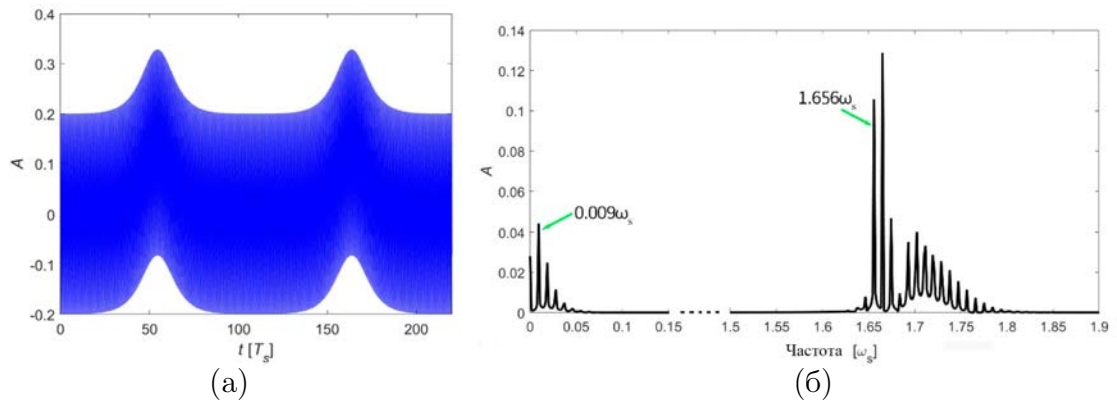


Рис. 2.38: Временная эволюция электрического поля $A(t)$ (а) и соответствующий спектр амплитуды (б) в линейно неустойчивой системе с нулевой начальной амплитудой ЗТ. Здесь $M = 0,4$, $A_{GAM}^c = 0,2$, $A_{ZF}^c = 0,0$. Длительность анализируемого сигнала составляет $645T_s$.

Возвращаясь к рис. 2.38а, отметим, что сигнал электрического поля в рассматриваемом режиме строго периодический, но ангармони-

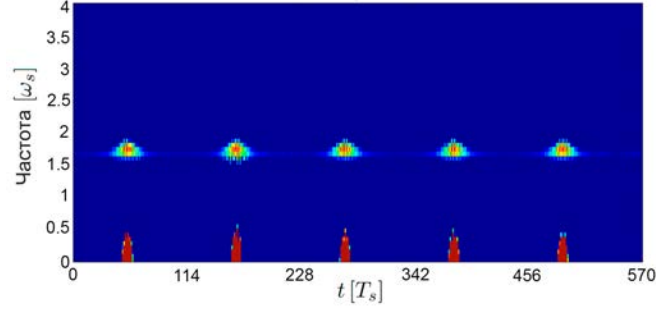


Рис. 2.39: Спектрограмма флуктуаций электрического поля плазмы, A , демонстрирующая всплески ГАМ. Здесь $M = 0,4$, $A_{GAM}^c = 0,2$, $A_{ZF}^c = 0,0$.

ческий. Более того, амплитуда колебаний сильно меняется во времени, так что её модуляция достигает уровня в 50%. На спектрограмме с отсечкой по мощности сигнала это проявляется в виде всплесков ГАМ, которые происходят в корреляции с активностью ЗТ – см. рис. 2.39. Экспериментальные наблюдения всплесков ГАМ – см., например, в [82, 89, 90, 279].

2.5.5 Замечания о проявлении нелинейности

Нелинейная эволюция электростатических возмущений в плазменной системе, содержащей в наборе собственных колебаний две моды существенно различных частот – геодезическую акустическую моду и низкочастотное зональное течение – может быть весьма разнообразна. Колебания обоих типов связаны с возмущением радиального электрического поля в плазме. Это значит, что случайная флуктуация электрического поля способна “запустить” колебательные процессы обоих типов, что в нелинейной системе приводит к сложной динамике электрического потенциала, лишь косвенно содержащей признаки исходных мод. И если в устойчивой системе разделение колебаний электрического потенциала на независимые моды ГАМ и ЗТ при условии малости величины начального возмущения допустимо, то неустойчивость неизбежно выводит динамику даже слабых начальных флуктуаций за рамки применимости линейной модели, подразумевающей независимое рассмотрение эволюции собственных мод.

Модель, развитая в диссертационной работе, отличается простотой и предельной наглядностью, поскольку: (i) основана на МГД уравнениях и в линейном приближении приводит к стандартному закону дисперсии ГАМ [227], (ii) не включает “чёрный ящик” дрейфовой

турбулентности, описывая лишь собственную эволюцию возмущений, (iii) легко верифицируется, поскольку обладает интегралами движения. При этом выполненные на основе модели расчёты демонстрируют наблюдаемые экспериментально характерные особенности низкочастотных колебаний электрического потенциала плазмы, включая расщепление спектрального пика ГАМ, их периодическую модуляцию и перемежаемость [77, 82, 88–90, 221, 223, 279]. Отметим, что решения, полученные для тех же уравнений, но с помощью метода асимптотического разложения, не могут воспроизвести экспериментально наблюдаемую спектральную картину [288], что указывает на несоответствие предположения о малости амплитуд условиям эксперимента.

Существенность проявления эффектов модуляции в экспериментах указывает на то, что регистрируемые колебания обычно находятся в сильно нелинейных режимах. Как было показано, в таких режимах спектры колебаний обладают сложной тонкой структурой и оказываются весьма чувствительны к частотному разрешению сигнала. Один и тот же сигнал в зависимости от спектрального разрешения можно интерпретировать как широкополосную активность (рис. 2.32в), как два сателлита ГАМ (рис. 2.32д) или как единый пик ГАМ (рис. 2.32е). Даже в режиме сильной нелинейности не происходит генерации вторых гармоник на колебаниях электрического поля ГАМ. Аналогичный вывод был сделан в [289] при гидродинамическом рассмотрении нелинейного самовоздействия ГАМ, индуцированных энергичными частицами. При этом нелинейная модель показывает активную генерацию высших гармоник низкочастотного ЗТ и вторичных сателлитов ГАМ.

Нелинейное взаимодействие ГАМ-ЗТ демонстрирует типичную картину, наблюдаемую при взаимодействии НЧ- и ВЧ-колебаний различной физической природы. Аналогичные явления известны в различных областях физики и свойственны, например, процессу параметрического возбуждения¹⁵ ионно-звуковой и ленгмюровской волны в плазменных разрядах (см. рис. 2.40), механическим колебаниям консольных балок и пластин [292–294], оптомеханическим системам [295] и др.

¹⁵Хотя сам результат рождения сателлитов при взаимодействии собственных мод существенно различных частот хорошо известен в теории нелинейных колебаний [207, 290, 291], особенностью ГАМ является отсутствие дисперсии, поэтому стандартные рассуждения в терминах параметрических резонансов к ней неприменимы

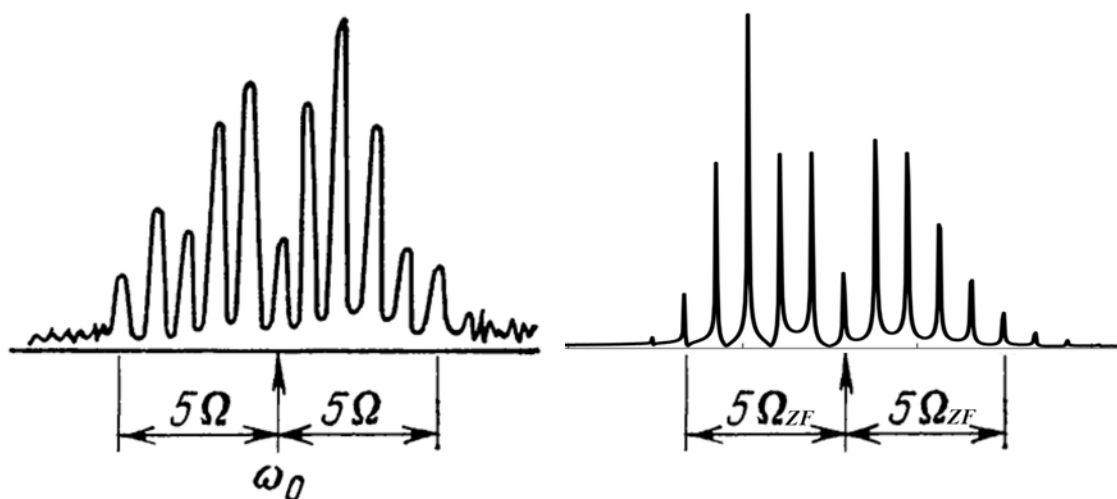


Рис. 2.40: Слева – параметрическое возбуждение ионно-звуковой и ленгмюровской волны при большой амплитуде волны накачки [207]: ω_0 – частота накачки, Ω – ионно-звуковая частота (сохранены авторские обозначения); справа – результат взаимодействия ГАМ с ЗТ в режиме сильной нелинейности (увеличенная часть рисунка 2.32а вблизи частоты ГАМ): Ω_{ZF} – основная гармоника стабилизированного ЗТ.

2.6 Резюме главы 2

Получены выражения для частоты сплошного МГД-спектра ГАМ, включающие эффекты некруглости формы поверхности плазмы, тороидальной гофрировки магнитного поля и конечного обратного аспектного отношения. Эти выражения следует использовать вместо (2.1) для расчёта частоты ГАМ в установках диверторного типа и сферических токамаках. Проведена оценка величин указанных эффектов. Показано, что вытянутость магнитных поверхностей значительно снижает частоты рассматриваемых мод, и её учёт необходим при расчёте спектра ГАМ в установках с некруглой плазмой.

Представлены аналитические решения, описывающие радиальную структуру и частоту собственной моды геодезических акустических колебаний в плазме токамака. Показано, что в отличие от ранее сложившегося мнения наличие внеосевого максимума локальной частоты ГАМ не является обязательным условием существования глобальной моды.

Вращение плазмы приводит к появлению низкочастотной ветви зональных течений, в спектре которых также присутствует глобальное решение для моды, локализованной на периферии плазменного шнура. Глобальные зональные течения реализуются даже в простейшем

случае твердотельного вращения плазмы и могут быть неустойчивыми. Неустойчивость глобальных ЗТ может служить возможным механизмом генерации дифференциального вращения на периферии плазмы.

Предложен механизм нелинейного взаимодействия геодезической акустической моды и низкочастотного ЗТ, объясняющий наблюдаемое в экспериментах на токамаках расщепление спектрального пика ГАМ. Взаимодействие собственных мод существенно различных частот приводит к модуляции амплитуды колебаний ГАМ на частоте колебаний ЗТ, что проявляется в спектре колебаний в виде двух боковых гармоник вблизи частоты ГАМ. Частоты указанных гармоник отвечают сумме и разности частот ГАМ и ЗТ. В линейно неустойчивой системе нелинейность приводит к стабилизации неустойчивого ЗТ с формированием “насыщенной” низкочастотной моды с последующей генерацией множества боковых гармоник ГАМ. Триггером эффекта служит стационарное тороидальное вращение и обусловленная им полоидальная стратификация плазмы. Формируемая на основе данных диагностических систем картина спектра существенно зависит не только от глубины модуляции и частоты взаимодействующих мод, но и от частотного разрешения сигналов.

Глава 3

Градиентно-дрейфовые волны в частично замагниченной плазме в скрещенных полях

Гидродинамические волны градиентного типа в частично замагниченной плазме в скрещенных полях исследуются в рамках двухжидкостной модели (1.50)–(1.54). В анализ включены эффекты равновесного вращения электронов, конечной скорости ионного потока, градиентов плотности плазмы и магнитного поля, инерции и температуры электронов, а также дебаевские эффекты. Предложена физическая трактовка явления крупномасштабных осцилляций разряда в установках холловского типа, основанная на исследовании глобальных мод градиентно-дрейфовой неустойчивости.

Принцип действия холловских плазменных установок, к которым, в частности, относятся стационарные плазменные двигатели, основан на эффекте Холла, ответственном за поддержание постоянного “надтеплого” электрического поля в системе отсчёта плазмы, помещённой во внешнее (в СПД – преимущественно радиальное) магнитное поле. Напряжённость магнитного поля выбрана таковой, чтобы обеспечить замагниченность электронной компоненты плазмы при незамагниченной ионной компоненте, что позволяет осуществлять эффективное ускорение ионов вдоль электрического поля. Электроны же дрейфуют в азимутальном направлении со скоростью $\mathbf{V}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/B^2$, обеспечивая эффективную ионизацию атомов рабочего газа (обычно ксенон) вплоть до 90%. “Замагниченность” электронов в такой системе позволяет избежать ограничений, связанных с образованием объёмного заряда в плазме и значительно превысить предел по плотности тока, определяемого классическим закон Чайлда-Ленгмюра.

Рабочим режимам холловских плазменных установок и, в частности, стационарных плазменных двигателей присущ широкий набор колебаний плазмы [296]. Обычно среди них эмпирически выделяют три диапазона частот: $\sim 1 - 10$ кГц, ~ 100 кГц и $\sim 1 - 10$ МГц. Низкочастотная ветвь традиционно ассоциируется с аксиальными пуль-

сирующими модами [297] и азимутальными вращающимися структурами типа спиц [46]. Промежуточный диапазон частот соответствует время-пролётным колебаниям [39]. Высокочастотная ветвь содержит различные типы волн, которые связывают как с высокочастотной частью спектра время-пролётных колебаний, так и с неустойчивостями рэлеевского типа [296, 298, 299]. Наблюдаемые колебания могут быть ответственны за турбулентность и аномальный перенос электронов поперёк внешнего магнитного поля в холловской плазме [300, 301]. При этом открытым остаётся вопрос как об источнике возникновения наблюдаемых флуктуаций, так и о механизмах индуцируемого ими переноса.

Далее в диссертации представлен анализ устойчивости и нелинейного возбуждения крупномасштабных волн нижнегибридного диапазона частот в частично замагниченной плазме в скрещенных полях. В разделе 3.1, не делая никаких априорных предположений о частоте и длине волны возмущений, а также о равновесных параметрах плазмы, получен общий аналитический критерий устойчивости, пригодный для единообразного описания полного спектра градиентно-дрейфовых мод. В некоторых практически важных случаях продемонстрирована возможность стабилизации коротковолновой части спектра, приводящей к развитию длинноволновой неустойчивости. В конце раздела получены уравнения глобальных мод ГДН для исследования крупномасштабных азимутальных волн в холловской плазме и представлен аналитический пример их решения в однородном магнитном поле, отражающий специфику спектра глобальных градиентно-дрейфовых мод. В разделе 3.2 разработанная теория применена к типичным параметрам и профилям плазмы в разряде стационарного плазменного двигателя модели СПД-100. Рассчитан сплошной спектр колебаний и проанализировано изменение спектральных характеристик неустойчивых мод вдоль длины ускоряющего канала. В разделе 3.3 рассчитаны собственные (глобальные) моды ГДН, а их характеристики сопоставлены с параметрами крупномасштабных вращающихся структур, экспериментально наблюдаемых в холловских плазменных разрядах.

3.1 Градиентно-дрейфовая неустойчивость. Формальный анализ

Особенное значение как для лабораторной, так и для космической плазмы имеют неустойчивости в так называемом *нижнегибридном* диапазоне частот: между ионной ω_{Bi} и электронной ω_{Be} циклотронными частотами, $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$. Такие неустойчивости, в частности, проявляются в магнетронных плазменных разрядах, холловских источниках ионов, разрядах Пеннинга, ускорителях с замкнутым дрейфом электронов (холловских двигателях) – см., например, обзоры [297, 302] и ссылки в них – пробочных [303] и магнитоэлектростатических ловушках [304, 305], а также в условиях магнитосферной и ионосферной плазмы. Считается, что неустойчивости в нижнегибридном диапазоне частот являются источником явлений аномального переноса, таких как аномальная резистивность электронов и турбулентный нагрев плазмы [304–306].

Наличие электрического поля в частично замагниченной плазме приводит к возникновению стационарного тока электронов, связанного с электрическим дрейфом в скрещенных полях, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Под действием электрического тока, протекающего поперёк магнитного поля, и при наличии градиентов температуры или концентрации в плазме развиваются электростатические неустойчивости, которые также называют градиентно-дрейфовыми [64, 65]. В англоязычной литературе наряду с термином “градиентно-дрейфовая неустойчивость” (“gradient drift instability”) используется понятие “ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -неустойчивость” (“cross-field instability”), не употребляемое в отечественных публикациях.

Неустойчивость градиентно-дрейфового типа в открытых магнитных ловушках исследовалась в работах [304, 305, 307, 308]. Экспериментальное и теоретическое исследование градиентно-дрейфовой неустойчивости в условиях стационарных плазменных двигателей было проведено в [213, 309], где было получено общее дисперсионное соотношение для строго поперечных возмущений с $k_{\parallel} = 0$ ($k_{\parallel}$ – компонента волнового вектора вдоль равновесного магнитного поля); также см. более поздние работы [310, 311]. Полученное дисперсионное уравнение было проанализировано в [213, 309–311] лишь в некоторых предельных случаях и с использованием дополнительных упрощающих предположений, обсуждение применимости которых см. в [296].

Градиентно-дрейфовая неустойчивость традиционно считается ис-

точником высокочастотных коротковолновых колебаний в холловской плазме – см., например, [213, 296, 309]. Было показано [109, 209, 312], что учёт инерции и конечного ларморовского радиуса электронов приводит к стабилизации коротковолновых мод при некоторых значениях равновесных параметров плазмы вблизи порога неустойчивости, в результате чего в системе возбуждаются только длинноволновые моды. Поэтому градиентно-дрейфовая неустойчивость может также рассматриваться как механизм возбуждения низкочастотных колебаний и структур в холловской плазме [40, 309]. Линейная теория ГДН в длинноволновом пределе была рассмотрена в [313] с использованием дисперсионного соотношения, схожего с полученным в [213, 309]. В [214, 314] это дисперсионное соотношение было пересмотрено с учётом полной сжимаемости электронного потока в вакуумном магнитном поле, при этом также учитывались неоднородность температуры электронов и её возмущения. Влияние градиентов плотности плазмы, температуры и магнитного поля на более коротковолновые и высокочастотные колебания в нижнегибридном диапазоне частот исследовалось в [315–319].

3.1.1 Общий закон дисперсии электростатических возмущений

Рассмотрим электростатические, $\mathbf{E}' = -\nabla\phi'$, возмущения в уравнениях (1.50)–(1.54), зависящие только от поперечных (по отношению к основной компоненте магнитного поля $\mathbf{B} \approx B\mathbf{e}_X$) координат Y, Z . Для начала ограничимся локальным анализом устойчивости, предполагая пространственно-временную зависимость возмущённых величин в виде разложения по гармоникам Фурье $\sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, где $\mathbf{k} = (0, k_Y, k_Z)$ – волновой вектор, ω – частота возмущений, причём $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$. Такой подход оправдан, если длина волны в направлении Z мала по сравнению с типичной длиной неоднородности L равновесных параметров системы: плотности, магнитного и электрического полей: $k_Z L \gg 1$.

Представим скорость и плотность ионной компоненты плазмы в виде $\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{e}_Z + \mathbf{v}'_i$, $n_i = n_e/Z_i + n'_i$ (в равновесии предполагается выполнение условия квазинейтральности), где $\mathbf{v}'_i$, n'_i – малые возмущения, такие что $(|\mathbf{v}'_i|, n'_i) \ll (v_i, n_e)$. Тогда, линеаризуя уравнения (1.50), (1.51) по отношению к малой амплитуде возмущений, прихо-

дим к уравнениям

$$(\omega - k_Z v_i) \mathbf{v}'_i = \frac{Z_i e \mathbf{k}}{m_i} \phi', \quad (\omega - k_Z v_i) n'_i - n_e (\mathbf{k} \mathbf{v}'_i) = 0. \quad (3.1)$$

Из уравнения (3.1) следует выражение для возмущения ионной концентрации

$$n'_i = \frac{Z_i e k_{\perp}^2 n_e}{m_i (\omega - k_Z v_i)^2} \phi', \quad (3.2)$$

где $k_{\perp}^2 = k_Y^2 + k_Z^2$.

Из уравнения (1.61) следует, что

$$\begin{aligned} & [\omega - \omega_E - \omega_D + k_{\perp}^2 \rho_e^2 (\omega - \omega_E - 2\omega_D)] n'_e = \\ & = [\omega_P - \omega_D + k_{\perp}^2 \rho_e^2 (\omega - \omega_E - 2\omega_D)] \frac{en_e}{T_e} \phi', \end{aligned}$$

где n'_e – возмущённая плотность электронов, $\omega_E = k_Y V_E$, $\omega_P = k_Y V_P$, $\omega_D = k_Y V_D$, V_D – удвоенная скорость градиентного дрейфа электронов: $V_D = -(2cT_e/eB)d \ln B/dZ$ – см. (1.58).

Тогда возмущённая плотность электронов описывается выражением

$$n'_e = \frac{1}{1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2} \left[\frac{\omega_P - \bar{\omega}_D}{\omega - \omega_E - \bar{\omega}_D} + k_{\perp}^2 \rho_e^2 \right] \frac{en_e}{T_e} \phi', \quad (3.3)$$

где

$$\bar{\omega}_D = \frac{1 + 2k_{\perp}^2 \rho_e^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2} \omega_D.$$

Выражение для возмущённой плотности электронов соответствует аппроксимации Падэ. Для длинноволновых возмущений, $k_{\perp}^2 \rho_e^2 \ll 1$, оно сводится к выражению (16) из работы [314]

$$n'_e = \frac{en_e}{T_e} \frac{\omega_P - \omega_D}{\omega - \omega_E - \omega_D} \phi',$$

а для коротковолновых возмущений, $k_{\perp}^2 \rho_e^2 \gg 1$, переходит в распределение Больцмана, $n'_e = (en_e/T_e) \phi'$. Оба эти выражения в соответствующих предельных случаях следуют из кинетического описания электронов. В промежуточном интервале длин волн $k_{\perp}^2 \rho_e^2 > 1$ выражение (3.3) даёт качественно верное описание связи между возмущениями плотности и потенциала плазмы [320].

Подставляя выражения для возмущений плотности ионов (3.2) и электронов (3.3) в возмущённое уравнение Пуассона $k_{\perp}^2 \phi' =$

$4\pi e(Z_i n'_i - n'_e)$, окончательно приходим к следующему дисперсионному соотношению [109, 209]:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{1}{1 + k_\perp^2 \rho_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_Z v_i)^2} + \frac{1}{k_\perp^2 d_e^2} \frac{1}{1 + k_\perp^2 \rho_e^2} \frac{\omega_P - \bar{\omega}_D}{\omega - \omega_E - \bar{\omega}_D} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь $d_e = (T_e/4\pi e^2 n_e)^{1/2}$ – дебаевский радиус электронов, ω_{pe} , ω_{pi} – электронная и ионная плазменные частоты. Полученное дисперсионное соотношение применимо как для длинноволновых мод, исследованных ранее в [314], так и для коротковолновых возмущений с частотой порядка нижегибридной частоты, $\omega \simeq \omega_{lh} \equiv \omega_{pi}/\sqrt{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2}$. В длинноволновом пределе $k_\perp^2 \rho_e^2 \rightarrow 0$ из (3.4) следует дисперсионное соотношение, полученное в [314]. Для такого перехода в (3.4) нужно пренебречь первыми двумя слагаемыми, соответствующими разделению зарядов и инерции электронов, после чего оно сводится к виду [314]:

$$\frac{\omega_P - \omega_D}{\omega - \omega_E - \omega_D} - \frac{k_\perp^2 c_s^2}{(\omega - k_Z v_i)^2} = 0. \quad (3.5)$$

Здесь $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$ – скорость звука. В приближении холодных электронов, $T_e \rightarrow 0$, дисперсионное соотношение (3.4) может быть записано в виде

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_Z v_i)^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}(\omega - \omega_E)} \frac{k_Y(\kappa_n - 2\kappa_B)}{k_\perp^2} = 0,$$

где $\kappa_{n,B} \equiv d \ln(n, B)/dZ$. Подстановка в (3.5) κ_n , соответствующего баллистическому равновесию ионов (1.63), приводит к закону дисперсии, полученному в [213] с двумя отличиями: i) дисперсионное соотношение из [213] учитывает электромагнитные эффекты, которые пренебрежимо малы в типичных условиях холловской плазмы; ii) слагаемое с κ_B входит в дисперсионные уравнения с разными коэффициентами, что обусловлено неполным учётом сжимаемости электронного потока в [213] (см. обсуждение этого вопроса в [314]). В прямом однородном магнитном поле дисперсионное соотношение (3.5) переходит в закон дисперсии, полученный ранее в работах [210, 308] в связи с экспериментами с плазмой в пробочных магнитных системах.

3.1.2 Анализ устойчивости градиентно-дрейфовых волн

Проведём детальный анализ полученного закона дисперсии и отследим изменение критерия устойчивости градиентно-дрейфовых мод

в зависимости от длины волны возмущений [109]. Дисперсионное уравнение (3.4) является кубическим относительно частоты возмущений ω . Это затрудняет его аналитический анализ, который ранее был проведён лишь в некоторых предельных случаях – см., например, [213, 308, 314]. Полученная форма дисперсионного уравнения, тем не менее, даже в общем случае обладает достаточно простым критерием устойчивости [209], представленным ниже.

Для анализа устойчивости удобно переписать дисперсионное уравнение (3.4) в нормированной форме

$$1 - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} - \frac{\alpha k_Y}{k_{\perp}^2 (\tilde{\omega} + k_Y \sigma)} = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{\omega - k_Z v_i}{\omega_0}, \quad \omega_0 \equiv \omega_{pi} \left(\frac{1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2} \right)^{1/2}, \\ \sigma &= \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{c}{B} \left(E + \frac{2T_e}{e} \bar{\kappa}_B \right) + \frac{k_Z}{k_Y} v_i \right], \quad \alpha = \frac{(\kappa_n - 2\bar{\kappa}_B) \omega_0}{\omega_{Bi} (1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2)}, \\ \bar{\kappa}_B &= \frac{1 + 2k_{\perp}^2 \rho_e^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2} \kappa_B. \end{aligned}$$

Исследуемая неустойчивость градиентно-дрейфовых волн принадлежит к классу неустойчивостей, вызванных поперечным током. Параметр σ пропорционален такому току и характеризует “драйв” ГДН. Он состоит из электронного потока, связанного с $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ и градиентным дрейфом, и из потока ускоренных ионов вдоль равновесного электрического поля. Параметр α связан с неоднородностями плотности плазмы и магнитного поля.

Из уравнения (3.6) следует компактное кубическое уравнение с действительными коэффициентами на нормированную частоту $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega}^3 + \lambda \bar{\sigma} \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega} - \bar{\sigma} = 0, \quad (3.7)$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{\alpha}{k_{\perp}^2 \sigma}, \quad \bar{\sigma} = k_y \sigma.$$

Возмущения, описываемые уравнением (3.6), устойчивы, только если все его корни действительны. В противном случае всегда существует неустойчивое решение с $\text{Im } \tilde{\omega} > 0$. Условие действительности

корней уравнения (3.7) записывается в виде

$$4\lambda^3\bar{\sigma}^4 + (\lambda^2 + 18\lambda - 27)\bar{\sigma}^2 + 4 \geq 0. \quad (3.8)$$

Прежде всего отметим, что при $\lambda = 0$ первое слагаемое в левой части уравнения (3.8) пропадает и условие устойчивости сводится к критерию

$$\bar{\sigma}^2 \leq \frac{4}{27}, \quad \text{при } \lambda = 0. \quad (3.9)$$

В остальных случаях в левой части неравенства (3.8) стоит трёхчлен, квадратичный относительно величины $\bar{\sigma}^2$. Условие (3.8), таким образом, может быть переписано в виде

$$\lambda^3(\bar{\sigma}^2 - \mu_1)(\bar{\sigma}^2 - \mu_2) \geq 0, \quad (3.10)$$

где $\mu_{1,2}$ – корни квадратного уравнения

$$4\lambda^3\mu^2 + (\lambda^2 + 18\lambda - 27)\mu + 4 = 0, \quad (3.11)$$

описываемые выражениями

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{8\lambda^3} \left[27 - 18\lambda - \lambda^2 \mp \sqrt{(27 - 18\lambda - \lambda^2)^2 - 64\lambda^3} \right]. \quad (3.12)$$

Легко получить следующие асимптотики для $\mu_{1,2}$ (μ_1 соответствует знаку "–", μ_2 – знаку "+"):

$$\mu_1 \rightarrow -\frac{1}{4\lambda}, \quad \mu_2 \rightarrow -\frac{4}{\lambda^2} < 0, \quad \text{при } \lambda \rightarrow -\infty;$$

$$\mu_1 \rightarrow \frac{4}{27}, \quad \mu_2 \rightarrow \frac{27}{4\lambda^3} \rightarrow \mp\infty, \quad \text{при } \lambda \rightarrow \mp 0;$$

$$(\mu_1, \mu_2) \rightarrow 1, \quad \text{при } \lambda \rightarrow 1.$$

Теперь заметим, что определитель D квадратного уравнения (3.11) (выражение под корнем в уравнении (3.12)) может быть представлен в очень простой и компактной форме

$$D = (27 - 18\lambda - \lambda^2)^2 - 64\lambda^3 \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 9)^3.$$

Ясно, что корни μ_1 и μ_2 действительны, если $D > 0$, т.е. когда $\lambda \leq 1$ и $\lambda \geq 9$. В то же время при $1 < \lambda < 9$ корни являются комплексно сопряжёнными. Имея это ввиду, проведём анализ устойчивости возмущений плазмы в различных диапазонах λ .

При $\lambda \geq 9$ оба корня являются действительными и отрицательными, поскольку

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{1}{\lambda^3} > 0, \quad \mu_1 + \mu_2 = -(\lambda^2 + 18\lambda - 27)/4\lambda^3 < 0,$$

так что $\mu_{1,2} = -|\mu_{1,2}|$. Тогда условие (3.10) принимает вид

$$\lambda^3 (\bar{\sigma}^2 + |\mu_1|) (\bar{\sigma}^2 + |\mu_2|) \geq 0.$$

Это условие заведомо удовлетворяется для любого $\bar{\sigma}$. Таким образом, в рассматриваемом интервале λ возмущения устойчивы.

Если $1 < \lambda < 9$, корни уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными и могут быть записаны в виде $\mu_1 = A + iB$, $\mu_2 = A - iB$. Тогда условие (3.10) имеет вид

$$\lambda^3 [(\bar{\sigma}^2 - A)^2 + B^2] \geq 0.$$

Это условие заведомо удовлетворяется при любом $\bar{\sigma}$, и поэтому при $1 < \lambda < 9$ возмущения устойчивы.

Если $0 < \lambda \leq 1$, оба корня (3.11) действительные и положительные, поскольку $(\mu_1 \cdot \mu_2, \mu_1 + \mu_2) > 0$ и $\mu_1 < \mu_2$. Поскольку $\lambda > 0$, условие устойчивости (3.10) принимает вид: $\bar{\sigma}^2 \leq \mu_1$, $\bar{\sigma}^2 \geq \mu_2$ – или, в терминах λ ,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &\leq \frac{1}{8\lambda^3} \left[27 - 18\lambda - \lambda^2 - \sqrt{(1-\lambda)(9-\lambda)^3} \right], \\ \bar{\sigma}^2 &\geq \frac{1}{8\lambda^3} \left[27 - 18\lambda - \lambda^2 + \sqrt{(1-\lambda)(9-\lambda)^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отметим, что при $\lambda \rightarrow 0$ неравенства (3.13) переходят в критерий (3.9).

Наконец, если $\lambda < 0$, оба корня являются действительными и обладают разными знаками: $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$. Это означает, что условие устойчивости (3.10) сводится к неравенству $\bar{\sigma}^2 \leq \mu_1$, или в явном виде

$$\bar{\sigma}^2 \leq -\frac{1}{8\lambda^3} \left[\sqrt{(1-\lambda)(9-\lambda)^3} + \lambda^2 + 18\lambda - 27 \right]. \quad (3.14)$$

Таким образом, из анализа, представленного выше, следует, что *достаточным* условием устойчивости рассматриваемых возмущений служит условие $\lambda \geq 1$, реализующееся если

$$\begin{aligned} &\left(\frac{eE}{T_e} + \frac{1 + 2k_{\perp}^2 \rho_e^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2} \frac{d \ln B^2}{dZ} + \frac{k_Z \omega_{Bi} v_i}{k_Y c_s c_s} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{d \ln n_e}{dZ} - \frac{1 + 2k_{\perp}^2 \rho_e^2}{1 + k_{\perp}^2 \rho_e^2} \frac{d \ln B^2}{dZ} \right\} \leq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отметим, что условие (3.15) гарантирует устойчивость как длинноволновых, так и коротковолновых высокочастотных (с частотой порядка ω_0) возмущений. Для преимущественно азимутальных возмущений с $k_Z \ll k_Y$ в однородном магнитном поле условие (3.15) имеет вид, идентичный известному критерию Саймона-Хо [64, 65]: $\mathbf{E} \cdot \nabla n_e > 0$.

В области больших длин волн возмущения неустойчивы, если удовлетворяется неравенство, обратное (3.14). Длинноволновые возмущения, ранее исследованные в [214, 314], соответствуют пределу $k_\perp^2 \ll (\rho_e^{-2}, l_0^{-2})$, где

$$l_0^2 \equiv \frac{\omega_{Bi}}{\omega_{pi}^2(\kappa_n - 2\kappa_B)} \left[\frac{c}{B} \left(E + 2\frac{T_e}{e}\kappa_B \right) + \frac{k_Z}{k_Y} v_i \right].$$

В этом случае $\mu_1 \rightarrow -1/4\lambda$, и неустойчивость имеет место, если

$$\frac{1}{\omega_{Bi}} \left(\frac{cE}{B} + \frac{k_Z}{k_Y} v_i \right) \frac{d}{dZ} \ln \left(\frac{n}{B^2} \right) > \frac{k_\perp^2}{4k_Y^2}. \quad (3.16)$$

Критерий неустойчивости длинноволновых градиентно-дрейфовых возмущений (3.16) был ранее получен в [314].

Согласно анализу, представленному выше, общее *необходимое и достаточное* условие неустойчивости градиентно-дрейфовых волн может быть сформулировано в виде

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^2 > \mu_1, & \text{при } \lambda \leq 0; \\ \mu_1 < \bar{\sigma}^2 < \mu_2, & \text{при } 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Полная картина неустойчивости суммирована на рис. 3.1. Границы неустойчивой области описываются кривыми $\bar{\sigma}^2 = \mu_{1,2}$ – см. (3.12). При $\lambda \leq 0$ неустойчивой оказывается область над кривой $\bar{\sigma}^2 = \mu_1$, при $0 < \lambda < 1$ – между кривыми $\bar{\sigma}^2 = \mu_1$ и $\bar{\sigma}^2 = \mu_2$, пересекающимися при $\lambda = 1$. Область $\lambda > 1$ устойчива.

Опираясь на построенную диаграмму устойчивости, исследуем роль инерции и КЛР электронов в эволюции градиентно-дрейфовых волн. Начнём с эффектов инерции, полагая $k_\perp^2 \rho_e^2 = 0$ и рассматривая чисто азимутальные возмущения плазмы. В этом случае параметры α и σ не зависят от волнового числа возмущений, $\alpha_0 = \alpha|_{k_\perp^2 \rho_e^2 \rightarrow 0}$, $\sigma_0 = \sigma|_{k_\perp^2 \rho_e^2 \rightarrow 0}$, и являются функциями только равновесных параметров плазмы. В терминах λ и $\bar{\sigma}$ дисперсионное уравнение (3.5) с учётом

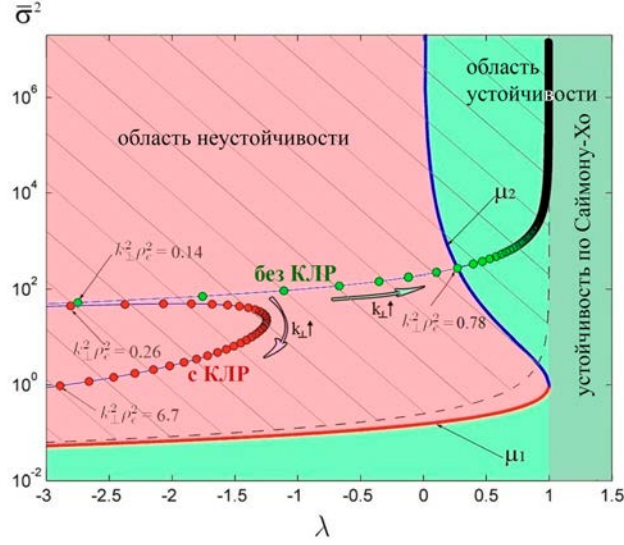


Рис. 3.1: Диаграмма устойчивости градиентно-дрейфовых волн в плоскости $\bar{\sigma}^2 - \lambda$ [209]. Зелёным цветом показана область устойчивости, красным цветом – неустойчивая область. Пунктирная линия показывает границу области устойчивости без учёта инерции электронов; соответствующая область неустойчивости заштрихована.

эффектов инерции имеет вид:

$$\bar{\sigma}(1 - \lambda)\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega} + \bar{\sigma} = 0.$$

Граница устойчивости для данного закона дисперсии определяется равенством $\bar{\sigma}^2 = 1/4(1 - \lambda)$ (условие (3.16)), показанным на рис. 3.1 пунктирной линией. Область неустойчивости располагается над этой кривой. Сравнивая диаграммы устойчивости с учётом и без учёта инерции электронов, легко видеть, что инерция, с одной стороны, приводит к расширению области устойчивости при больших значениях поперечного тока электронов (драйва неустойчивости) $\bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma}^2 > \bar{\sigma}_{\text{int}}^2$), а с другой стороны – к дополнительной дестабилизации возмущений при малых $\bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma}^2 < \bar{\sigma}_{\text{int}}^2$), где $\bar{\sigma}_{\text{int}}^2 = 1/2(5\sqrt{5} - 11)$ соответствует точке пересечения кривых $\bar{\sigma}^2 = \mu_2$ (верхняя граница области устойчивости с учётом эффектов инерции) и $\bar{\sigma}^2 = 1/4(1 - \lambda)$ (граница области устойчивости без учёта инерции).

Зафиксируем значения равновесных параметров α_0, σ_0 и проследуем вдоль параметрической кривой $\bar{\sigma}^2(\lambda)$ на диаграмме устойчивости, меняя значение волнового числа $k_{\perp}$. Для чисто азимутальных мод ($k_z = 0$) кривая описывается соотношением $\bar{\sigma}^2 = \alpha_0 \sigma_0 / (1 - \lambda)$, повторяя зависимость границы области устойчивости без учёта инерции

электронов, $\bar{\sigma}^2 = 1/4(1 - \lambda)$. В качестве примера соответствующая кривая при¹⁶ $\alpha_0 = -488 \text{ см}^{-1}$, $\sigma_0 = -0,402 \text{ см}$ показана на рис. 3.1 чёрной линией с зелёными кружками: $k_\perp$ увеличивается при движении вдоль кривой слева направо. Таким образом, без учёта инерции электронов весь спектр возмущений $k_\perp \in (0, \infty)$ оказывается неустойчивым при $\alpha_0\sigma_0 > 1/4$; при $\alpha_0\sigma_0 < 1/4$ все моды устойчивы. Учёт эффектов инерции приводит к отсечке коротковолновых мод, при этом максимально возможное значение волнового числа неустойчивой моды $k_{\perp max}$ определяется выражением $\alpha_0\sigma_0/(1 - \lambda) = \mu_2$. В дополнительной области неустойчивости, возникающей вблизи порога неустойчивости (малые $\bar{\sigma}$) при учёте эффектов инерции, волновые числа неустойчивых мод ограничены значениями от $k_{\perp min}$, заданного $\alpha_0\sigma_0/(1 - \lambda) = \mu_1$, до $k_{\perp max}$, заданного $\alpha_0\sigma_0/(1 - \lambda) = \mu_2$.

На рис. 3.2 показаны линии уровня частот, $\omega_r = \text{Re}(\omega)$, и инкрементов, $\gamma = \text{Im}(\omega)$, неустойчивых мод над плоскостью $\bar{\sigma}^2 - \lambda$, рассчитанные из уравнения (3.7) по тригонометрической формуле Виета. Следуя вдоль чёрной кривой с зелёными кружками на рис. 3.2а, легко наблюдать увеличение частоты неустойчивых колебаний с ростом $k_\perp$ – от низких частот, $\omega \ll \omega_{lh}$, до высоких, $\omega \geq \omega_{lh}$. Как видно из рис. 3.2б, высокочастотные коротковолновые колебания обладают большими инкрементами по сравнению с низкочастотными длинноволновыми модами. При больших значениях σ (высокий драйв неустойчивости) максимум инкремента неустойчивости реализуется при $\lambda = 0$. Это условие однозначно определяет длину волны наиболее неустойчивой моды: $k_\perp^2|_{\lambda=0} = \alpha_0/\sigma_0$:

$$k_\perp|_{\lambda=0} = \frac{\omega_{lh}}{\rho_e \sqrt{\omega_{Be}\omega_{Bi}}} \sqrt{\frac{V_P - V_D}{V_E + V_D}}.$$

Чем больше драйв, тем больше длина волны моды с максимальным инкрементом. Поскольку при больших $\bar{\sigma}^2$ правая граница неустойчивости, μ_2 , асимптотически подходит к $\lambda = 0$, без учёта КЛР электронов длина волны наиболее неустойчивой моды практически совпадает с наиболее короткой длиной волны неустойчивых возмущений (максимальное $k_{\perp max}$). Частоты неустойчивых мод вблизи правой границы устойчивости имеют порядок нижнегибридной частоты ω_{lh} и выше

¹⁶Используемые значения α_0 и σ_0 соответствуют следующим значениям параметров плазмы: $B = 200 \text{ Гс}$, $V_E = 6 \times 10^6 \text{ см/с}$, $n_e = 0,5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 3,125 \text{ эВ}$, $\kappa_n = 1 \text{ см}^{-1}$, $\kappa_B = 1 \text{ см}^{-1}$; рассматриваются однозарядные ионы ксенона

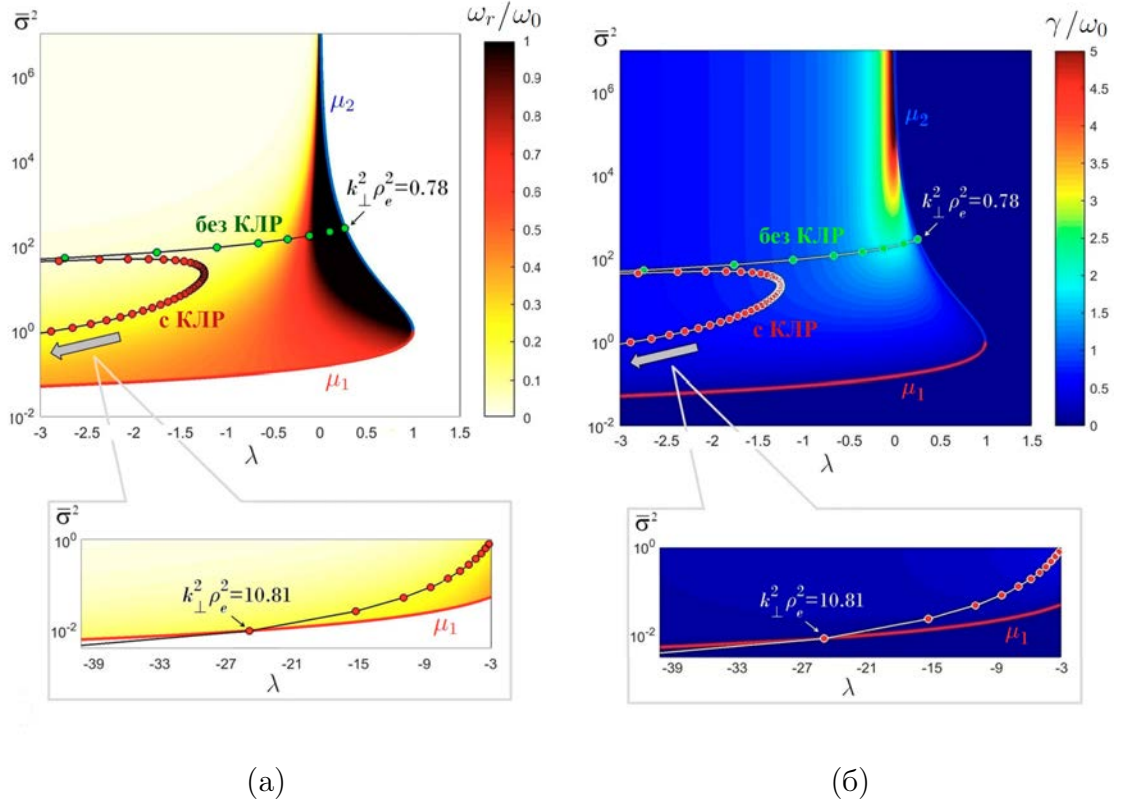


Рис. 3.2: Линии уровня частот (а) и инкрементов (б) неустойчивых мод над плоскостью $\bar{\sigma}^2 - \lambda$. На рис. (а) белый цвет обозначает область устойчивости; моды с частотой выше ω_{lh} показаны чёрным цветом.

– см. рис. 3.2а. Таким образом, без учёта эффектов конечного ларморовского радиуса электронов максимальным инкрементом обладают высокочастотные длинноволновые моды, т. к. $k_\perp^2|_{\lambda=0} \sim 1/\sigma_0$.

Эффекты КЛР существенно усложняют картину неустойчивости, поскольку параметры α и σ при их учёте зависят не только от равновесного состояния плазмы, но также являются функциями $k_\perp$. Как следствие, при фиксированных параметрах плазмы функция $\bar{\sigma}^2(\lambda)$ не обязательно является растущей монотонной функцией – см. чёрную кривую с красными кружками на рис. 3.1, которая рассчитана при тех же параметрах, что были использованы ранее, но с учётом КЛР, $k_\perp \rho_e \neq 0$. В рассматриваемом случае эффекты КЛР весьма существенно меняют поведение $\bar{\sigma}^2(\lambda)$: из строго монотонной функции она становится многозначной. Отметим, что представленная зависимость не является универсальной и лишь демонстрирует один из возможных вариантов влияния эффектов КЛР.

В области неустойчивости для $k_\perp$, превышающего некоторое критическое значение, как кривая $\bar{\sigma}^2$, так и λ становятся спадающими

функциями $k_{\perp}$, что тем самым ограничивает кривую от попадания в область высоких частот. Полная стабилизация коротковолновых мод происходит при пересечении кривой $\bar{\sigma}^2(\lambda)$ с нижней границей устойчивости, μ_1 .

Относительный вклад эффектов инерции и КЛР зависит от отношения между пространственным масштабом $(\sigma_0/\alpha_0)^{1/2}$, на котором становятся заметными эффекты инерции электронов, и ларморовским радиусом ρ_e [209]. Это отношение определяется безразмерным параметром $\Delta \equiv \alpha_0 \rho_e^2 / \sigma_0$.

При слабом драйве неустойчивости, определяемом параметром σ_0 , таком что $\Delta > 1$, неустойчивость стабилизируется эффектами КЛР электронов значительно раньше того, как становятся важны эффекты инерции. Зависимости частот и инкрементов неустойчивых возмущений в таком случае (при $\sigma_0 = -0,12$ см, соответствующем $V_E = 3,4 \times 10^6$ см/с) представлены на рис. 3.3а. Все остальные параметры плазмы выбраны такими же, как и ранее: $B = 200$ Гс, $n_e = 0,5 \times 10^{12}$ см $^{-3}$, $T_e = 3,125$ эВ, $\kappa_n = 1$ см $^{-1}$, $\kappa_B = 1$ см $^{-1}$, ксенон, так что $\alpha_0 = -488$ см $^{-1}$ и $\Delta \simeq 5,64$. Хорошо видна значительная разница между кривыми рассчитанными с учётом и без учёта КЛР. Эффекты КЛР стабилизируют неустойчивость при $k_{\perp} \rho_e \lesssim 0,3$, при этом неустойчивыми являются только относительно низкочастотные возмущения с $\omega \leq 0,02\omega_{lh}$. Пренебрежение конечным ларморовским радиусом электронов приводит к развитию неустойчивости на больших $k_{\perp}$ (вплоть до $k_{\perp} \rho_e \lesssim 3,35$). Частоты неустойчивых коротковолновых возмущений также повышаются, вплоть до $\omega \simeq 2,5\omega_{lh}$. Ясно, что модели, не учитывающие эффекты КЛР, не пригодны для описания устойчивости плазмы с рассматриваемыми параметрами.

В противоположном предельном случае сильного драйва неустойчивости $\sigma_0 = -3,76$ см, соответствующего $V_E = 3 \times 10^7$ см/с, имеем $\Delta \simeq 0,06$. В этом случае стабилизация неустойчивости эффектами электронной инерции происходит для возмущений с длиной волны, значительно превышающий ларморовский радиус электронов (при $k_{\perp} \rho_e \simeq 0,25$). Поэтому, эффекты КЛР лишь слабо влияют на диапазон волновых чисел, частоты и инкременты неустойчивых мод (см. рис. 3.3б).

Наконец, в промежуточной области параметров плазмы, рассматриваемой ранее на рис. 3.2 ($\sigma_0 = -0,402$ см, $V_E = 6 \times 10^6$ см/с), имеем $\Delta \simeq 0,54$. При этом эффекты инерции и КЛР становятся важны

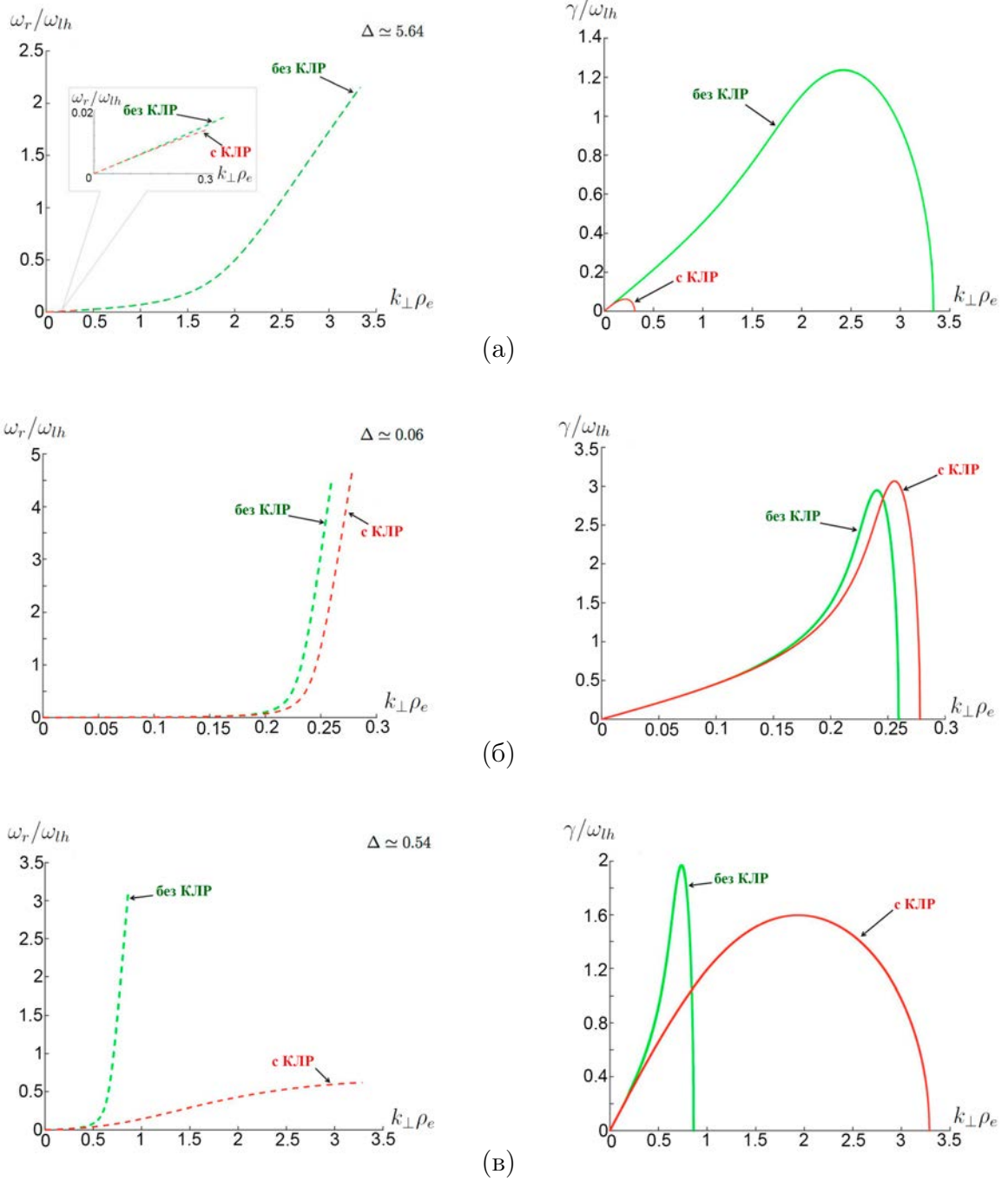


Рис. 3.3: Зависимости частот (левая колонка) и инкрементов (правая колонка) неустойчивых мод от $k_{\perp}$ при различных V_E [209]: (а) $V_E = 3,4 \times 10^6$ см/с; (б) $V_E = 3 \times 10^7$ см/с; (в) $V_E = 6 \times 10^6$ см/с. Здесь $B = 200$ Гс, $n_e = 0,5 \times 10^{12}$ см $^{-3}$, $T_e = 3,125$ эВ, $\kappa_n = 1$ см $^{-1}$, $\kappa_B = 1$ см $^{-1}$, рассматриваются однозарядные ионы ксенона.

при сопоставимых длинах волн. Конкуренция этих двух эффектов значительно влияет на картину неустойчивости (см. рис. 3.3в). Область неустойчивости расширяется в сторону более коротких длин волн (вплоть до $k_{\perp}\rho_e \simeq 3,3$) по сравнению с моделью без учёта эффектов КЛР. Также при $0,4 \lesssim k_{\perp}\rho_e \lesssim 0,75$ наблюдается заметное уменьшение частот и инкрементов неустойчивых мод, что означает неприменимость моделей, не учитывающих конечность ларморовского радиуса электронов, для возмущений с $k_{\perp}\rho_e \gtrsim 0,4$.

Здесь мы рассмотрели лишь несколько примеров влияния эффектов КЛР электронов на градиентно-дрейфовую неустойчивость в холловской плазме. Детальное исследование ГДН с учётом конечного ларморовского радиуса электронов является сложной многопараметрической задачей и служит предметом более подробного анализа [321].

3.1.3 Уравнения глобальных мод в холловской плазме

Получим уравнения, описывающие аксиальную (вдоль электрического поля) структуру глобальных мод градиентно-дрейфовой неустойчивости в холловской плазме. Для крупномасштабных мод, длина волны которых сопоставима с размером системы и с характерными размерами неоднородностей плазмы и магнитного поля, представление в виде разложения по плоским волнам $\sim \exp(ik_z Z)$ становится неприменимым. При этом вид собственных функций должен быть определён из решения соответствующей задачи на собственные значения при заданных граничных условиях. Между тем, как мы только что показали, тепловые эффекты важны преимущественно для коротковолновых возмущений и могут быть опущены при рассмотрении длинноволнового предела. Это существенно упрощает дальнейший анализ.

Уравнение непрерывности электронов (1.61) в рассматриваемом случае сводится к виду [210]:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_E \cdot \nabla \right) n_e - 2n_e (\mathbf{V}_E \cdot \nabla \ln B) + \\ & + \operatorname{div} \left(\frac{n_e}{\omega_{Be}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \right) \mathbf{V}_E \right] \times \mathbf{b} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Интересуясь линейной стадией развития неустойчивости, представим возмущённые величины в виде стандартного Фурье-разложения

по времени и азимутальной координате. В частности, для возмущения потенциала:

$$\phi'(Y, Z, t) = \sum \phi_k(Z) \exp(-i\omega t + ik_Y Y).$$

Выражая в (1.50), (1.51), (1.54) и (3.17) все возмущённые величины через ϕ' , приходим к искомому дифференциальному уравнению на собственные частоты глобальных градиентно-дрейфовых мод:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_k}{dZ^2} + \kappa_n \frac{d\phi_k}{dZ} - k_Y^2 \phi_k - \\ - \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{lh}^2} \left[2\kappa_B \frac{d\phi_k}{dZ} - \frac{k_Y \Lambda(Z)}{\omega - \omega_E} \phi_k \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$\Lambda(Z) = \omega_{Be}(\kappa_n - 2\kappa_B) + (\kappa_n - 2\kappa_B) \frac{dV_E}{dZ} + \frac{d^2V_E}{dZ^2}. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.18) описывает аксиальную структуру глобальных электростатических градиентно-дрейфовых мод, вращающихся в направлении стационарного дрейфа электронов в скрещенных полях в неоднородной частично-замагниченной плазме, и учитывает эффекты электронной инерции и неоднородности магнитного поля, а также шир равновесной скорости азимутального вращения электронов. Учёт инерции электронов принципиален, поскольку именно она способна приводить к стабилизации коротковолновых колебаний [312]. При выводе уравнения (3.18) явно предполагалось, что плазма является достаточно плотной (например, для типичных значений параметров плазмы в СПД: $n_e \simeq 0,5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $B \simeq 200 \text{ Гс}$ – $\omega_{pe} \simeq 50 \text{ ГГц}$, а $\omega_{Be} \simeq 3,5 \text{ ГГц}$), а расстояние пролёта ионов за время $1/\omega$ мало по сравнению с длиной волны возмущений. Последнее предположение позволяет пренебречь влиянием равновесной ионной скорости v_i на неустойчивость. Также не учитывались столкновения электронов с нейтральными атомами. Можно показать, что для азимутальных волн столкновения важны при $k_Y \gtrsim (\kappa_n - 2\kappa_B)\omega_{Be}/\nu_{ne}$, где ν_{ne} – частота столкновений электронов с нейтрами, т. е. ввиду $\omega_{Be} \gg \nu_{ne} \sim \text{МГц}$ только для очень коротковолновых возмущений. Отдельно стоит отметить, что второй и третий члены в выражении (3.19), вообще говоря, пренебрежимо малы в силу условия $\omega \ll \omega_{Be}$, однако в случае $\kappa_n - 2\kappa_B \approx 0$ слагаемое $\sim d^2V_E/dZ^2$ играет ключевую роль при описании неустойчивостей типа Кельвина-Гельмгольца,

возникающих в гидродинамических и плазменных системах с существенно неоднородным профилем вращения среды.

Уравнения, схожие по виду с (3.18), хорошо известны в теории плазменных и гидродинамических неустойчивостей [210, 322, 323]. Например, в случае $\kappa_n = \kappa_B = 0$ и $\omega \gg \omega_{lh}$ уравнение (3.18) принимает вид уравнения Рэлея [323], плазменный аналог которого описывает желобковые колебания газа заряженных частиц [322]. Схожие уравнения использовались в [298] для исследования крупномасштабных мод в конфигурации холловского двигателя.

3.1.4 Глобальные градиентно-дрейфовые моды в цилиндрической конфигурации скрещенных полей с однородным магнитным полем

Представим пример решения уравнения глобальных мод ГДН в однородном магнитном поле, дающий представление о характерном спектре поперечных нижнегибридных волн в холловской плазме [119].

Рассмотрим простейшую осесимметричную систему магнетронного типа с осевым магнитным и радиальным электрическим полем – см. подраздел 1.3.2 – для которой искомые результаты могут быть получены аналитически. В такой конфигурации удобнее использовать цилиндрическую систему координат вместо декартовой, введенной ранее для описания мод сплошного спектра. Магнитное поле считаем постоянным и направленным вдоль оси $X = z$: $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, $B = \text{const}$. Электрическое поле, наведённое между двумя проводящими цилиндрами радиуса R_1 и R_2 , направлено вдоль оси $Z = R$, и его напряжённость есть функция радиуса: $\mathbf{E} = E(R)\mathbf{e}_R$. Тогда равновесная скорость $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа электронов направлена по азимуту $Y = \varphi$ и равна $V_E(R) = -cE(R)/B$. Концентрацию плазмы также считаем зависящей от R .

Для характеристики азимутальной неоднородности возмущений используем азимутальное волновое число $m = Rk_Y$: $\phi'(R, \varphi, t) = \sum \phi_k(R) \exp[-i(\omega t - m\varphi)]$. Тогда уравнение (3.18) при $Z = R$, $V_E(R) = -cE(R)/B = R\Omega$ и с учётом $\kappa_B = 0$ переписывается в виде

$$\frac{1}{n_e R} \frac{d}{dR} \left(n R \frac{d\phi_k}{dR} \right) + \left\{ \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{lh}^2} \frac{\omega_{Be} \Lambda(R)}{\omega - m\Omega} - \frac{m}{R} \right\} \frac{m}{R} \phi_k = 0, \quad (3.20)$$

где

$$\Lambda(R) = \frac{1}{n_e} \frac{d}{dR} \left[n_e \left(1 + \frac{1}{\omega_{Be}} \frac{d}{dR} (R\Omega) \right) \right].$$

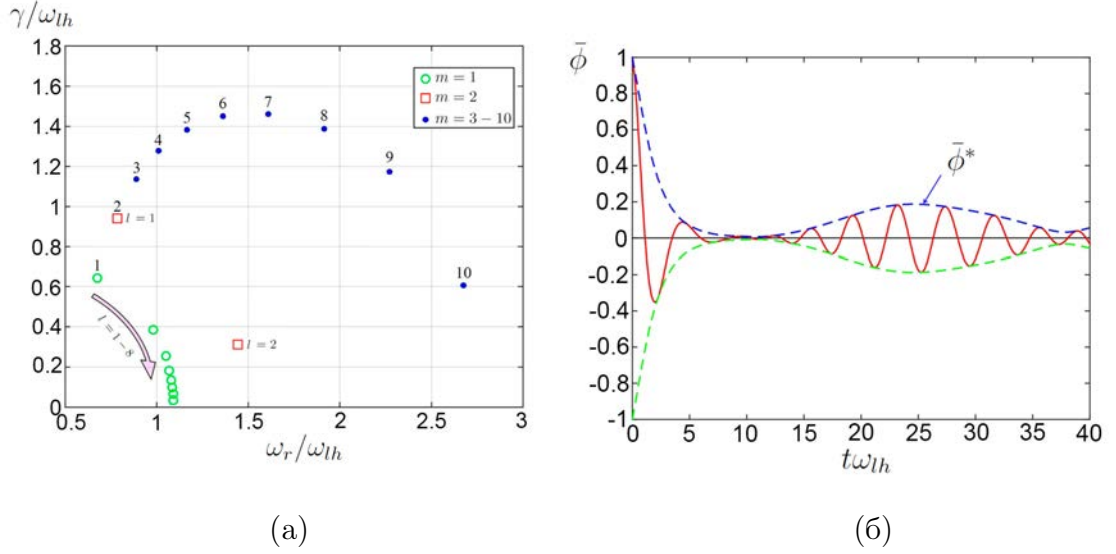


Рис. 3.4: Спектр собственных частот градиентно-дрейфовых мод в модельной конфигурации типа обращённого магнетрона (а), временная эволюция нормированного потенциала плазмы $\bar{\phi}$ (3.24) в фиксированной точке пространства (б).

Рассмотрим случай постоянной угловой частоты стационарного вращения электронов $\Omega = \text{const}$ и профиль концентрации вида $n_e(R) = n_e|_{R=R_1}(R/R_1)^a$, для которого уравнение (3.20) принимает вид

$$R^2 \frac{d^2 \phi_k}{dR^2} + R(1+a) \frac{d\phi_k}{dR} + \nu \phi_k = 0, \quad (3.21)$$

где

$$\nu = m \left\{ a \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{lh}^2} \frac{\omega_{Be}}{\omega - m\Omega} - m \right\}.$$

Решениями (3.21), удовлетворяющими нулевым граничным условиям на внутреннем и внешнем проводящих цилиндрах радиусов R_1 и R_2 , $\phi_k(R_1) = \phi_k(R_2) = 0$, являются функции

$$\phi_k^l(R) = \phi_{k0} \left(\frac{R}{R_1} \right)^{-\frac{a}{2}} \sin \left(\ln \left(\frac{R}{R_1} \right) \sqrt{\nu_l - \frac{a^2}{4}} \right)$$

с собственными значениями

$$\nu_l = \frac{l^2 \pi^2}{\ln^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} + \frac{a^2}{4}.$$

Константой ϕ_{k0} обозначена амплитуда возмущений потенциала при $R = R_1$, l – параметр, характеризующий масштаб радиальной неоднородности решения.

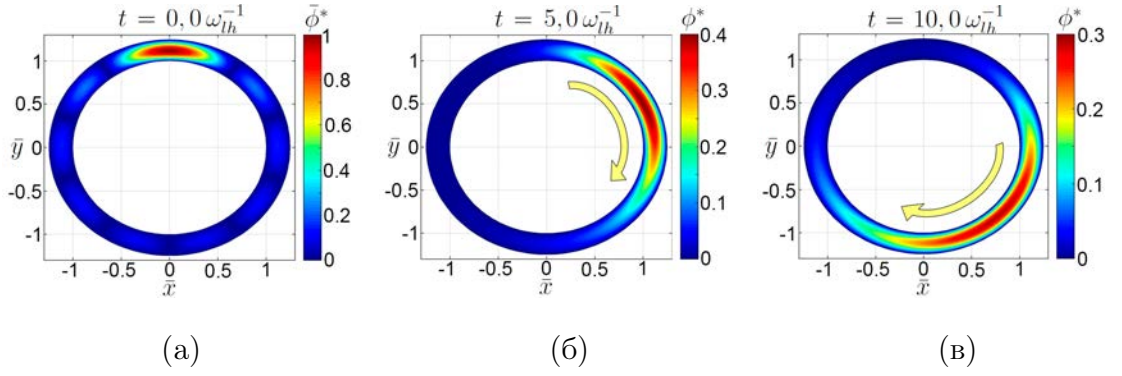


Рис. 3.5: Линии уровня огибающей потенциала $\bar{\phi}^*$ при: (а) $t = 0, 0 \omega_{lh}^{-1}$, (б) $t = 5, 0 \omega_{lh}^{-1}$, (в) $t = 10, 0 \omega_{lh}^{-1}$. На рисунке в плоскости $z = \text{const}$ введены декартовы координаты $\{\bar{x}, \bar{y}\}$, $\bar{x} = R \cos \varphi / R_1$, $\bar{y} = R \sin \varphi / R_1$.

Собственные частоты находятся из условия $\nu = \nu_l$:

$$\hat{\omega}^3 + \lambda \sigma \hat{\omega}^2 - \hat{\omega} - \sigma = 0, \quad (3.22)$$

где

$$\lambda = 1 + \frac{a\mu}{\hat{\Omega}(m^2 + \nu_l)}, \quad \sigma = -m\hat{\Omega},$$

$$(\hat{\omega}, \hat{\Omega}) \equiv (\omega, \Omega) / \omega_{lh}, \quad \mu = \sqrt{m_i / (Z_i m_e)}.$$

Равенство нулю дискриминанта кубического уравнения (3.22) определяет *необходимое* условие неустойчивости: $\lambda < 1$, в соответствии с которым рассматриваемые возмущения могут быть неустойчивы только тогда, когда величины $a = R \nabla n_e / n_e$ и $\Omega = -cE / (RB)$ имеют противоположный знак, что соответствует критерию Саймона-Хо: $\mathbf{E} \cdot \nabla n_e > 0$.

На рис. 3.4а показана зависимость инкремента от частоты собственных мод, рассчитанная согласно уравнению (3.22) для типичных параметров плазмы в холловских разрядах: $\hat{\Omega} = 1, 2$ ($\omega_{lh} \sim 10^6$ рад/с, $V_E \sim 10^7$ см/с), $R_2/R_1 = 1, 25$, $a = -0, 5$, $Z_i = 1$ и $m_i \equiv m_{Xe} = 131$ а.е.м. Рассматривается спадающий профиль концентрации ($a < 0$), реализуемый в условиях баллистического ускорения ионов ($n_e v_i = \text{const}$).

Видно, что в спектре собственных колебаний самыми опасными выступают наиболее крупномасштабные (по R) моды. Для мод с $l = 1$: $\omega_r \simeq 0, 64 - 2, 68 \omega_{lh}$, $\gamma \simeq 0, 64 - 1, 46 \omega_{lh}$, $m = 1 - 10$.

Ближние значения собственных частот и дискретность спектра глобальных мод с $l = 1$ (рис. 3.4а) приводят к необходимости рассматри-

вать их устойчивость не по отдельности, а совместно – как эволюцию единого волнового пакета

$$\phi'(R, \varphi, t) = \sum_m \phi_k^1(R) \exp[-i(\omega_m + i\gamma_m)t + im\varphi]. \quad (3.23)$$

На рис. 3.4б представлена временная эволюция нормированного потенциала плазмы

$$\bar{\phi} \equiv (\phi'/\phi_{max}) \exp(-\gamma_+ t), \quad (3.24)$$

где $\gamma_+ = \gamma_7 \approx \gamma_6$ обозначает инкремент наиболее неустойчивой моды. Начальная амплитуда всех азимутальных гармоник выбрана одинаковой. Видно, что за счёт наличия двух наиболее неустойчивых мод $m = 6$, $m = 7$ с практически равными инкрементами, возмущение потенциала (3.23) релаксирует к биениям

$$\bar{\phi} \sim \exp\left[-i(\omega_6 + \omega_7)\frac{t}{2}\right] \times \{\exp(i\omega_b t) + \exp(-i\omega_b t)\},$$

с частотой огибающей $\omega_b = (\omega_7 - \omega_6)/2 \sim 0,1\omega_{lh}$.

На рис. 3.5 показаны линии уровня огибающей $\bar{\phi}^*$ в различные моменты времени. Крупномасштабная структура $m = 1$ вращается в направлении $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ дрейфа электронов с групповой скоростью $V_{gr} \simeq 0,19V_E$.

3.1.5 Область применения и место полученных результатов

Расширенная гидродинамическая модель градиентно-дрейфовой неустойчивости частично замагниченной плазмы в нижнегибридном диапазоне частот [209] позволила наряду с инерцией электронов и градиентами плотности плазмы и магнитного поля учесть тепловые эффекты, связанные с хаотическим движением электронов – градиентный дрейф и конечный ларморовский радиус. Использование общей формы тензора бесстолкновительной гирвязкости в неоднородном магнитном поле обеспечило адекватное включение эффектов КЛР в гидродинамическое уравнение движения электронов. Уравнения модели точно описывают динамику электронов в длинноволновом пределе $k_\perp \rho_e \ll 1$, а также дают качественно правильные – в смысле приближения Паде – результаты для коротковолновых возмущений с $k_\perp \rho_e \simeq 1$ и выше (вплоть до $k_\perp \rho_e \gg 1$).

Дисперсионное уравнение (3.4) обобщает ранее известные законы дисперсии градиентно-дрейфовых волн в холловской плазме, полученные в работах [210, 213, 296, 308, 309, 314]. В дополнение к [210, 213, 296, 308, 309] учтены эффекты конечной температуры электронов, а в дополнение к [314] – инерция электронов и эффекты КЛР. Аналитически полученный общий критерий устойчивости электростатических градиентно-дрейфовых волн позволил сделать вывод, что инерция электронов стабилизирует коротковолновые возмущения, ограничивая сверху максимальное значение инкремента неустойчивости. Кроме того, короткие волны вблизи порога неустойчивости стабилизируются эффектами КЛР, в результате чего в системе возбуждаются крупномасштабные волны.

Рассчитанный спектр собственных мод градиентно-дрейфовой неустойчивости в конфигурации магнетронного типа с однородным магнитным полем демонстрирует важные особенности глобальных мод ГДН в холловской плазме, как-то: доминирование крупномасштабных азимутальных возмущений в спектре при сильном драйве неустойчивости, и одновременное сосуществование нескольких наиболее неустойчивых мод с близкими частотами и инкрементами, приводящее к генерации низкочастотных биений на линейной стадии развития неустойчивости. Благодаря этому, градиентно-дрейфовая неустойчивость может служить механизмом формирования крупномасштабных азимутальных структур в установках холловского типа. Подробно этот вопрос рассмотрен в следующем разделе диссертации на примере типичных параметров плазмы в стационарном плазменном двигателе модели СПД-100.

3.2 Устойчивость нижнегибридных колебаний в стационарном плазменном двигателе

Исследуем устойчивость градиентно-дрейфовых мод в ускоряющем канале стационарного плазменного двигателя на примере классической модели СПД-100. Вначале, основываясь на дисперсионном уравнении, представленном в разделе 3.1, исследуем устойчивость сплошного спектра колебаний. Далее рассмотрим устойчивость глобальных мод, учитывая реальную геометрию системы.

Конструкция СПД и основные принципы его работы подробно описаны в [297]. Для упрощения рассмотрения будем считать ускоряю-

щий канал плоским, пренебрегая радиальной неоднородностью физических величин. Исследуемая конфигурация полей, а также осевые распределения равновесных физических величин в канале двигателя представлены в разделе 1.3.

Дальнейшие результаты приведены для следующих значений параметров системы: $B_m = 180$ Гс, $n_m = 0,5 \times 10^{12}$ см $^{-3}$, $\Phi_m = 270$ В, $E_m = 100$ В/см, длина ускоряющего канала $d = 2,5$ см, $R_1 = 3$ см и $R_2 = 5$ см – внутренний и внешний радиусы ускоряющего канала (полурадиус канала $R_0 = (R_1 + R_2)/2 = 4$ см), рабочий газ – ксенон, ионизация однократная, $Z_i = 1$.

3.2.1 Анализ устойчивости локализованных мод в ускоряющем канале СПД

Для исследования устойчивости градиентно-дрейфовых мод воспользуемся дисперсионным уравнением

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_z v_i)^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}(\omega - k_\varphi u_e)} \frac{k_\varphi(\kappa_n - 2\kappa_B)}{k_\perp^2} = 0, \quad (3.25)$$

следующим из общего уравнения (3.4) при $k_\perp \rho_e \sim 0$. Напомним, что $V_E = -cE/B$, $V_D = -(2cT_e/eB)\kappa_B$, $u_e = V_E + V_D$ и в геометрии холловского двигателя $X = R$, $Y = \varphi$, $Z = z$. Эффекты конечного ларморовского радиуса электронов исключены из рассмотрения в (3.25) априори для большей наглядности дальнейшего изложения. Расчёт с учётом КЛР качественно не меняет картину неустойчивости и вносит лишь количественные поправки в спектральные характеристики мод, не превышающие $\sim 10\%$ [123].

Будем решать уравнение (3.25) численно для профилей плазмы, представленных на рис. 1.11, и отслеживать изменение характеристик неустойчивых мод вдоль оси ускоряющего канала [110, 118]. При выполнении достаточного условия возникновения неустойчивости в фиксированной точке пространства одновременно возбуждается множество неустойчивых гармоник. Далее будем обсуждать характеристики наиболее неустойчивых (с наибольшими инкрементами) мод спектра из этого множества.

Последовательно рассмотрим три модели ГДН: модель с холодными электронами и неподвижными ионами ($u_e = V_E$, $v_i = 0$), модель

с горячими электронами и неподвижными ионами ($u_e = V_E + V_D$, $v_i = 0$) и наиболее общую модель с горячими электронами и конечной скоростью ионного потока ($u_e = V_E + V_D$, $v_i \neq 0$).

Необходимое условие неустойчивости градиентно-дрейфовых мод ($\lambda < 1$) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left(u_e - \frac{k_z}{k_\varphi} v_i\right) (\kappa_n - 2\kappa_B) < 0. \quad (3.26)$$

Как уже отмечалось, в однородном магнитном поле ($\kappa_B = 0$) и без учёта стационарного течения ионов ($v_i = 0$) условие (3.26) сводится к критерию Саймона-Хо: $\mathbf{E} \cdot \nabla n_e > 0$. В общем случае градиентно-дрейфовая неустойчивость возбуждается комбинацией потоков, связанных с электрическим $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ и градиентным дрейфом электронов, а также потоком ионов вдоль электрического поля (драйв неустойчивости), совместно с неоднородностью плотности плазмы и магнитного поля в поперечном направлении (триггер неустойчивости).

Типичные условия работы холловских плазменных двигателей характеризуются высокой плотностью электронного тока (u_e вплоть до 10^8 см/с). Без учёта стационарного течения ионов и в пределах сильной накачки неустойчивости наиболее “опасными” являются чисто азимутальные возмущения ($k_\varphi u_e \gg \omega_{lh}$) [321], а их основные характеристики могут быть описаны следующими выражениями:

$$\begin{aligned} k_\varphi &= \frac{\omega_{lh}}{\sqrt{\omega_{Bi}}} \sqrt{-\frac{(\kappa_n - 2\kappa_B)}{u_e}}, \\ \omega_r &= \frac{\omega_{lh}}{2} \left(-\frac{u_e(\kappa_n - 2\kappa_B)}{\omega_{Bi}} \right)^{1/6} \text{sgn}(k_\varphi u_e), \\ \gamma &= \frac{\sqrt{3} \omega_{lh}}{2} \left(-\frac{u_e(\kappa_n - 2\kappa_B)}{\omega_{Bi}} \right)^{1/6}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь k_φ , ω_r и γ – волновое число, частота и инкремент наиболее неустойчивых мод в спектре. Пропорциональность частоты знаку $k_\varphi u_e$ говорит о том, что волна распространяется в направлении равновесного тока электронов. Для дальнейшего анализа зафиксируем знак $k_\varphi > 0$. Выражения (3.27) далее будут сопоставлены с результатами прямого численного расчёта.

Плазма с холодными электронами

В пределе холодных электронов $T_e \rightarrow 0$ драйв неустойчивости связан исключительно с $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфом, $u_e = V_E$. Для рассматриваемых профилей электрического и магнитного полей величина V_E не меняет знак вдоль длины канала. Необходимое условие неустойчивости (3.26) в этом случае имеет простейший вид

$$\kappa_n - 2\kappa_B > 0. \quad (3.28)$$

Таким образом, область неустойчивости определяется исключительно градиентами магнитного поля и плотности плазмы. Аксиальный профиль $\kappa_n - 2\kappa_B$ показан на рис. 3.6а. Величина разности

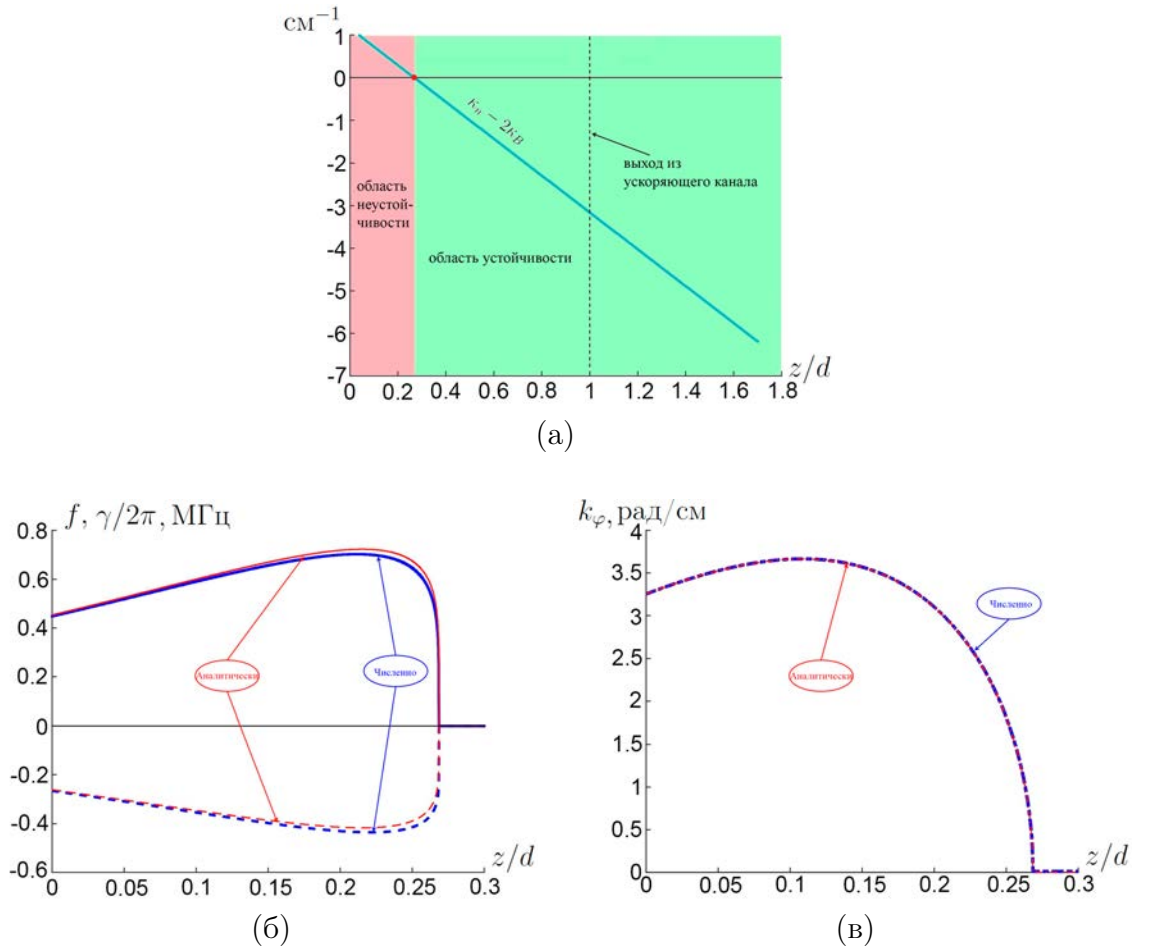


Рис. 3.6: Область неустойчивости в СПД в рамках модели с холодными электронами (а); спектральные характеристики неустойчивых волн в прианодной области двигателя: (б) частоты f (пунктирные линии) и инкременты $\gamma/2\pi$ (сплошные линии), (в) волновые числа k_φ . Аналитические зависимости построены по формулам (3.27).

$\kappa_n - 2\kappa_B$ спадает с ростом z/d (ниже будем опускать $1/d$, полагая $z/d \rightarrow z$) и становится равной нулю в некоторой точке $z_b^{in} \simeq 0,27$, отмеченной красным кружком на рис. 3.6а. В соответствии с (3.28) неустойчивость возникает только в области $z < z_b^{in}$, т. е. в прианодной части двигателя.

На рис. 3.6б,в показаны характеристики неустойчивых возмущений: частоты, $f = \omega_r/2\pi$, инкременты, $\gamma/2\pi$, и волновые числа, k_φ – рассчитанные из решения уравнения (3.25).

Неустойчивость характеризуется большими длинами волн, при этом частоты и инкременты неустойчивых колебаний имеют порядок нижегибридной частоты, ω_{lh} . Наиболее неустойчивая мода с $\gamma/2\pi \simeq 730$ кГц, $f \simeq -450$ кГц, $k_\varphi \simeq 2,6$ рад/см локализована в сечении $z \simeq 0,21$ ускоряющего канала. Полученные характеристики неустойчивости находятся в хорошем соответствии с аналитическими оценками (3.27) – ср. кривые на рис. 3.6б,в.

Плазма с горячими электронами

При учёте конечной температуры электронов драйв неустойчивости включает также и член с градиентным дрейфом, $u_e = V_E + V_D$, а необходимое условие неустойчивости принимает вид:

$$(V_E + V_D)(\kappa_n - 2\kappa_B) < 0. \quad (3.29)$$

Профили скоростей V_E , V_D и $u_e = V_E + V_D$ показаны на рис. 3.7а; рис. 3.7б демонстрирует выполнение необходимого условия неустойчивости (3.29). При $z < 1$ скорости V_E и V_D имеют одинаковый знак, а при $z > 1$ V_D меняет своё направление ввиду изменения направления градиента магнитного поля. В результате неустойчивой становится и область за выходом из ускоряющего канала при $z > z_b^{out} \simeq 1,43$. Точка z_b^{out} соответствует положению, при котором $V_E + V_D = 0$, т. е. при котором скорость результирующего стационарного тока электронов меняет направление, поскольку V_D начинает преобладать над V_E .

В прианодной области конечная температура электронов приводит к значительному росту драйва неустойчивости – см. разницу между кривыми V_E и $V_E + V_D$ на рис. 3.7а. При этом граница области неустойчивости вблизи анода, z_b^{in} , остаётся такой же, как и в модели с холодными электронами, поскольку она определяется лишь разностью $\kappa_n - 2\kappa_B$ и не зависит от величины V_D .

Сравнение характеристик неустойчивости в прианодной области

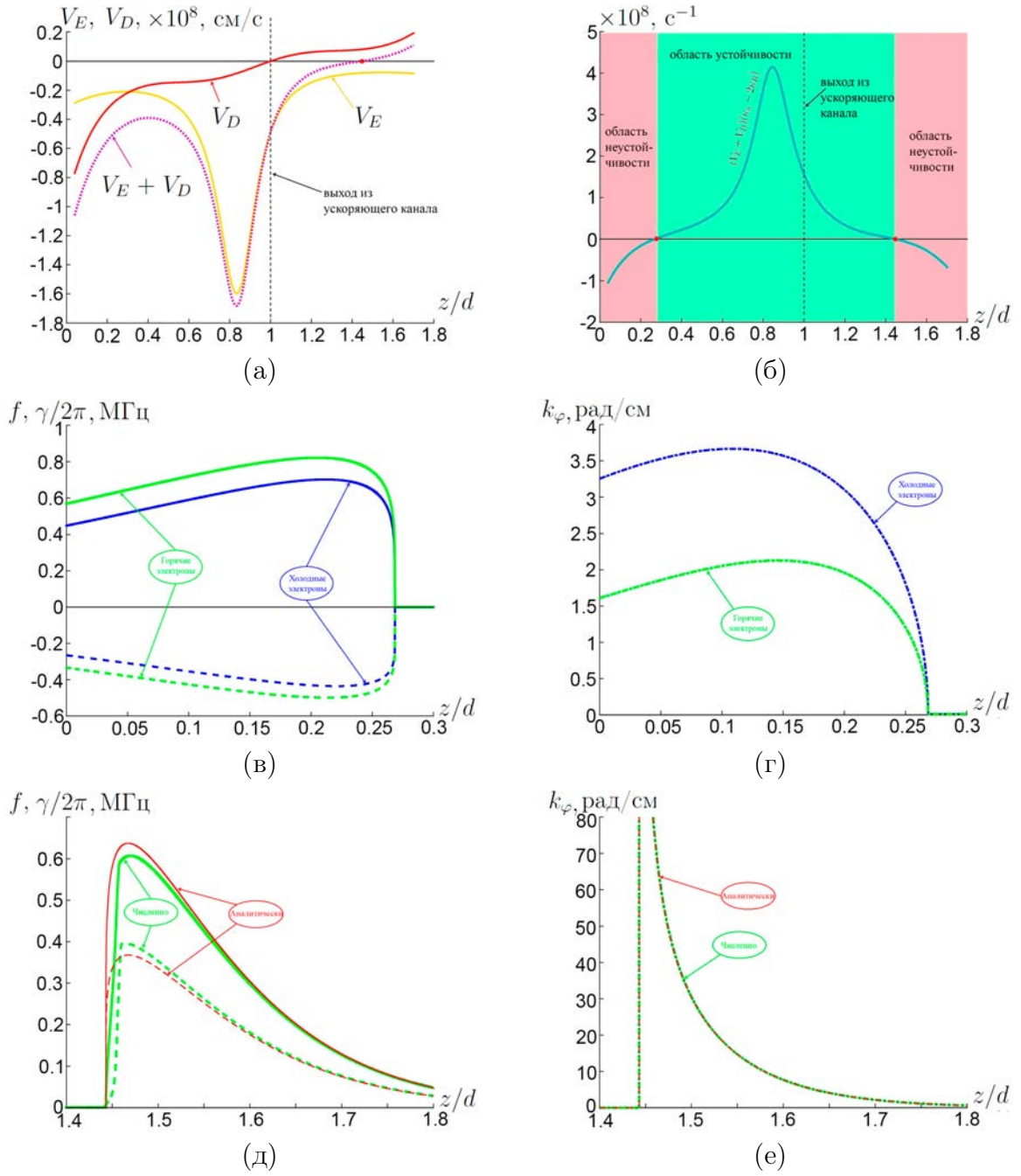


Рис. 3.7: Зависимости V_E , V_D , и $V_E + V_D$ от z/d (а) и области неустойчивости в СПД в рамках модели с горячими электронами (б); спектральные характеристики неустойчивых волн в прианодной области двигателя: (в) частоты f (пунктирные линии) и инкременты $\gamma/2\pi$ (сплошные линии), (г) волновые числа k_φ ; спектральные характеристики неустойчивых волн за выходом из ускоряющего канала: (д) частоты f (пунктирные линии) и инкременты $\gamma/2\pi$ (сплошные линии), (е) волновые числа k_φ . Аналитические зависимости построены по формулам (3.27).

ускорителя для моделей с холодными и горячими электронами показано на рис. 3.7в,г. Разница между характеристиками неустойчивости следующая: с учётом конечной T_e инкременты в среднем увеличиваются на ~ 109 кГц, а частоты – на ~ 48 кГц. Максимум инкремента $\gamma/2\pi \simeq 830$ кГц также приходится на сечение $z \simeq 0,21$ и соответствует частоте $f \simeq -505$ кГц. Существенные изменения претерпевает длина волны возмущений. В среднем волновой вектор уменьшается на величину $\sim 1,4$ рад/см и для наиболее неустойчивой моды он равен $k_\varphi \simeq 1,78$ рад/см. Уменьшение волнового числа с ростом драйва неустойчивости ясно следует из аналитической формулой (3.27).

Характеристики неустойчивости за выходом из ускоряющего канала, $z > z_b^{out}$, представлены на рис. 3.7д,е. Наиболее неустойчивая мода с $\gamma/2\pi \simeq 605$ кГц, $f \simeq 396$ кГц, $k_\varphi \simeq 46$ рад/см локализована в сечении $z = 1,47$. Неустойчивость за выходом из ускоряющего канала является коротковолновой по сравнению с неустойчивостью вблизи анода, что связано со слабым драйвом неустойчивости ($u_e = 0$ при z_b^{out}) в рассматриваемой области.

О роли величины скорости потока ионов

Используем предположение о баллистическом ускорении ионов (1.62). Тогда зависимость v_i от координаты z даётся соотношением:

$$v_i(z) = \sqrt{\frac{2Z_i e}{m_i}(\Phi_m - \Phi(z))}.$$

Рассчитанный таким образом профиль v_i показан на рис. 1.11б: величина ионной скорости достигает значения $\sim 10^6$ см/с на выходе из ускоряющего канала двигателя.

Численное решение уравнения (3.25) показывает, что в прианодной области ($z < z_b^{in}$) ввиду малости v_i учёт конечной скорости ионного потока не оказывает существенного влияния на развитие неустойчивости – см. рис. 3.8. Наиболее неустойчивая мода является чисто азимутальной, а её характеристики остаются неизменными.

Ранее было показано, что в пренебрежении движением ионов основная часть ускоряющего канала ($z_b^{in} \leq z \leq z_b^{out}$) устойчива по отношению к пространственным возмущениям плазмы. При этом даже малая скорость ионов $|v_i| \ll |u_e|$ приводит к дестабилизации данной области. Характеристики неустойчивости в основной части ускоряющего канала показаны на рис. 3.9а,б. Инкремент и частота растут

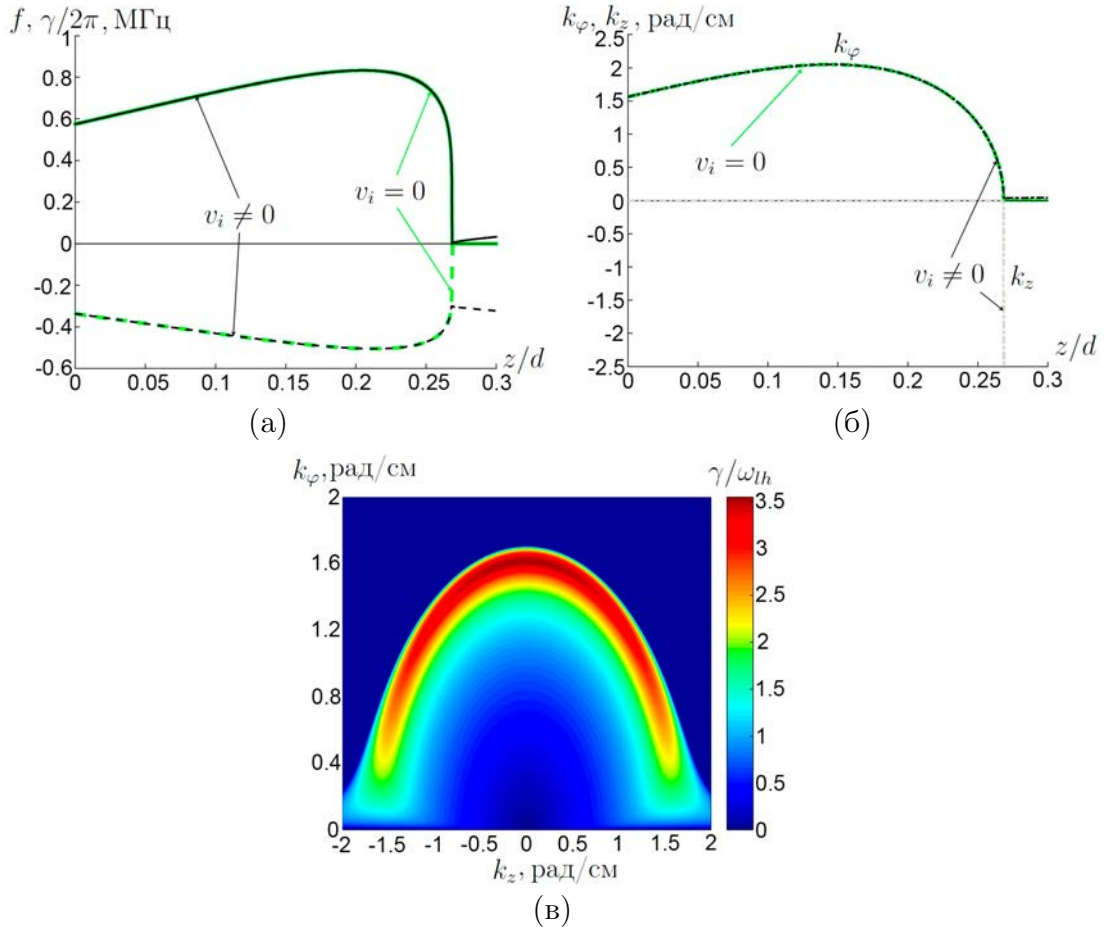


Рис. 3.8: Сравнение характеристик ГДН в прианодной области для моделей с $v_i = 0$ и $v_i \neq 0$: (а) частоты f (пунктирная линия) и инкременты $\gamma/2\pi$ (сплошная линия), (б) волновые числа k_ϕ и k_z ; (в) линии уровня инкремента на плоскости k_z - k_ϕ при фиксированной координате $z = 0, 21d$.

от точки $z = z_b^{in}$ к выходу из ускоряющего канала $z = 1$ и обладают широким диапазоном значений: $\gamma/2\pi \simeq 0,01 - 0,92$ МГц и $f \simeq -(0,31 - 3,39)$ МГц, соответственно. Типичный диапазон волновых чисел $k_z \simeq -(9,36 - 15,1)$ рад/см и $k_\phi \rightarrow 0$.

Качественное описание неустойчивости в основной части ускоряющего канала может быть получено из необходимого условия (3.26). Учитывая, что в рассматриваемой области $\kappa_n - 2\kappa_B < 0$ и $u_e < 0$, редуцируем условие (3.26) к следующему виду

$$-\frac{k_z}{k_\phi} > \frac{|u_e|}{v_i}.$$

Поскольку скорость ионов в рассматриваемой области ещё мала, неустойчивые моды являются практически аксиальными, $|k_z| \gg |k_\phi|$, при этом знаки k_z и k_ϕ различны. Это показано на рис. 3.9в, де-

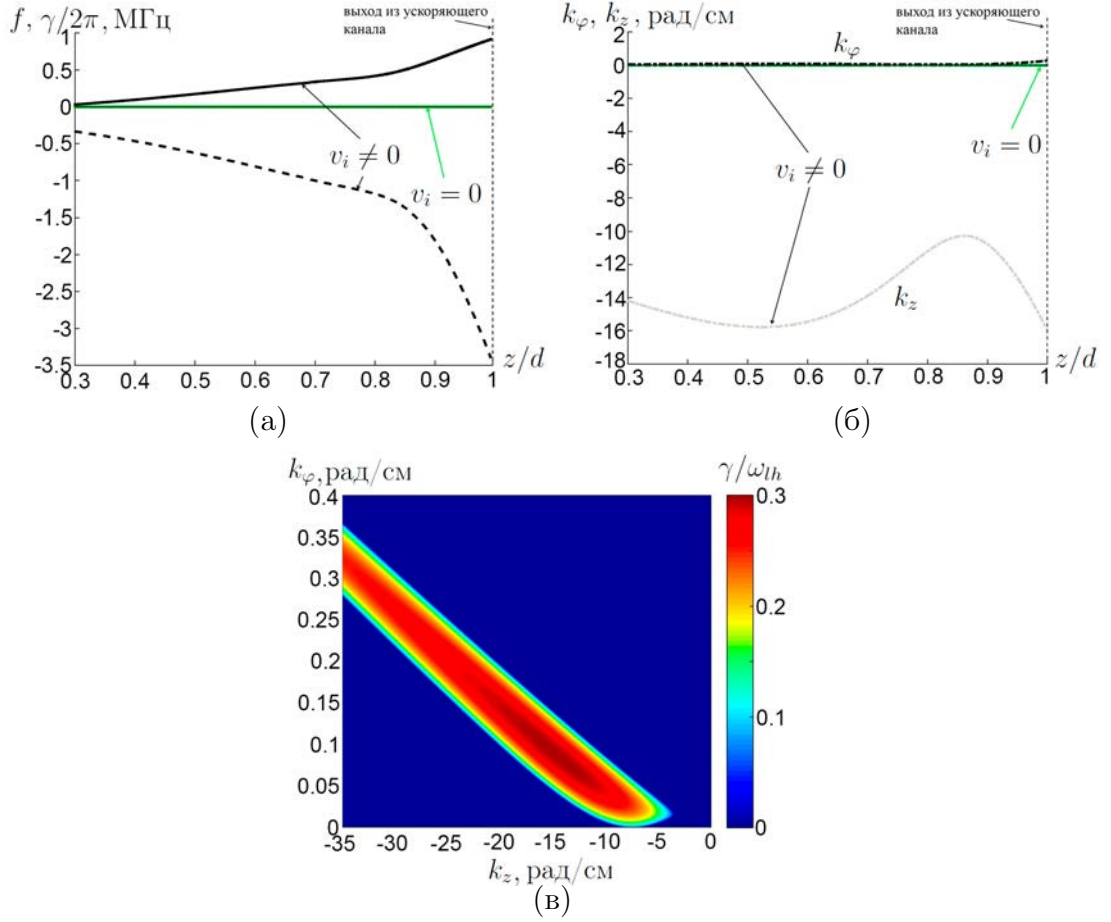


Рис. 3.9: Сравнение характеристик ГДН в основной части ускоряющего канала для моделей с $v_i = 0$ и $v_i \neq 0$: (а) частоты f (пунктирная линия) и инкременты $\gamma/2\pi$ (сплошная линия), (б) волновые векторы k_ϕ и k_z ; (в) линии уровня инкремента в плоскости k_z-k_ϕ в фиксированной точке ускоряющего канала $z = 0,5d$.

монстрирующем линии уровня инкремента на плоскости k_z-k_ϕ в сечении $z = 0,5$. В этой точке у наиболее неустойчивой моды $k_z \simeq -15,1$ рад/см и $k_\phi \simeq 0,08$ рад/см.

В области отрыва плазменной струи ($z > 1$) скорости ионов и электронов сопоставимы $|v_i| \sim |u_e|$, в результате чего, согласно (3.26), $|k_z| \sim |k_\phi|$, что означает возбуждение косых волн. Прямое численное решение уравнения (3.25) демонстрирует заметную роль потока ускоренных ионов в формировании спектра неустойчивых мод за срезом двигателя – см. рис. 3.10. Наибольшим инкрементом $\gamma/2\pi \simeq 1,28$ МГц обладает мода с $f \simeq -10,21$ МГц, $k_\phi \simeq 5,3$ рад/см, возбуждаемая в сечении $z \simeq 1,22$. На рис. 3.10в показаны изолинии инкремента на плоскости $k_z - k_\phi$ в этом сечении.

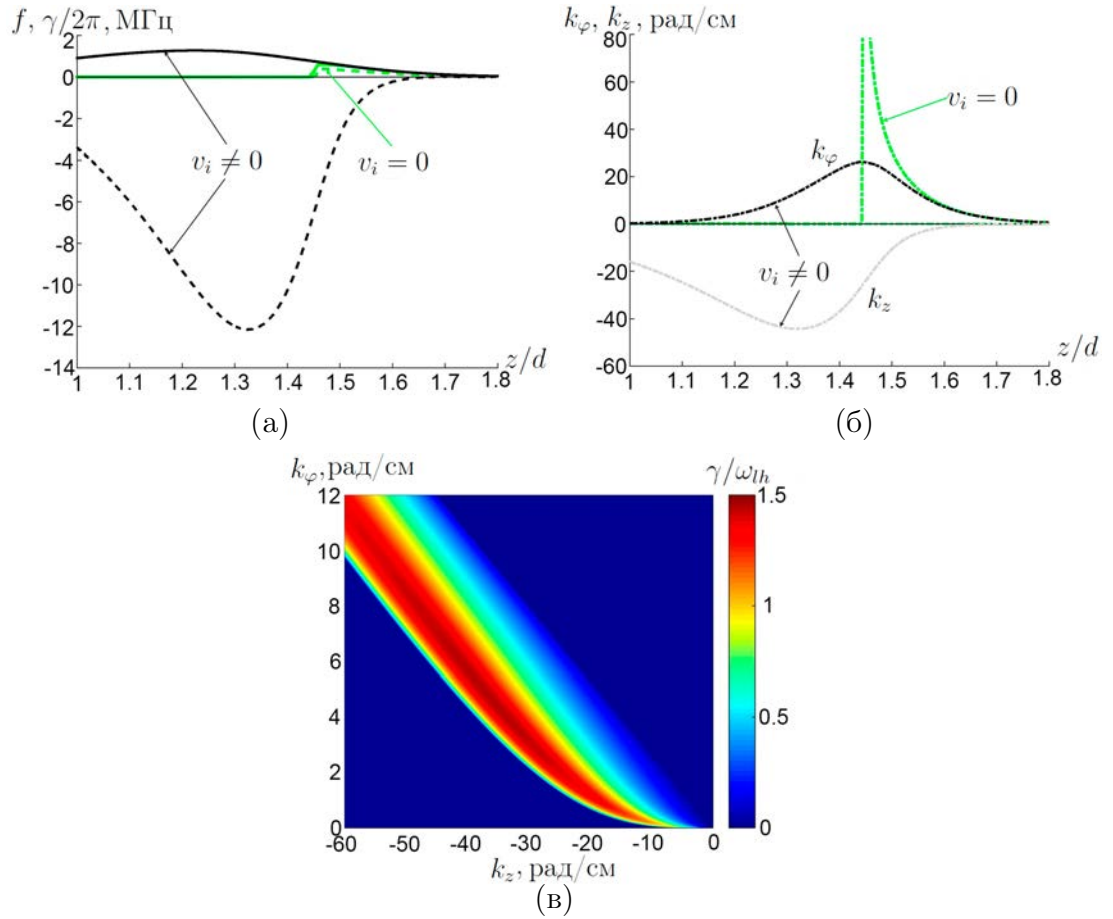


Рис. 3.10: Сравнение характеристик ГДН за выходом из ускоряющего канала в моделях с $v_i = 0$ и $v_i \neq 0$: (а) частоты f (пунктирные линии) и инкременты $\gamma/2\pi$ (сплошные линии), (б) волновые числа k_φ и k_z ; (в) линии уровня инкремента в плоскости $k_z - k_\varphi$ при фиксированной координате $z = 1, 22d$.

3.2.2 Глобальные моды в СПД

Далее исследуем устойчивость глобальных градиентно-дрейфовых волн в канале стационарного плазменного двигателя [114, 115].

Будем искать решения уравнения (3.18) с нулевыми граничными значениями $\phi_k(0) = \phi_k(d) = 0$, используя численный код [120]. Полученный спектр неустойчивых колебаний (зависимость $\gamma(f)$, где γ – инкремент, f – линейная частота: $\omega = 2\pi f + i\gamma$) состоит из пяти мод с $m \equiv k_\varphi R_0 = 1 \div 5$ в частотном диапазоне нижегибридных колебаний $f = -(0, 26 \div 0, 67)$ МГц и $\gamma = 0, 26 \div 0, 38$ МГц – см. рис. 3.11а.

Распределение амплитуды возмущений потенциала вдоль оси ускоряющего канала показано на рис. 3.11б. Максимум амплитуды возмущений приходится на прианодную область ускорителя. Возмущение электрического поля не равно нулю на аноде и заведомо исчезает к

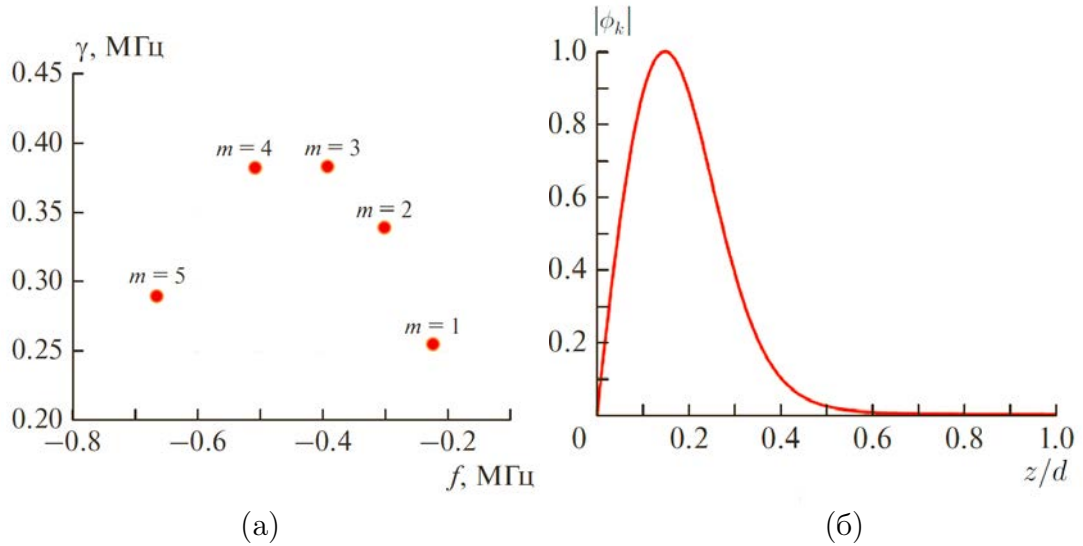


Рис. 3.11: Спектр собственных частот (а) и собственные функции ГДН (б) в ускоряющем канале СПД.

выходу из ускоряющего канала.

Спектр неустойчивости имеет характерный “параболический” вид с двумя преобладающими гармониками $m = 3$ и $m = 4$ с частотами $\sim 0,5$ МГц. Близость инкрементов и частот неустойчивых гармоник указывает на возможность образования биений или волновых пакетов с заведомо меньшей частотой огибающих, по аналогии с решением модельной задачи об устойчивости глобальных мод в однородном магнитном поле, представленной в подразделе 3.1.4. В результате, на линейной стадии развития ГДН высокочастотный сигнал оказывается модулирован низкочастотной огибающей биений с частотой

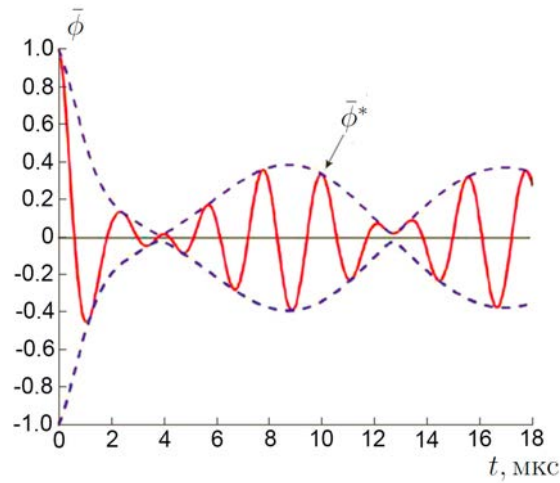


Рис. 3.12: Временная эволюция нормированного потенциала $\bar{\phi}$ в фиксированной точке пространства.

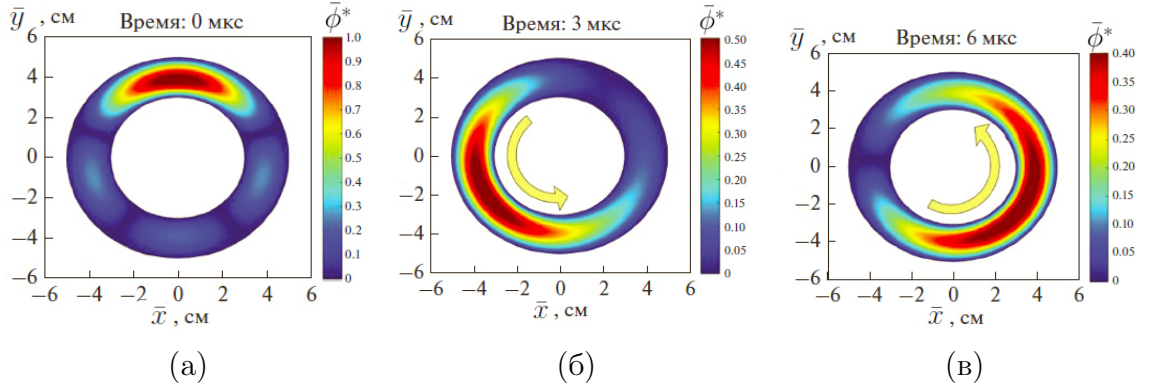


Рис. 3.13: Линии уровня огибающей возмущений потенциала $\bar{\phi}^*$ при: (а) 0, 0, (б) 3, 0 нс, (в) 6, 0 нс. На рисунке в сечении $z = \text{const}$ введены декартовы координаты $\{\bar{x}, \bar{y}\}$, $\bar{x} = R \cos \varphi$, $\bar{y} = R \sin \varphi$.

$f_b = (f_3 - f_4)/2 \sim 50$ кГц. Это проиллюстрировано на рис. 3.12, на котором показана временная эволюция нормированного потенциала возмущений $\bar{\phi} = (\phi/\phi_{max}) \exp(-\gamma_3 t)$ в фиксированной точке пространства. Видно, что возмущения равной начальной амплитуды релаксируют к биениям, образованным модами $m = 3$, $m = 4$, с огибающими $\bar{\phi}^* \sim \cos(2\pi f_b t)$. Частота формируемого волнового пакета соответствует наблюдаемому диапазону частот крупномасштабных осцилляций в СПД.

Особый интерес представляет динамика огибающей волнового пакета в аксиальном сечении $z = \text{const}$, т. е. на срезе двигателя: именно в этой плоскости в экспериментах удаётся визуально наблюдать крупномасштабные структуры при помощи высокоскоростной видеофиксации – см., например, [41, 42, 45, 46]. На рис. 3.13 показаны изолинии огибающей волнового пакета $\bar{\phi}^*$ в сечении $z = \text{const}$ в различные моменты времени. Для иллюстрации выбрана параболическая зависимость возмущения потенциала от радиуса R с нулями на внешнем R_2 и внутреннем R_1 радиусах ускоряющего канала. Видно, что собственные моды возмущений потенциала формируют крупномасштабную структуру $m = 1$, вращающуюся в направлении стационарного $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа электронов. Групповая скорость азимутального вращения волнового пакета $\simeq 5,5 \times 10^5$ см/с, что составляет $\sim 0,02 V_E$ для V_E , рассчитанной в сечении с максимальной амплитудой собственной функции.

Рассматриваемая картина биений формируется лишь в случае, когда спектр собственных колебаний обладает хотя бы двумя модами с близкими по величине инкрементами. Данное обстоятельство объ-

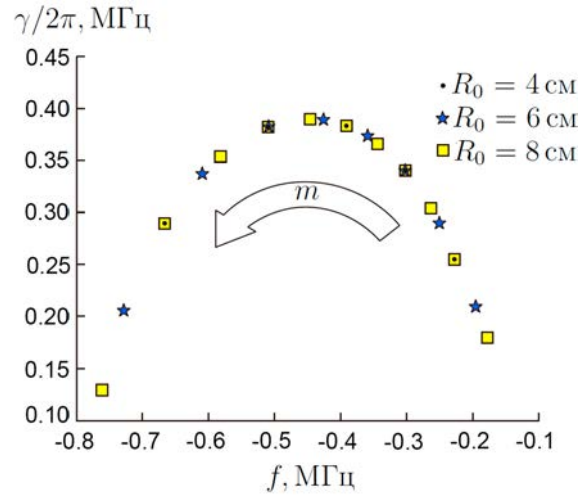


Рис. 3.14: Спектры собственных частот в СПД при $R_0 = 4$ см, $R_0 = 6$ см и $R_0 = 8$ см.

ясняет возможность существования холловских разрядов и в отсутствие медленно вращающихся спуюков. Частота огибающей волнового пакета и его групповая скорость при этом напрямую зависят от “удалённости” мод (т. е. от разности частот колебаний с примерно равными γ). Форма спектра (на плоскости $f - \gamma$), в свою очередь, оказывается весьма чувствительной к изменению геометрических размеров СПД.

Существенно влияние на спектр собственных колебаний оказывает изменение геометрических размеров ускорителя. На рис. 3.14 показана зависимость инкремента от частоты неустойчивых мод, рассчитанная при различных значениях радиуса ускоряющего канала R_0 . Видно, что с ростом радиуса происходит сгущение спектра при неизменной форме спектра и максимальном инкременте. Сближение частот неустойчивых мод с близкими γ приводит к уменьшению частоты биений (k -кратное увеличение радиуса приводит к k -кратному уплотнению спектра, т. е. $f_b \sim 1/R_0$). Так, например, при радиусе $R_0 = 8$ см частота огибающей волнового пакета, образованного модами $m = 6 - 8$, равна $f_b \simeq 23$ кГц. Тенденция уменьшения частоты спуюков с ростом радиуса ускоряющего канала явно наблюдается в экспериментах [45].

3.2.3 Общая картина ГДН в СПД

Анализ устойчивости локализованных градиентно-дрейфовых мод в стационарном плазменном двигателе показывает, что ускоряющий канал СПД можно условно разделить на три пространственные области, характеризующиеся различной картиной развития ГДН. Выделяются: прианодная область ($z < z_b^{in}$), неустойчивая по отношению к чисто азимутальным длинноволновым возмущениям, основная часть ускоряющего канала ($z_b^{in} < z < d$) с неустойчивыми аксиальными коротковолновыми модами и область за выходом из ускоряющего канала ($z > d$), в которой доминируют косые волны.

В прианодной части ускорителя возбуждаются длинноволновые азимутальные колебания с $k_\varphi \simeq 0,01 - 2,1$ рад/см и частотами в типичном время-пролётном диапазоне $f \simeq -(295 - 505)$ кГц, распространяющиеся в $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -направлении. Механизм их неустойчивости связан с классической градиентно-дрейфовой неустойчивостью [213], возникающей при наличии неоднородностей плотности плазмы и магнитного поля в соответствии с критерием $d(n/B^2)/dz > 0$. Характеристики неустойчивости в прианодной области хорошо описываются аналитическими выражениями (3.27).

Неустойчивые моды в основной части ускоряющего канала принадлежат высокочастотному диапазону частот $f \simeq -(0,31 - 3,39)$ МГц. Аксиальные возмущения распространяются от анода к катоду и характеризуются короткими длинами волн, $k_z \simeq -(9,36 - 15,1)$ рад/см. Их дестабилизация обусловлена равновесным потоком ионов, при этом механизм их возбуждения существенно отличается от неустойчивости аксиального тока [324], реализующейся даже при $k_\varphi = 0$. Устойчивость осевой ионизационной моды в модельной конфигурации холловского ускорителя исследована в работе [325].

За срезом двигателя ($z > d$) доминируют косые волны, вращающиеся в направлении $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа и движущиеся в сторону отрыва плазменной струи. Характеристики неустойчивых мод в рассматриваемой области охватывают широкий диапазон частот $f \simeq -(0,01 - 12,16)$ МГц и длин волн, $k_z \simeq -(0,2 - 44,3)$ рад/см и $k_\varphi \simeq 0,7 - 26,1$ рад/см, и также во многом определяются скоростью равновесного потока ионов.

Рассмотренные эффекты конечной температуры электронов и конечной скорости ионного потока оказываются критичными для описания устойчивости плазмы в СПД. Показано, что широко исполь-

зуемое приближение холодных ионов и стационарных электронов [213, 296, 298, 310, 311] применимо для описания устойчивости плазмы лишь в прианодной части ускорителя. Электромагнитные эффекты, рассмотренные в [213, 310, 311], заметны лишь для гораздо более длинноволновых возмущений с $k_{\perp}^2 c^2 \lesssim \omega_{pe}^2 / (1 + \omega_{Be}^2 / \omega_{pe}^2)$ [213]. В рассматриваемых условиях $k_{\perp}^2 \lesssim 0,2 - 1,5 \text{ рад}^2/\text{см}^2$, а такие моды могут существовать только в весьма узкой области вблизи сечения z_b^{in} – см. рис. 3.8б. Поэтому электромагнитные эффекты не могут существенно поменять рассматриваемую картину устойчивости. Расчёт с учётом конечного ларморовского радиуса электронов даёт поправку к представленным результатам менее 10%, что объясняется большой величиной поперечного тока электронов (драйва неустойчивости) в типичных рабочих режимах СПД.

Расчёт устойчивости глобальных градиентно-дрейфовых волн показывает, что собственные неустойчивые колебания в СПД характеризуются крупномасштабной азимутальной $m = 1 \div 5$ и аксиальной (см. рис. 3.11б) структурой собственных функций и локализованы в прианодной области ускоряющего канала. Ключевую роль в формировании спектра глобальных градиентно-дрейфовых мод играет инерция электронов, стабилизирующая коротковолновые возмущения, а пространственная локализация мод объясняется выполнением локального критерия неустойчивости $V_E(\kappa_n - 2\kappa_B) < 0$ лишь в прианодной части ускорителя.

Показано, что для характерного “параболического” спектра (см. рис. 3.11а) глобальные моды на линейной стадии развития неустойчивости образуют волновые пакеты $m = 1$ с характерной частотой огибающей $\sim 50 \text{ кГц}$ и групповой скоростью $\sim 0,02V_E$; при этом их частота обратно пропорциональна радиусу ускоряющего канала, $\sim 1/R_0$. Все рассчитанные характеристики волновых пакетов, как-то: прианодная локализация, десятикилогерцовая частота, низкие m , медленное вращение в направлении $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ -дрейфа, обратная пропорциональность частоты радиусу ускоряющего канала – соответствуют параметрам крупномасштабных азимутальных структур, наблюдаемых в двигателях семейства СПД посредством высокоскоростной видеофиксации. При этом повышенная светимость наблюдаемых в экспериментах спуюков связана с локальным повышением концентрации электронов из-за вышеописанных колебаний. Это позволяет сделать вывод о том, что именно градиентно-дрейфовая неустойчивость слу-

жит вероятным механизмом возникновения квазикогерентных структур в виде спиц в холловских ускорителях плазмы.

3.3 Резюме главы 3

Исследована устойчивость и режимы колебаний холловской плазмы с замагниченными электронами и незамагниченными ионами в скрещенных электрическом и магнитном полях. Расширенная гидродинамическая модель позволила исследовать полный спектр возмущений в нижнегибридном диапазоне частот с учётом тепловых эффектов в динамике электронной компоненты плазмы. Показано, что в спектре азимутальных волн наибольшие инкременты имеют высокочастотные коротковолновые возмущения. Их стабилизация эффектами электронной инерции и КЛР возможна вблизи порога неустойчивости; тогда в системе происходит раскачка низкочастотных длинноволновых колебаний. Эффекты инерции стабилизируют волны с малой длиной волны при достаточно мощном драйве неустойчивости (большая величина поперечного тока), при этом неустойчивость остаётся высокочастотной, $\omega \sim \omega_{lh}$.

Исследована устойчивость градиентно-дрейфовых возмущений в конфигурации стационарного плазменного двигателя модели СПД-100. Показано, что в прианодной области ускорителя возбуждаются азимутальные длинноволновые моды, в то время как в основной части ускоряющего канала преобладают коротковолновые аксиальные моды, дестабилизированные потоком ускоренных ионов.

Рассчитаны частоты собственных неустойчивых колебаний и аксиальная структура собственных функций градиентно-дрейфовых мод. Полученный спектр характеризуется конечным набором длинноволновых азимутальных мод в нижнегибридном диапазоне частот, локализованных преимущественно в прианодной части двигателя. Показано соответствие основных характеристик волновых пакетов параметрам крупномасштабных азимутальных структур, наблюдаемых в холловских двигателях, что позволило сделать вывод о том, что именно ГДН служит наиболее вероятным механизмом возникновения таких квазикогерентных структур.

Глава 4

Потоки частиц плазмы в присутствии электрического поля

Исследовано влияние электрического поля на потоки заряженных частиц в некоторых конфигурациях лабораторной плазмы. Для случая сильного электрического поля, для которого неприменимо предположение о малости скорости электрического дрейфа по отношению к полной скорости частицы, получен обобщённый лагранжиан Литтлджона и с его помощью продемонстрирован переход к расширенной системе дрейфовых уравнений, содержащей дополнительные скорости дрейфов. В общем случае показана возможность ускорения частицы за счёт дрейфового движения вдоль сильного электрического поля. Продемонстрирована хаотизация траекторий электронов в конфигурации стационарного плазменного двигателя, приводящая к усилению их переноса вдоль оси ускоряющего канала. Представлен универсальный метод расчёта баунс-периода и средней тороидальной скорости вращения заряженных частиц в токамаке. Показано, что характеристики вращения в радиальном электрическом поле токамака существенным образом различаются для пролётных и запертых частиц, что приводит к генерации макроскопических тороидальных течений, разнонаправленных на сторонах сильного и слабого магнитного поля.

Исследование переноса заряженных частиц в электромагнитных полях различной пространственной и временной конфигурации относится к числу фундаментальных проблем физики лабораторной и космической плазмы и, ввиду многообразия охватываемых явлений, остаётся актуальной и поныне. На различных пространственных масштабах и при различных значениях параметров, определяющих специфику электромагнитных полей, в которых движутся частицы, наблюдаются эффекты, проявляющиеся сходным образом: в астрофизических объектах и лабораторных установках происходит генерация потоков заряженных частиц и их ускорение, в том числе в условиях формирования или разрушения магнитоплазменных

структур [326], к числу которых относятся ударные волны, токовые слои, разрывы магнитного поля, а также генерация турбулентного электромагнитного поля с ненулевой средней составляющей. Яркими примерами проявления процессов генерации и пространственного транспорта нетепловой компоненты плазмы являются формирование радиационных поясов Земли, магнитосферные суббури, вспышки на Солнце, ускорение межзвёздного ветра на границе гелиосферы, ускорение и излучение заряженных частиц в ветрах звёзд и галактик. В лабораторных установках потоки заряженных частиц (как тепловых, так и высокоэнергичных) могут формироваться как за счёт внешнего воздействия, так и в процессе перестройки или эволюции квазиравновесной плазменной конфигурации. Дрейфовое движение частиц традиционно исследуется в приближении заданного электромагнитного поля, при этом во многих случаях его воздействие остаётся адиабатическим (относительное изменение неоднородного поля мало на ларморовском радиусе, а относительное изменение нестационарного поля мало на циклотронном периоде), а значит, может быть описано с использованием аппарата дрейфовой теории [327–329]. Обычно дрейфовое движение частицы считается медленным по сравнению с её циклотронным вращением, что обуславливается уже упомянутым условием адиабатичности. Однако, поскольку электрический дрейф является точным решением уравнения движения заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях, стандартная дрейфовая теория может быть расширена на случай больших поперечных электрических полей, допускающих, что скорость электрического дрейфа $\mathbf{V}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/B^2$ сопоставима с полной скоростью частицы v . Такая ситуация, в частности, реализуется в холловских плазменных ускорителях [208]. Соответствующее расширение [147] приводит к появлению в выражении для скорости движения ведущего центра дополнительных членов, содержащих электрическое поле в комбинации с неоднородностями электрического и магнитного полей.

В тороидально-винтовом магнитном поле токамака неоднородность магнитного поля приводит к формированию двух известных типов траекторий: траектории пролётных и запертых частиц. На макроскопическом уровне отклонение заряженных частиц от магнитных поверхностей под действием градиентного дрейфа сопровождается генерацией бутстрэп-тока и неоклассической диффузии в токама-

ке [330]. В конфигурации скрещенных полей аналогичные эффекты могут быть ответственны за аномальную подвижность замагниченных электронов в направлении приложенного электрического поля.

Далее в диссертации представлены результаты исследования влияния поперечного электрического поля на динамику заряженных частиц и генерацию потоков в замагниченной и частично замагниченной плазме. В разделе 4.1 вариационные принципы дрейфового движения распространены на случай сильного электрического поля, когда скорость электрического дрейфа сопоставима с полной скоростью частицы. Раздел 4.2 посвящён исследованию движения электронов в модели стационарного плазменного двигателя. В разделе 4.3 исследовано влияние радиального электрического поля на динамику частиц плазмы в токамаке. Продемонстрировано принципиальное различие в воздействии электрического поля на движение пролётных и запертых частиц и рассчитана скорость их коллективного вращения.

4.1 Дрейфовая теория в случае сильного электрического поля

Дрейфовая теория является классическим методом исследования движения заряженных частиц в адиабатических электрическом и магнитном полях. Как и любая другая модель, описывающая поведение консервативной механической системы, дрейфовая теория может быть математически формализована в терминах механики Лагранжа [331]. Впервые возможность использования уравнений Лагранжа для поиска интегралов движения дрейфовых уравнений, связанных с пространственной симметрией поля при постоянных во времени электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях, была показана Морозовым и Соловьёвым в работе [332]. Полученная авторами функция Лагранжа L^* формально вводится как лагранжиан частицы нулевой массы, движущейся в эффективном магнитном поле $\mathbf{B}^* = \text{rot } \mathbf{A}^*$:

$$L^* = \mathbf{A}^* \cdot \dot{\mathbf{R}}; \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{v_{\parallel}}{\omega_B} \mathbf{B}. \quad (4.1)$$

Здесь $\dot{\mathbf{R}}$ – производная по времени от радиус-вектора ведущего центра; ω_B – циклотронная частота; $v_{\parallel}$ – компонента скорости частицы вдоль магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Позднее Литтлджоном [333] была построена гамильтонова теория движения ведущего центра (см. также обзор [334] и ссылки в нём). Лагранжиан Литтлджона выводится

путём усреднения функции Лагранжа заряженной частицы по циклотронному периоду, а следующие из вариационного принципа дрейфовые уравнения обладают точными законами сохранения фазового объёма и энергии (для постоянных во времени полей), что обобщает и развивает полученные ранее результаты Морозова и Соловьёва.

Далее будет построен обобщённый на случай сильного электрического поля лагранжиан Литтлджона и с его помощью продемонстрирован переход к расширенной системе дрейфовых уравнений, впервые полученной в [328]. Исследование особенностей дрейфового движения заряженных частиц в скрещенных полях с сильной электрической компонентой необходимо, в частности, для корректной интерпретации результатов кинетического моделирования холловских разрядов — см., например, [96, 97]. На примере модельных конфигураций электрического и магнитного полей будет продемонстрирован ряд ключевых эффектов [122], описание которых выходит за рамки классической дрейфовой теории.

4.1.1 Обобщение лагранжиана Литтлджона

Выведем уравнения дрейфовой теории, расширенной на случай сильного электрического поля, используя лагранжев формализм. Зададим функцию Лагранжа заряженной частицы в виде функции независимых переменных координат $\mathbf{q}$, скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ и времени t :

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени; функция $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ — гамильтониан заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, заданный выражением

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{Z_i e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \right]^2 + Z_i e \Phi(\mathbf{q}, t), \quad (4.2)$$

где m — масса частицы, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал магнитного поля: $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$; Φ — электростатический потенциал, определяющий напряженность электрического поля в соответствии с выражением $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - (1/c) \partial \mathbf{A} / \partial t$.

Полагая $\mathbf{r} = \mathbf{q}$ и $\mathbf{v} = (1/m)(\mathbf{p} - (Z_i e/c) \mathbf{A})$, запишем лагранжиан в переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$:

$$L = \left[\frac{Z_i e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + m \mathbf{v} \right] \dot{\mathbf{r}} - \left[Z_i e \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \right]. \quad (4.3)$$

Далее переменные $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ будут рассматриваться как независимые.

Для перехода к описанию дрейфового движения представим радиус-вектор частицы $\mathbf{r}$ в виде суперпозиции радиус-вектора ведущего центра $\mathbf{R}$ и ларморовского радиуса $\boldsymbol{\rho}_L$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_L, \quad (4.4)$$

где

$$\boldsymbol{\rho}_L = \frac{[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_B]}{\omega_B^2}. \quad (4.5)$$

Здесь введена $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\perp - \mathbf{V}_E$ – скорость циклотронного вращения частицы в системе отчёта, движущейся со скоростью электрического дрейфа; $\mathbf{v}_\perp$ – компонента скорости частицы поперёк магнитного поля; $\boldsymbol{\omega}_B = -Z_i e \mathbf{B} / mc$.

Введём тройку единичных ортогональных векторов

$$\mathbf{b} = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2], \quad \mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{b}], \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{b} \times \mathbf{e}_1], \quad (4.6)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ – единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля. Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ легко определить, задав один из них в виде $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}/u$; тогда второй вектор, в силу соотношения (4.5), будет равен $\mathbf{e}_2 = (\omega_B/u)\boldsymbol{\rho}_L$. Заданные таким образом орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ вращаются вокруг вектора $\mathbf{b}$ с частотой ω_B , поэтому они также могут быть выражены через фазу ларморовского вращения ϕ в виде

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_i \cos \phi + \mathbf{e}_j \sin \phi,$$

$$\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_i \sin \phi + \mathbf{e}_j \cos \phi,$$

где $\mathbf{e}_{i,j}$ – единичные ортогональные векторы в плоскости ларморовского вращения частицы: $[\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \mathbf{b}$.

При помощи соотношений (4.4)–(4.6) вектор скорости и радиус-вектор частицы записываются в виде

$$\mathbf{v} = v_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{V}_E + u \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{u}{\omega_B} \mathbf{e}_2. \quad (4.7)$$

Подстановка (4.7) в лагранжиан (4.3) даёт

$$\begin{aligned} L = m \left\{ \frac{\omega_B}{B} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + v_\parallel \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}_E(\mathbf{r}, t) + u \mathbf{e}_1 \right\} \left(\dot{\mathbf{R}} + \left(\frac{u}{\omega_B} \dot{\mathbf{e}}_2 \right) \right) - \\ - \left\{ Z_i e \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{m}{2} |v_\parallel \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}_E(\mathbf{r}, t) + u \mathbf{e}_1|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далее используем стандартное для дрейфовой теории представление о порядке величин: $(\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \mathbf{C} \sim \varepsilon \mathbf{C}$, $\varepsilon \ll 1$, где $\mathbf{C}$ – произвольный медленно меняющийся вектор. Усредним выражение (4.8) по циклотронному периоду, определяя при этом все величины в точке нахождения ведущего центра с точностью до второго порядка малости по ε :

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(\mathbf{R}) + \rho_{Li} \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{R})}{\partial R_i} + \frac{1}{2} \rho_{Li} \rho_{Lj} \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} + O(\varepsilon^3).$$

Это в итоге даёт

$$\begin{aligned} L = m \left\{ \frac{\omega_B}{B} \mathbf{A} + v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E \right\} \dot{\mathbf{R}} + \left(\frac{mu}{\omega_B} \right) \left\{ \frac{u}{2B} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right) + \right. \\ \left. + \frac{v_{\parallel} u}{2\omega_B} \operatorname{div} \mathbf{b} + \frac{u}{2\omega_B} (\operatorname{div} \mathbf{V}_E - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{V}_E) \right\} - \\ - \left(\frac{mu^2}{2\omega_B} \right) \left\{ 1 - \frac{v_{\parallel}}{\Omega} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} - \frac{1}{\omega_B} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V}_E \right\} \dot{\phi} - Z_i e \left(\Phi + \frac{u^2}{4\omega_B^2} \nabla^2 \Phi \right) + \\ + \frac{m}{2} \left(v_{\parallel}^2 + v_E^2 + u^2 \left\{ 1 - \frac{v_{\parallel}}{2\omega_B} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} - \frac{1}{2\omega_B} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V}_E \right\} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

В (4.9) все сглаженные величины как функции координат определены в точке нахождения ведущего центра $\mathbf{R}$.

Выражение (4.9) содержит член с $\operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{A}$, при занулении которого за счёт соответствующей калибровки векторного потенциала $\mathbf{A}$, как это делается в классической электродинамике¹⁷, слагаемое с $d(mu/\omega_B)/dt$ становится второго порядка малости. Тогда, с точностью до нулевого порядка, функция Лагранжа (4.9) может быть записана в искомой форме

$$L = \frac{Z_i e}{c} \mathbf{A}^* \cdot \dot{\mathbf{R}}_d - \frac{m^2 c}{2Z_i e} \mu \dot{\phi} - h. \quad (4.10)$$

Здесь

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mc}{Z_i e} (v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E) \quad (4.11)$$

¹⁷Для вывода (4.10) можно использовать альтернативный метод, основанный на свойстве инвариантности уравнений движения относительно замены: $L \rightarrow L + dF/dt$, где F – произвольная скалярная функция. Выбор такой функции в виде

$$F(\mathbf{R}, t) = -\frac{mu^2}{2\omega_B B} \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

приводит к сокращению “ненужных” членов в выражении (4.8)

– модифицированный векторный потенциал, $\mu = u^2/B$ – магнитный момент и h – сглаженная функция Гамильтона заряженной частицы, определяемая выражением

$$h = Z_i e \Phi + \frac{m}{2} (v_{\parallel}^2 + V_E^2 + \mu B),$$

что в удерживаемом порядке совпадает с функцией (4.2). Функция Лагранжа (4.10) с точностью до отброшенных членов высших порядков малости обобщает известный лагранжиан Литтлджона [333, 334] на случай сильного поперечного электрического поля $\mathbf{E}_{\perp} = O(1)$.

Первое слагаемое в (4.10) по форме¹⁸ совпадает с лагранжианом Морозова-Соловьёва (4.1) с поправкой к модифицированному векторному потенциалу, связанной с $\mathbf{V}_E$. Как показано в [332], в случае $\mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{b} = 0$ уравнение движения ведущего центра можно представить в виде¹⁹

$$[\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}^*] = 0, \quad (4.12)$$

что формально совпадает с уравнением движения частицы пренебрежимо малой массы в некотором фиктивном магнитном поле $\mathbf{B}^* = \text{rot} \mathbf{A}^*$. Из уравнения (4.12) следует, что траектория ведущего центра пролегает вдоль силовых линий $\mathbf{B}^*$, т. е.

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{v_{\parallel}}{B} \mathbf{B}^*. \quad (4.13)$$

Обобщение (4.13) на случай $\mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{b} \neq 0$ и $\mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{V}_E \neq 0$ может быть проделано путём замены в знаменателе B на $B_{\parallel}^* = \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}^*$. В рамках классической дрейфовой теории строгий вывод уравнения (4.13), обобщённого на случай $\mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{b} \neq 0$, был проделан Бузером в работе [335].

Используя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.14)$$

получим расширенную систему дрейфовых уравнений в сильном электрическом поле. Подставляя в (4.14) в качестве обобщённых координат $q_i = v_{\parallel}, \mu, \phi$ и лагранжиан (4.10) как функцию шести независимых переменных $L = L(\mathbf{R}, v_{\parallel}, \mu, \phi)$, найдём

$$\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel}, \quad \dot{\phi} = -\omega_B, \quad \dot{\mu} = 0. \quad (4.15)$$

¹⁸В (4.11) переменные $v_{\parallel}$ и $\mathbf{R}$ считаются независимыми и при дальнейшем выводе дрейфовых уравнений движения используется их независимое варьирование; для вывода дрейфовых уравнений из L^* (4.1) необходимо рассматривать $v_{\parallel}$ как функцию от $\mathbf{R}$: $v_{\parallel} = v_{\parallel}(\mathbf{R})$

¹⁹В случае сильного электрического поля необходимо также положить $\mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{V}_E = 0$

Из первого уравнения (при $q_1 = v_{\parallel}$) следует, что произведение $\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ равняется проекции скорости частицы $v_{\parallel}$ на направление магнитного поля в точке нахождения ведущего центра; второе уравнение (при $q_2 = \mu$) показывает, что производная по времени от фазы ларморовского вращения ϕ с точностью до членов нулевого порядка совпадает с циклотронной частотой: $\dot{\phi} = -\omega_B + O(\varepsilon)$; и, наконец, третье уравнение (при $q_3 = \phi$) даёт сохранение магнитного момента μ .

Далее, для $q_i = R_i$, с точностью до первого порядка получим

$$Z_i e \mathbf{E}^* + \frac{Z_i e}{c} [\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}^*] = \frac{m}{2} (\nabla V_E^2 + \mu \nabla B), \quad (4.16)$$

где

$$\mathbf{E}^* = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \mathbf{E} - \frac{m}{Z_i e} \frac{\partial}{\partial t} (v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E). \quad (4.17)$$

Умножая (4.16) векторно на $\mathbf{b}$ с учётом $\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel}$, получим уравнение на $\dot{\mathbf{R}}$ в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{B_{\parallel}^*} \left(v_{\parallel} \mathbf{B}^* + c [\mathbf{E}^* \times \mathbf{b}] + \frac{mc}{2Z_i e} [\mathbf{b} \times (\nabla V_E^2 + \mu \nabla B)] \right). \quad (4.18)$$

Здесь также $B_{\parallel}^* = \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}^*$. Выражение для $\dot{\mathbf{R}}$ записывается в более привычном виде суммы дрейфовых слагаемых [147] путём разложения $1/B_{\parallel}^*$ в (4.18) по ε с точностью до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} = & v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{u^2}{2\omega_B} \frac{[\mathbf{b} \times \nabla B]}{B} + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B} [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}] + \\ & + \frac{c}{B\omega_B} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} + v_{\parallel} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\perp} \right)_{\perp} + \\ & + \frac{v_{\parallel}}{\omega_B} \left([\mathbf{b} \times (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{b}] - \frac{c \mathbf{E}_{\perp}}{B^2} \mathbf{b} \cdot \nabla B + \left[\mathbf{b} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right] \right) - \\ & - \frac{c \mathbf{E}_{\perp}}{\omega_B B^2} \left(\mathbf{V}_E \cdot \nabla B + \frac{\partial B}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Первая строчка уравнения (4.19) хорошо известна из классической дрейфовой теории [327, 328]. Остальные слагаемые пропорциональны $\varepsilon V_E/v$ и $\varepsilon (V_E/v)^2$ и отсутствуют в стандартном дрейфовом приближении ввиду предположения $V_E \ll v$. В работе [328]

указанные слагаемые были получены в компактной форме: $[\mathbf{b} \times (\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v})] / \omega_B$, где $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E$, формально эквивалентной поперечной к $\mathbf{B}$ компоненте гидродинамического уравнения движения холодной плазмы. При этом поправки к массовой скорости $\mathbf{v}$, связанные с движением такой плазмы в сильном электрическом поле, могут быть получены и из гидродинамических уравнений путём разложения конвективного члена $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ по степеням $1/\omega_B$.

Вторая строчка уравнения (4.19) описывает дрейфы, связанные с изменением электрического поля: первый член – известный поляризованный дрейф в нестационарном поле $\mathbf{E}(t)$, и два дополнительных слагаемых, связанных с неоднородностью $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ вдоль направлений магнитного поля и электрического дрейфа. Третья и четвертая строчки содержат дрейфы, вызванные неоднородностью и нестационарностью магнитного поля.

Чтобы замкнуть систему уравнений ведущего центра, остаётся получить уравнение на $v_{\parallel}$. Для этого умножим выражение (4.16) скалярно на $\mathbf{B}^*$. С учётом (4.17) это даёт

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{\mathbf{B}^*}{B_{\parallel}^*} \left\{ \frac{Z_i e}{m} \mathbf{E} - \left(v_{\parallel} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}_E}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} (\nabla V_E^2 + \mu \nabla B) \right\},$$

что по аналогии с (4.18) можно привести к стандартному виду

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{Z_i e}{m} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} + \frac{\mu B}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}. \quad (4.20)$$

Уравнения (4.15), (4.19), (4.20), формируют искомую систему дрейфовых уравнений в сильном электрическом поле.

Используя уравнение (4.20), нетрудно получить выражение, описывающее приращение кинетической энергии $K = m(v_{\parallel}^2 + \mu B + V_E^2)/2$, которое, как и в [328], имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = Z_i e (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}) + \frac{m\mu B}{2} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (4.21)$$

В статических полях $\partial(E, B)/\partial t = 0$ из уравнения (4.21) вытекает закон сохранения энергии

$$K + Z_i e \Phi = \text{const.}$$

4.1.2 Примеры дрейфового движения заряженных частиц в сильном электрическом поле

Далее влияние сильного электрического поля на характер дрейфового движения заряженных частиц исследуется численно, в том чис-

ле с использованием симплектических интеграторов [102]. Поочередно рассматриваются конфигурация с однородным магнитным полем $\mathbf{B} = \text{const}$ и неоднородным электрическим $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ полем и конфигурация с неоднородным магнитным $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ и однородным электрическим $\mathbf{E} = \text{const}$ полем. Направление полей выбрано строго поперечным ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$). Для каждой конфигурации рассчитаны точные траектории движения положительно заряженной ($Z_i > 0$) частицы, характеризуемые радиус-вектором $\mathbf{r}$, и траектории её ведущего центра. Последние определяются путём вычитания из радиус-вектора частицы текущего значения вектора ларморовского вращения, $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_L$. При этом компоненты скорости частицы, фигурирующие в уравнении (4.19), рассчитываются из точных уравнений движения. Полученные траектории сопоставлены с результатами численного расчёта траекторий дрейфового центра $\mathbf{R}_{cl}$ (уравнение (4.19) без учёта дрейфов в сильном электрическом поле) и $\mathbf{R}$ (полное уравнение (4.19)).

В качестве естественной нормировки пространственных и временных масштабов задачи используются ларморовский радиус ($\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\rho_{L0} = \mathbf{r}Z_ieB_0/(v_0mc)$) и циклотронный период ($\tilde{t} = t2\pi\omega_{B0} = t2\pi Z_ieB_0/(mc)$), значения которых рассчитываются в начальный момент времени $t = 0$. Величина электрического поля задаётся при помощи безразмерного параметра $\varkappa = cE_0/v_0B_0$ (E_0 – значение электрического поля в точке нахождения частицы в начальный момент времени), естественным образом возникающего при выбранной нормировке. В строго поперечных полях параметр $\varkappa$ равен отношению V_{E0}/v_0 . Ниже символ "тильда" у безразмерных величин опущен.

Конфигурация с неоднородным электрическим полем

В неоднородном электрическом и однородном магнитном полях уравнение (4.19) редуцируется к виду

$$\dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{c}{B\omega_B} (v_{\parallel} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\perp})_{\perp}$$

и содержит два дополнительных члена, связанных с сильным электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Рассмотрим конфигурацию типа квадрупольной линзы с потенциалом $\Phi = -(E_0/r_0)xy$ (здесь $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ – исходное положение частицы), помещённую в однородное магнитное поле $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ ($B_0 = \text{const}$) – см. рис. 4.1a.

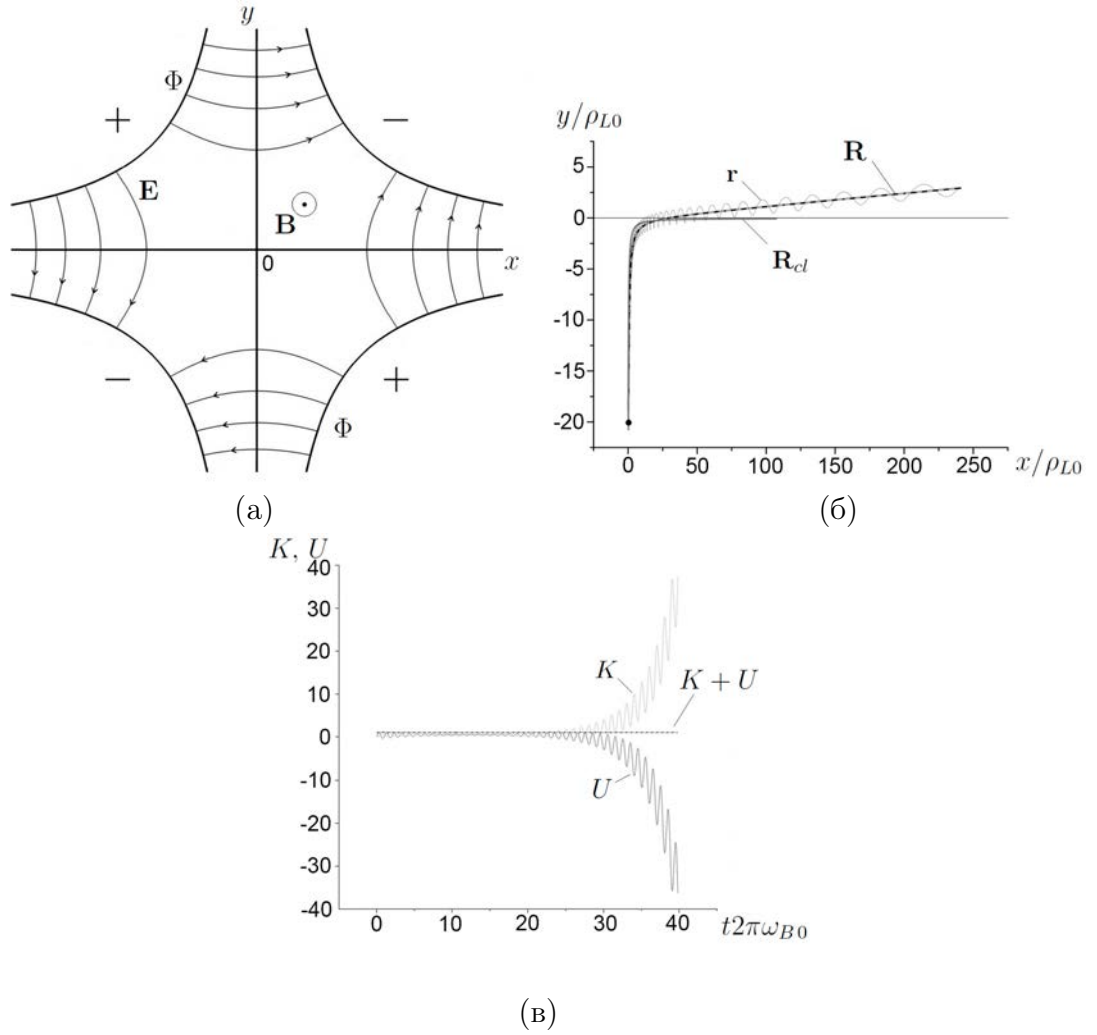


Рис. 4.1: Конфигурация квадрупольной электростатической линзы с осевым магнитным полем (а); траектории движения в рассматриваемой конфигурации (б): $\mathbf{r}$ – траектория частицы; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^{cl}$ – траектории движения ведущего центра, рассчитанные с учётом дополнительных дрейфов в электрическом поле и без них, соответственно; пунктирная линия – точная траектория движения ведущего центра; чёрный кружок – стартовая позиция частицы ($x = 0$, $y = -20\rho_{L0}$); зависимости кинетической K и потенциальной U энергий частицы, нормированных на начальное значение энергии, от времени t (в). Здесь $v_{\parallel} = 0$, $v_{\perp} = v_0$: $v_x = v_y = v_0/\sqrt{2}$, $\varkappa = 0, 5$.

Пример траекторий движения заряженной частицы и её ведущего центра в рассматриваемой системе представлен на рис. 4.1б. Без учёта дополнительных дрейфов в электрическом поле классическая траектория дрейфового центра $\mathbf{R}_{cl}$ пролегает вдоль эквипотенциалей $\Phi = \text{const}$ и со временем асимптотически приближается к оси x . Под действием дополнительного дрейфа $\sim (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\perp}$ (ассоциируемого с действием центробежной силы $\mathbf{F}_c = -m(\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{V}_E$), одна из компонент которого направлена вдоль электрического поля $\mathbf{E}$, ведущий

центр частицы $\mathbf{R}$ пересекает ось x . Другая компонента дополнительного дрейфа сонаправлена с электрическим дрейфом $\mathbf{V}_E$, поэтому за равный промежуток времени ведущий центр $\mathbf{R}$ частицы смещается на большее расстояние вдоль оси x , чем $\mathbf{R}_{cl}$. Проведённый расчёт демонстрирует хорошее согласие траектории движения ведущего центра $\mathbf{R}$ с точными траекториями движения заряженной частицы – см. рис. 4.16.

Интересный эффект, проявляющийся в рассмотренной конфигурации, связан с увеличением энергии частицы за счёт дрейфа в скрещенных полях вдоль электрического поля $\mathbf{E}$. В соответствии с выражением (4.21), приращение кинетической энергии при $\mathbf{V} = \text{const}$ и $v_{\parallel} = 0$ описывается уравнением

$$\frac{dK}{dt} = \frac{mc^2}{B^2} \mathbf{E}_{\perp} \cdot (\mathbf{V}_E \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\perp}.$$

Указанный эффект не может быть описан в рамках классического дрейфового приближения, т. к. $Z_i e (\mathbf{E}_{\perp} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{cl}) = Z_i e (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}_E) \equiv 0$. На рис. 4.1в изображено изменение энергии частицы во времени на траектории. Легко видеть, что за счёт смещения траектории ведущего центра $\mathbf{R}$ вдоль электрического поля (порядка нескольких ларморовских радиусов), кинетическая энергия частицы значительно увеличивается.

Конфигурация с неоднородным магнитным полем

Рассмотрим конфигурацию с прямым однородным электрическим полем $\mathbf{E} = -E_0 \mathbf{e}_z$ ($E_0 = \text{const}$) и магнитным полем прямого тока $\mathbf{B} = \mathbf{e}_{\varphi} B_0 R_0 / R$ – см. рис. 4.2а. Здесь используется цилиндрическая система координат $\{R, \varphi, z\}$. В указанной геометрии уравнение (4.19) сводится к виду

$$\dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{u_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2}{\omega_B} \frac{[\mathbf{b} \times \nabla B]}{B} - \frac{c^2}{\omega_B B^3} \mathbf{E}_{\perp} (\mathbf{E}_{\perp} \cdot [\mathbf{b} \times \nabla B]),$$

из которого следует, что движение ведущего центра заряженной частицы поперёк магнитного поля складывается из электрического, тороидального (сумма градиентного и центробежного дрейфов), и дополнительного дрейфа в сильном электрическом поле, возникающего в случае $\mathbf{V}_E \cdot \nabla B \neq 0$. Так как дополнительный "электрический" дрейф имеет квадратичную зависимость от вектора электрического

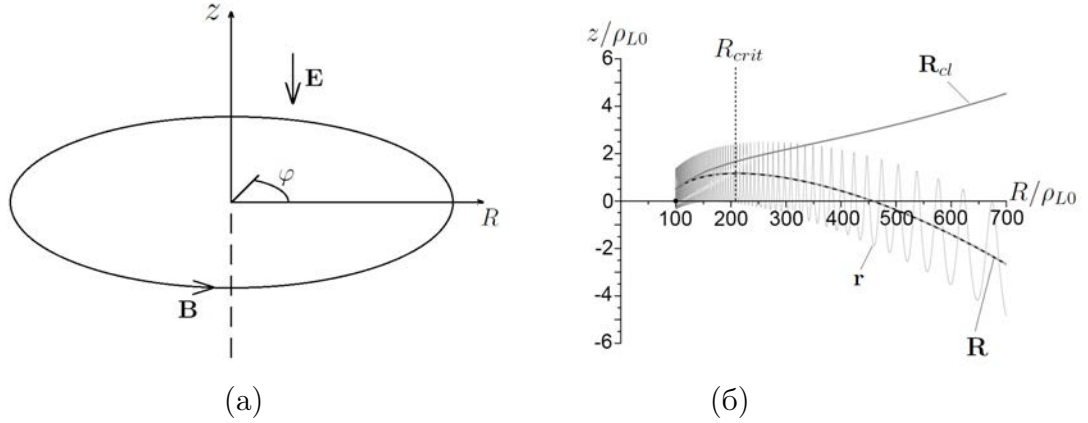


Рис. 4.2: Конфигурация магнитного поля прямого тока и аксиального электрического поля (а); траектории движения в плоскости $R - z$ (б): $\mathbf{r}$ – траектория частицы; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_{cl}$ – траектории движения ведущего центра, рассчитанные с учётом дополнительных дрейфов в электрическом поле и без них, соответственно; пунктирная линия – точная траектория движения ведущего центра; чёрный кружок – стартовая позиция частицы ($R = 100\rho_{L0}$, $z = 0$). Здесь $v_{\parallel} = 0$, $v_{\perp} = v_0$: $v_R = v_z = v_0/\sqrt{2}$, $\varkappa = 0, 2$.

поля, его направление всегда противоположно тороидальному дрейфу. Очевидно, что при условии $u^2 + 2v_{\parallel}^2 = 2V_E^2/B$ возможна полная компенсация тороидального дрейфа. При $v_{\parallel} = 0$ из условия сохранения магнитного момента легко найти критическую точку R_{crit} , в которой $\dot{r}_z = 0$:

$$R_{crit} = R_0 \left(\frac{\mu B_0}{2V_{E0}^2} \right)^{1/3}.$$

Пример траектории заряженной частицы и её ведущего центра при $v_{\parallel} = 0$ и $\varkappa = 0, 2$ представлен на рис. 4.2б.

Без учёта дополнительного дрейфа ведущий центр частицы, описываемый вектором $\mathbf{R}_{cl}$, смещается вдоль осей R и z под действием электрического и тороидального дрейфов, соответственно. В действительности, после прохождения критической точки $R = R_{crit}$ частица начинает дрейфовать против тороидального дрейфа в направлении электрического поля, что подтверждается результатами численного расчёта – см. кривые $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ на рис. 4.2б. В свою очередь смещение ведущего центра вдоль электрического поля приводит к изменению кинетической энергии частицы по закону

$$\frac{dK}{dt} = m \left[\frac{u^2}{2} + v_{\parallel}^2 - V_E^2 \right] (\mathbf{V}_E \cdot \nabla B).$$

Результаты расчёта временной эволюции кинетической энергии при разных значениях величины электрического поля E_0 (парамет-

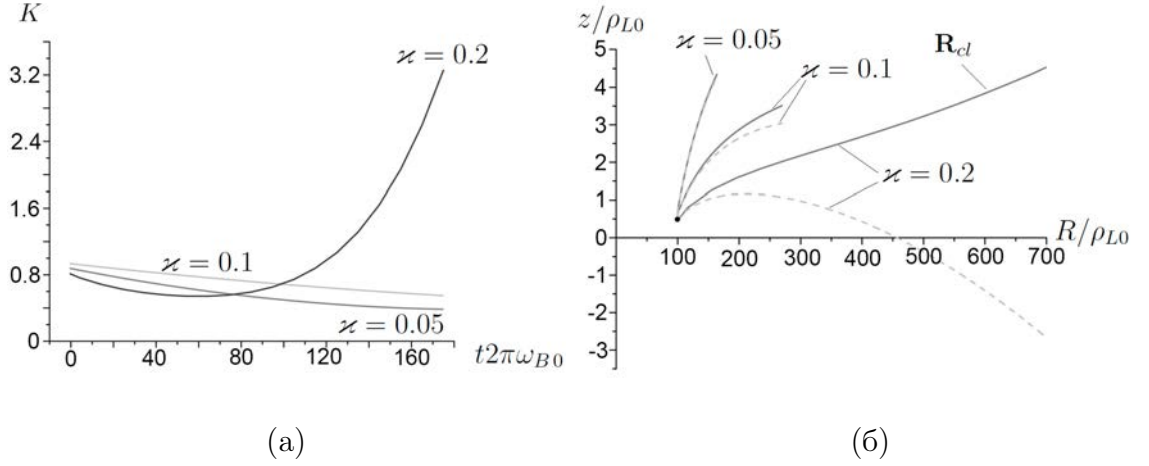


Рис. 4.3: Зависимости сглаженной кинетической энергии частицы K от времени t , соответствующие траекториям ведущего центра на рис. 4.3б, (а); траектории движения ведущего центра заряженной частицы в плоскости $R - z$ в магнитном поле прямого тока и аксиальном электрическом поле (б): сплошные линии – траектории движения классического дрейфового центра, рассчитанные без учёта дополнительных дрейфов в электрическом поле; пунктирные линии – точные траектории движения ведущего центра; чёрный кружок – стартовая позиция частицы ($R = 100\rho_{L0}$, $z = 0$). Здесь $v_{\parallel} = 0$, $v_{\perp} = v_0$: $v_R = v_z = v_0/\sqrt{2}$.

ра κ) представлены на рис. 4.3а. Видно, что в слабом электрическом поле ($\kappa = 0,05$ и $\kappa = 0,1$) на заданном интервале времени частица теряет энергию, двигаясь против поля. При $\kappa = 0,2$ частица также замедляется на интервале $R \in [R_0, R_{crit})$, но после прохождения критической точки $R = R_{crit}$, в которой $dK/dt = 0$, напротив начинает ускоряться – см. рис. 4.2б. Траектории движения ведущего центра, рассчитанные при разных значениях параметра κ , представлены на рис. 4.3б.

На основе эффекта “дрейфового ускорения” (изменения кинетической энергии частицы при дрейфе в направлении электрического поля) в конфигурации, аналогичной рассмотренной выше, в работе [98] была предложена схема рекуперации тепловой энергии плазмы в энергию электрического поля. Результаты [98] опирались на модель классической дрейфовой теории, в рамках которой приращение кинетической энергии предопределено направлением полей, т. е. $dK/dt < 0$ при $\mathbf{V}_E \cdot \nabla B < 0$ и наоборот. Учёт дополнительных дрейфов ограничивает радиальный размер пространственной области, в которой частицы теряют свою энергию, величиной R_{crit} , которая в случае достаточно сильного электрического поля, $|V_E| \sim 0,1|v_0|$, по порядку величины составляет $\sim 10^2 \rho_L$.

4.2 Динамика электронов в стационарном плазменном двигателе

Под влиянием неоднородного магнитного поля в стационарном плазменном двигателе формируются три плазменные области с фундаментально различным поведением электронов и ионов: область нейтрализации ионного пучка (ОН), прикатодная область (КО), прианодная область (АО) [218]. На эксперименте эти три области оказываются чётко выделенными. ОН располагается за катодом вне источника, КО отделяется от АО силовой линией, проходящей через границу эрозии стенки разрядной камеры (см. рис. 9 в работе [336]). В прикатодной области, характеризуемой нарастанием модуля магнитного поля вдоль длины ускоряющего канала (рис. 1.11), происходит быстрое увеличение электронной энергии. Этот процесс сопровождается увеличением степени ионизации плазмы, вызванным ростом плотности квазинейтральной плазмы, и существенным спадом плотности газа. Магнитное поле вблизи своего экстремума направлено преимущественно по радиусу, а электрическое поле вдоль оси. В предположении постоянства магнитного и электрического полей в КО при начальной нулевой скорости электронов их движение происходит по циклоиде с шагом $L = 2\pi V_E / \omega_{Be}$ по азимуту и амплитудой $l = 2V_{dr} / \omega_{Be}$ вдоль электрического поля $\mathbf{E}$ [328]. Чем больше электрическое поле, тем до больших энергий нагреваются холодные электроны, возникающие из-за ионизации газа, и тем больше плотность плазмы. В прикатодной области электроны могут выходить вдоль силовых линий на боковые диэлектрические стенки. Они не могут нейтрализоваться без ионов, поэтому, как известно, вдоль силовых линий формируется “термализованный” потенциал [219]. Этот отрицательный потенциал удерживает электроны вдоль силовых линий. С другой стороны он ускоряет холодные ионы (продукт ионизации газа) к стенке, где и происходит нейтрализация ионов и электронов. Исследование энергетического спектра ускоренных ионов показывает, что большой процент ионов уходит на стенки, а не в пучок, приводя к эрозии стенок [337]. Возникающий в КО азимутальный дрейф замагниченных электронов удерживает их от осевого движения к аноду. Покажем далее, что в КО электронный гамильтониан оказывается интегрируемым (имеется три инварианта движения: энергия, обобщённый импульс, с хорошей точностью сохраняется поперечный адиабатический инвариант $\mu = m_e(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{V}_E)^2 / 2B$).

Прианодная область сохраняет черты стартового разряда при малом магнитном поле. Электроны попадают на анод, ионы ускоряются и уходят в пучок. Об этом свидетельствуют исследования энергетического спектра ускоренных ионов [337]. В АО происходит ионизация основного количества газа. Взаимодействие заряженных частиц со стенками несущественно. Эта область оказывается наиболее сложной для объяснения, в особенности в вопросе переноса электронов на анод. В [297] предполагается, что существенную роль в этом процессе играет наличие шумов, связанных с колебаниями в плазме. Покажем далее, что в АО электронный гамильтониан оказывается неинтегрируемым. Поскольку анод располагается в области малого магнитного поля с силовыми линиями с большой кривизной, поперечный адиабатический инвариант не сохраняется, в результате чего в движении электронов наблюдаются элементы стохастической динамики [338].

Далее исследуем движение электронов в модели СПД, представленной в разделе 1.3 и достаточно полно соответствующей распределению полей в экспериментах. При этом ограничимся рассмотрением бесстолкновительного движения частиц в заданной конфигурации электромагнитного поля: типичная частота соударений электронов с нейтралами в СПД ~ 1 МГц, что более чем на два порядка уступает частоте циклотронного вращения электронов [296].

Для исследования движения электронов в описанной конфигурации СПД воспользуемся гамильтонианом движения

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{m_e}{2} \dot{R}^2 + \frac{m_e}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_e}{2} \dot{z}^2 - e\Phi = \\ &= \frac{P_R^2 + P_z^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} \left(\frac{P_\varphi}{R} + \frac{e}{c} A_\varphi \right)^2 - e\Phi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь $\left\{ P_R = m_e \dot{R}, P_\varphi = m_e R^2 \dot{\varphi} - e R A_\varphi / c, P_z = m_e \dot{z} \right\}$ – компоненты обобщённого импульса, точка обозначает производную по времени, A_φ – азимутальная компонента векторного потенциала магнитного поля, причём $\Psi(R, z) = R A_\varphi$. В отличие от [339] используется более реалистичная конфигурация полей в СПД – см. подраздел 1.3.4.

Для начала оценим границы движения холодных электронов. Полагаем, что в начальный момент времени скорость электронов равна нулю $\dot{R}_0 = \dot{z}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ и фиксируем точку старта траектории $R = R_0, z = z_0, \varphi = 0$. Полная энергия определяется значением потенциала в точке старта $H_e = -e\Phi_0, \Phi_0 = \Phi(R_0, z_0)$ и является пер-

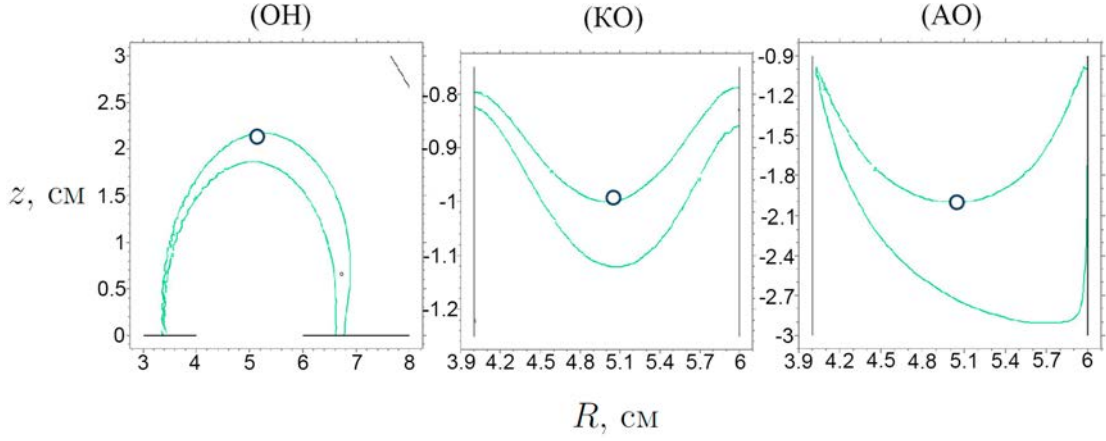


Рис. 4.4: Границы области движения электронов, родившихся с нулевой скоростью в различных областях СПД: в области нейтрализации ионного пучка (ОН), в прикатодной области (КО), в прианодной области (АО). Точки старта отмечены кружками, стенки СПД линиями.

вым интегралом движения. Второй интеграл движения – обобщённый импульс: $P_\varphi = m_e R^2 \dot{\varphi} - e R A_\varphi / c = -e R_0 A_\varphi(R_0, z_0) / c$. Используя условие эквипотенциальности магнитных поверхностей, предполагаемое моделью, $\Phi = k\Psi$, из условия сохранения энергии получаем

$$\frac{e^2}{2m_e c^2 R^2} (\Psi - \Psi_0)^2 - ek(\Psi - \Psi_0) + \frac{P_R^2 + P_z^2}{2m_e} = 0, \quad (4.23)$$

где $\Psi_0 = \Psi(R_0, z_0)$. Полагая в (4.23) $P_R^2 + P_z^2 = 0$, определим границы области движения электронов, рождающихся с нулевой начальной скоростью в разных точках ускоряющего канала СПД в результате ионизации рабочего газа или при эмиссии с катода. Далее в расчётах константа k выбрана равной $0,3 [\text{В/Гс} \cdot \text{см}^2]$; плоскость $z = 0$ соответствует выходному сечению ускоряющего канала.

Из (4.23) следует, что таких границ две. Одна совпадает со стартовой магнитной поверхностью: $\Psi - \Psi_0 = 0$; вторая определяется величиной электрического поля. На рис. 4.4 показаны границы движения электронов в различных областях СПД: первый рисунок соответствует области нейтрализации пучка за выходом из ускоряющего канала; второй рисунок – области вблизи катода, третий – прианодной области. Старт электронов в КО выбран ближе к аноду, где предположительно должна проходить граница прекращения эрозии стенки камеры [336].

Рассмотрим далее движение внутри ускоряющего канала. Видно, что если в КО движение электрона происходит вблизи стартовой маг-

нитной поверхности $\Psi(R, z) = \text{const}$, то ближе к аноду область его движения существенно расширяется, при этом смещение в аксиальном направлении увеличивается более чем на порядок. Столь сильное изменение области движения свидетельствует о возможности качественного изменения характера траекторий при смещении точки старта частицы вдоль канала от катода к аноду. Проанализируем это путём прямого численного интегрирования уравнений движения в гамильтоновой форме с гамильтонианом (4.22) [116]. Будем выпускать электроны с нулевой начальной скоростью из центра ускоряющего канала ($R_0 = 5$ см), варьируя положение точки старта вдоль оси канала. На следующих ниже рисунках показаны особенности траекторий, стартовавших при $z_0 = -1$ см (рис. 4.5–4.7), при $z_0 = -1,6$ см (рис. 4.8–4.10), и при $z_0 = -2$ см (рис. 4.11–4.13). Отметим, что при старте из центра канала все траектории являются локализованными внутри канала и не уходят на стенки. Удержание обеспечивается ростом напряжённости магнитного поля к стенкам (см. рис. 1.12а), создающим магнитную яму в центре канала. Таким образом, в общем случае движение электрона представляется собой трёхмерное колебательное движение, состоящее из азимутального вращения, связанного с электрическим дрейфом, колебаний между стенками канала за счёт отражения от областей сильного магнитного поля и смещения в аксиальном направлении, ограниченного наличием дрейфового интеграла движения $\Psi(R, z) = \text{const}$.

При старте с $z_0 = -1$ см траектория оказывается строго локализована вблизи стартовой магнитной поверхности (рис. 4.7а), что подтверждает расчёт границ движения (рис. 4.4б). Аксиальное отклонение от точки старта не превышает 0,1 см. Частоты колебаний в радиальном и аксиальном направлениях (по R и z) сильно различаются – см. рис. 4.5. При этом траектория электрона строго регулярна. Об этом свидетельствуют как регулярная динамика компонент импульса (рис. 4.6), так и сечение Пуанкаре, представляющее собой гладкую замкнутую кривую – см. рис. 4.7б. Здесь и далее сечения Пуанкаре построены для канонических переменных R – P_R при пересечении частицей стартовой плоскости $z = z_0$.

При старте ближе к аноду ($z_0 = -1,6$ см) частоты колебаний по R и z становятся сопоставимыми – см. рис. 4.8. Траектория электрона остаётся регулярной, однако его аксиальное смещение увеличивается (рис. 4.9а), а картинка Пуанкаре приобретает “островной вид”.

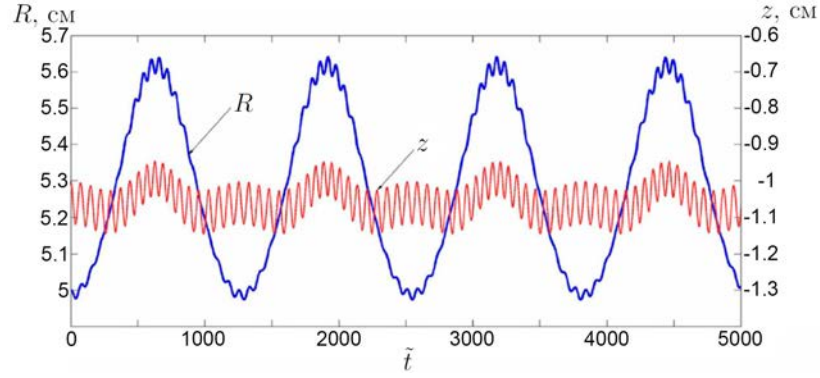


Рис. 4.5: Зависимости R (синяя линия) и z (красная линия) от времени $\tilde{t}[\frac{c}{3 \cdot 10^{10}}]$ на траектории движения электрона при старте с $R_0 = 5$ см, $z_0 = -1$ см.

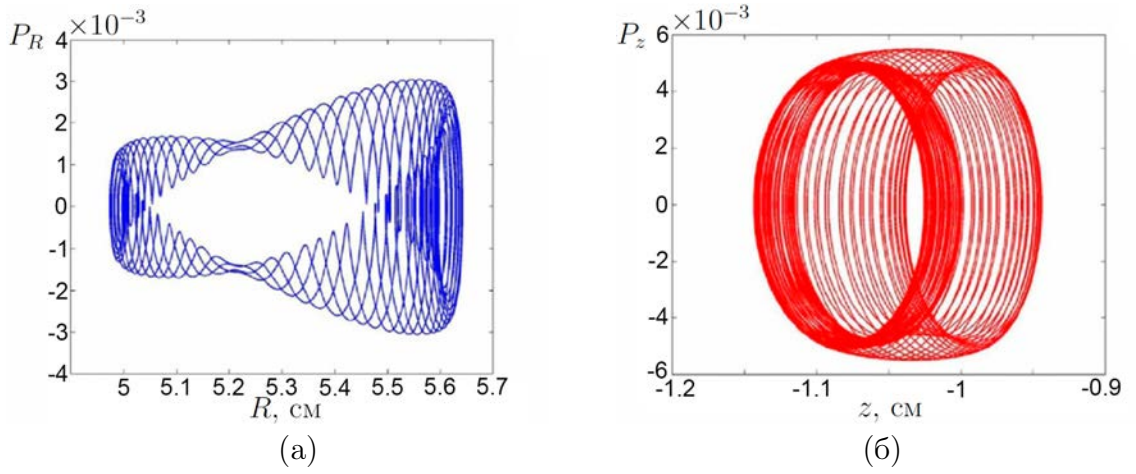


Рис. 4.6: Сечения $R-P_R$ (а) и $z-P_z$ (б) при $R_0 = 5$ см, $z_0 = -1$ см, $t = 1,7 \cdot 10^{-7}$ с. Здесь и далее на рисунках импульс нормирован на $m_e c$.

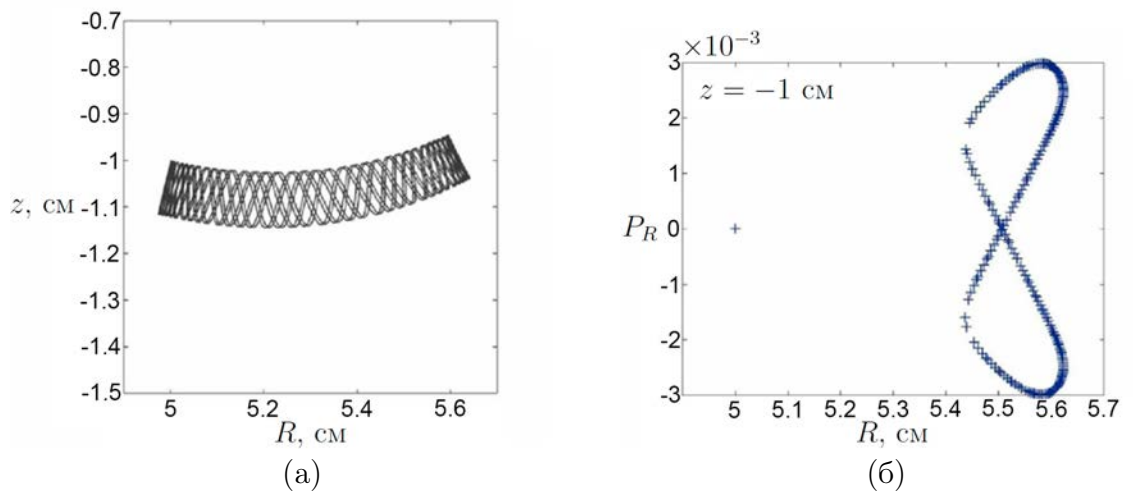


Рис. 4.7: Сечение $R-z$ (проекция траектории на плоскость $\varphi = \text{const}$) при $t = 1,7 \cdot 10^{-7}$ с (а), сечение Пуанкаре $R-P_R$ при $z = -1$ см, $t = 6,7 \cdot 10^{-7}$ с (б). Здесь $R_0 = 5$ см, $z_0 = -1$ см.

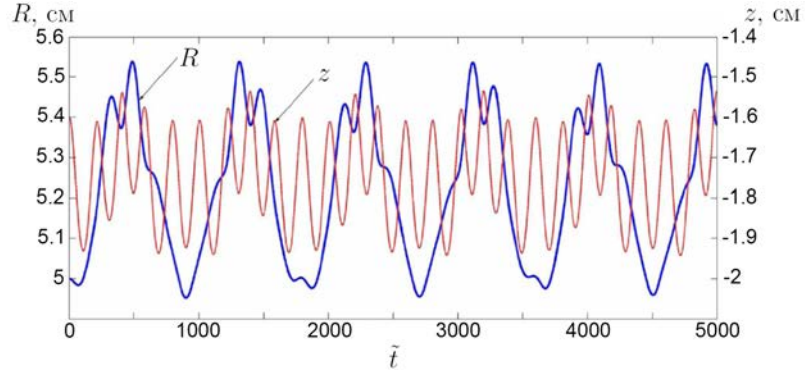


Рис. 4.8: Зависимости R (синяя линия) и z (красная линия) от времени $\tilde{t}[\frac{c}{3 \cdot 10^{10}}]$ на траектории движения электрона при старте с $R_0 = 5$ см, $z_0 = -1,6$ см.

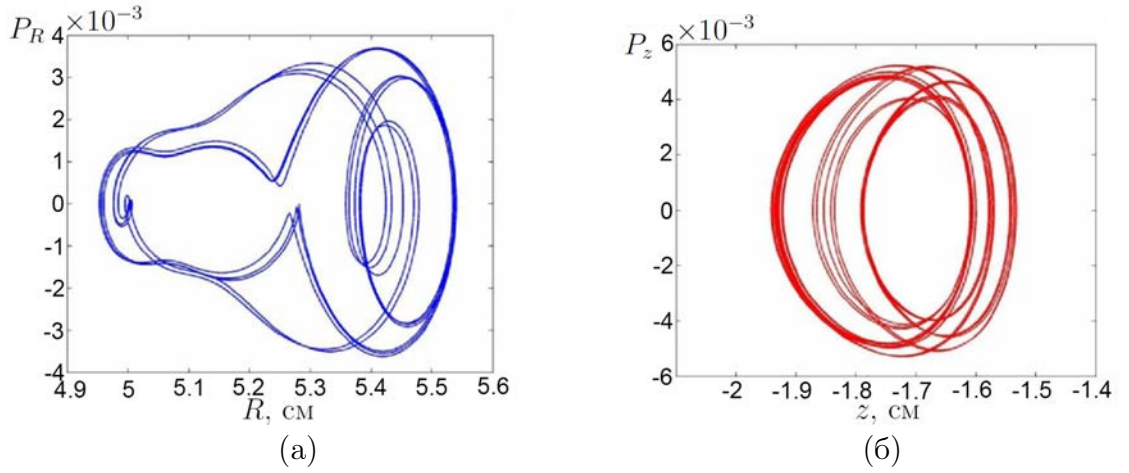


Рис. 4.9: Сечения $R-P_R$ (а) и $z-P_z$ (б) при $R_0 = 5$ см, $z_0 = -1,6$ см, $t = 1,7 \cdot 10^{-7}$ с.

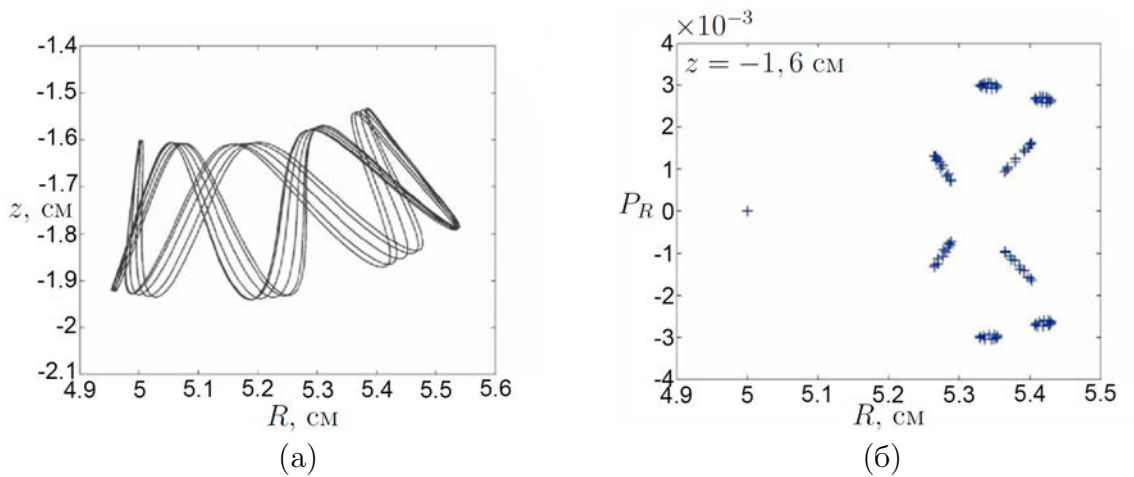


Рис. 4.10: Сечение $R-z$ (проекция траектории на плоскость $\varphi = \text{const}$) при $t = 1,7 \cdot 10^{-7}$ с (а), сечение Пуанкаре $R-P_R$ при $z = -1,6$ см, $t = 6,7 \cdot 10^{-7}$ с (б). Здесь $R_0 = 5$ см, $z_0 = -1,6$ см.

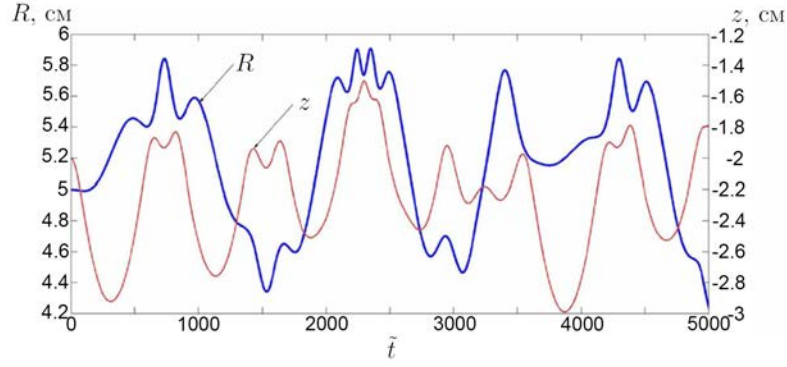


Рис. 4.11: Зависимости R (синяя линия) и z (красная линия) от времени $\tilde{t}[\frac{c}{3 \cdot 10^{10}}]$ на траектории движения электрона при старте с $R_0 = 5$ см, $z_0 = -2$ см.

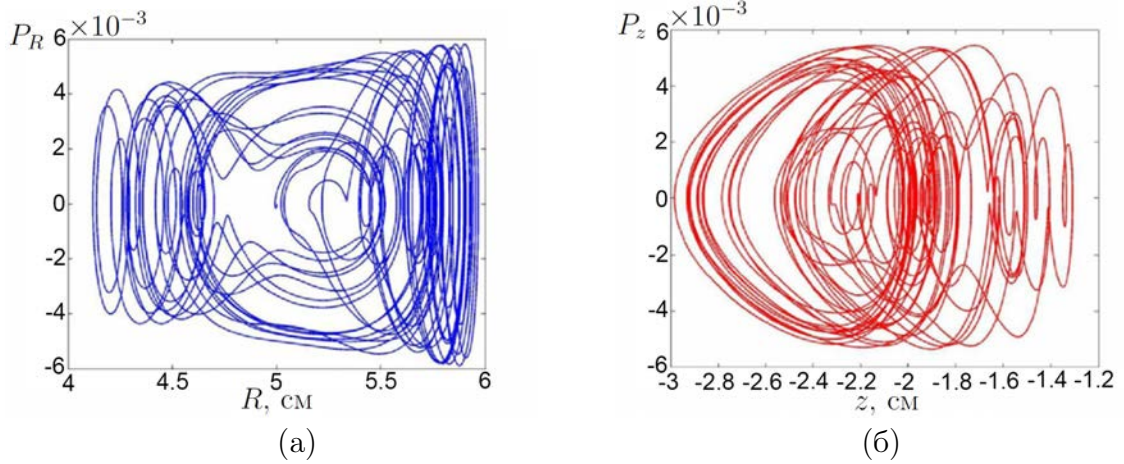


Рис. 4.12: Сечения $R-P_R$ (а) и $z-P_z$ (б) при $R_0 = 5$ см, $z_0 = -2$ см, $t = 1,7 \cdot 10^{-7}$ с.

Качественное изменение характера траекторий происходит после точки $z_0 = -1,7$ см. Для траекторий частиц стартовавших в прианодной части двигателя частоты колебаний по R и z практически равны (рис. 4.11), при этом аксиальное смещение составляет 1 см. Сечение Пуанкаре (рис. 4.13б), замещающее ограниченную площадь на плоскости $R-P_R$, а также динамика импульсов (рис. 4.12) и координат (рис. 4.13а) однозначно указывают на возможность стохастического движения электронов в прианодной области.

На рис. 4.14 все три рассмотренных типа траекторий представлены в одном масштабе. Увеличение аксиального смещения электронов в прианодной области более чем на порядок по сравнению с регулярным движением на выходе из двигателя свидетельствует о возможности усиленного переноса в канале СПД. Кроме того, эргодизация траекторий приводит к дополнительному механизму нагрева. Электроны имеют возможность попадать в буферный объём с большой

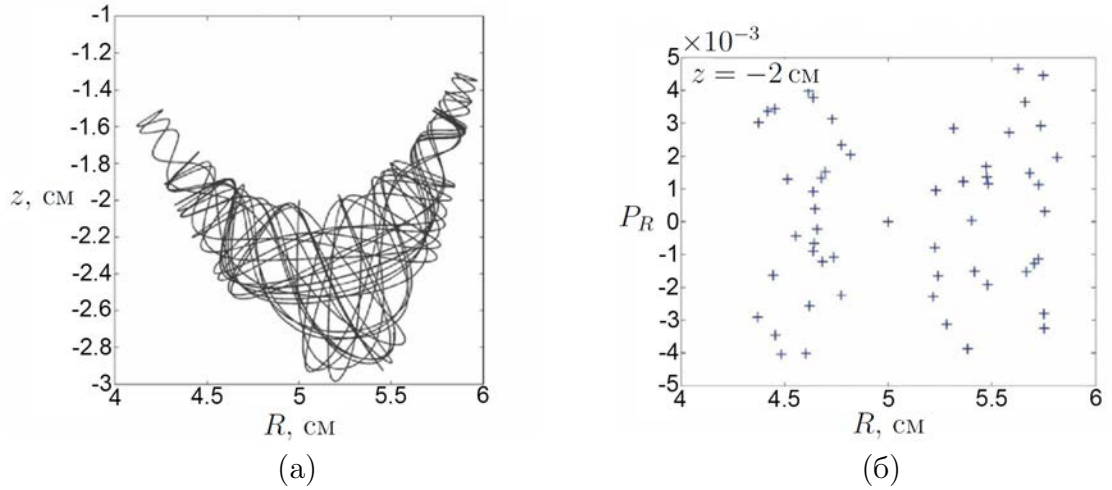


Рис. 4.13: Сечение R - z (проекция траектории на плоскость $\varphi = \text{const}$) при $t = 1,7 \cdot 10^{-7}$ с (а), сечение Пуанкаре R - P_R при $z = -2$ см, $t = 6,7 \cdot 10^{-7}$ с (б). Здесь $R_0 = 5$ см, $z_0 = -2$ см.

плотностью газа, родившись при ионизации в прианодной области и нагревшись в электрическом поле при достаточно протяжённом продольном распространении. Наблюдаемый переход от регулярной к стохастической динамике может быть связан с нарушением сохранения магнитного момента электронов μ . В качестве иллюстрации на рис. 4.14б,в показаны временные зависимости для электронов, стартовавших из точек $z_0 = -1$ см и $z_0 = -2$ см, соответственно. Видно, что если в прикатодной области с максимумом магнитного поля магнитный момент сохраняется весьма точно, то вблизи анода речи о его сохранении не идёт. Отсутствие третьего инварианта делает гамильтониан электронов неинтегрируемым, что указывает на возможность стохастического движения. На рис. 4.14б,в также представлена зависимость средней кинетической энергии, набираемой электронами на траекториях.

Проведённые расчёты показали, что движение электронов обладает качественными различиями в прианодной и прикатодной областях плазмы СПД. Гамильтониан электронов, стартовавших из центра ускоряющего канала с нулевой начальной скоростью, оказывается интегрируемым в КО, а их траектории сильно локализованы вблизи стартовой магнитной поверхности Ψ_0 . Основой разряда служит локальный нагрев электронов на первой циклоиде, появляющихся в процессе эмиссии или ионизации газа с нулевой начальной скоростью. Наиболее ярко это проявляется в области максимума магнитного поля,

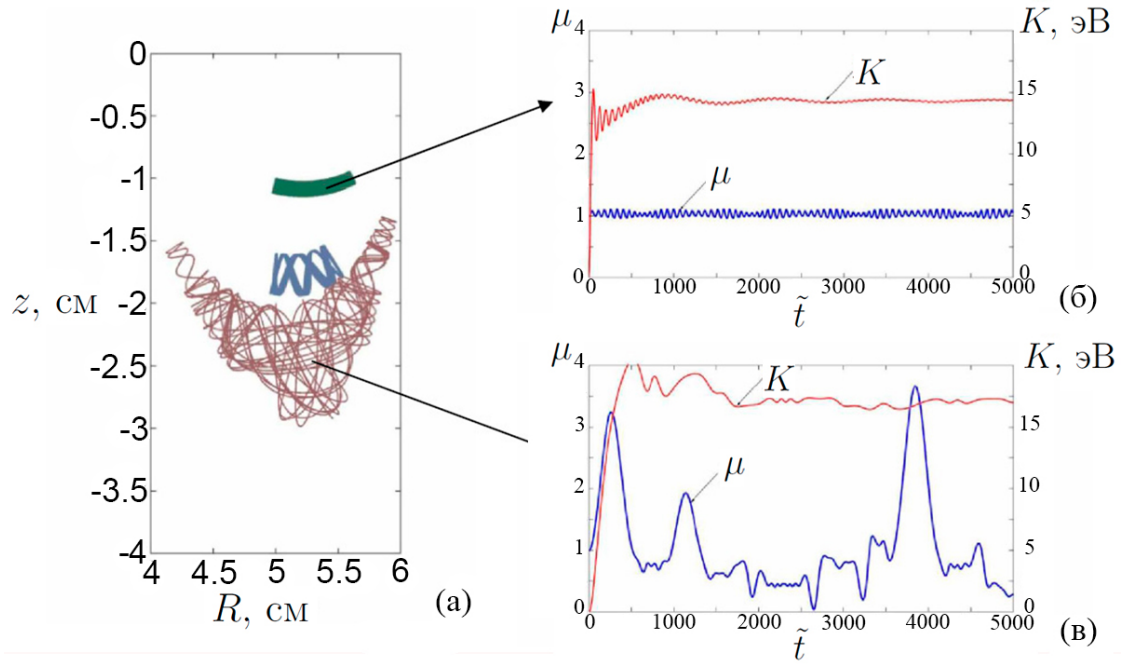


Рис. 4.14: Проекция траекторий с $R_0 = 5$ см и $z_0 = -1$ см (зелёный), $z_0 = -1,6$ см (синий), $z_0 = -2$ см (красный) на плоскость $\varphi = \text{const}$ за время $t = 6, 7 \cdot 10^{-7}$ с (а); зависимости магнитного момента, μ , и средней кинетической энергии, K , от времени $\tilde{t}[\frac{c}{3 \cdot 10^{10}}]$ для траекторий с $z_0 = -1$ см (б) и $z_0 = -2$ см (в). Магнитный момент нормирован на начальное значение.

где наблюдается высокая энергия электронов вплоть до 20 эВ. Электроны в КО нейтрализуются на стенках, взаимодействуя с ионами, распыляющими диэлектрики. В КО аксиальное смещение электронов мало, следовательно, мал и электронный ток. В прианодной области из-за малости магнитного поля гамильтониан электронов оказывается неинтегрируемым. При смещении точки старта от катода к аноду поперечный адиабатический инвариант перестаёт сохраняться достаточно резко. Этот переход объясняет наличие в эксперименте границы эрозии стенки разрядной камеры [336]. Движение электронов характеризуется большими аксиальными блужданиями, стохастической динамикой и достаточно интенсивным нагревом. На эксперименте в АО регистрируется электронный ток, достигающий 30% от тока ускоренных ионов [218]. Электроны, несущие ток, обеспечивают прианодный разряд и интенсивную ионизацию поступающего в разряд газа. Заметим, что своим источником эти электроны имеют не катод, а рождаются внутри ускорительного канала в результате ионизации и далее выходят на анод.

4.3 Вращение ансамбля частиц плазмы в радиальном электрическом поле токамака

Вращение плазмы характерно для всех современных токамаков и играет, как считается в настоящее время, важную роль в самоорганизации турбулентной плазмы и в транспортных процессах. Поэтому измерение профиля электрического поля является одной из наиболее интригующих экспериментальных задач и проводится на всех ведущих мировых установках – см., например, [340, 341].

Величину электрического поля можно восстановить, измеряя скорость вращения плазмы спектроскопическими методами диагностики, наиболее распространённым из которых сейчас является метод рекомбинационной спектроскопии – см., например, диагностику на токамаках Tore Supra [342] и TEXTOR [343]. Радиальное (в направлении малого радиуса токамака) электрическое поле E_r в условиях стационара рассчитывается из радиального баланса сил $E_r \approx (Z_i e n)^{-1} \nabla_r p + V_\theta B_\varphi / c - V_\varphi B_\theta / c$ по измеренным тороидальной V_φ и полоидальной V_θ составляющим скорости вращения излучающей компоненты плазмы и градиенту её давления p . Для прямого измерения электрического потенциала используется диагностика плазмы пучком тяжёлых ионов [344]. Известное сравнение результатов двух этих диагностик даёт для напряжённости электрического поля расхождение в несколько раз [345], что может свидетельствовать о недостаточной точности расчёта электрического поля из условия силового баланса. Не согласуются с экспериментальными данными и оценки скорости вращения плазмы, основанные на стандартной неоклассической теории [330] – см., например, обзор [346] и ссылки в нём. В первую очередь, расхождения касаются полоидальной скорости вращения, которая, как следует из экспериментов, вносит значительный или даже преобладающий вклад в радиальный баланс сил и определяется, согласно неоклассической теории, главным образом, градиентом температуры ионов. Величина тороидальной скорости также не согласуется с теорией, значительно уступая неоклассическим оценкам [347, 348], согласно которым тороидальная скорость вращения, связанная с действием радиального электрического поля, равна скорости электрического дрейфа в полоидальном магнитном поле, $\mathbf{V}_E^* = c[\mathbf{E}_r \times \mathbf{B}_\theta] / B_\theta^2$. Это стимулировало ряд попыток расширения стандартной неоклассической теории на основе более сложных расчётов тензора вязкости, в том числе, с учётом эффектов аномаль-

ности, сужения орбит частиц при наличии градиента электрического поля, эффектов инерции, гировязкости и др. [349–353].

Далее в разделе рассмотрена задача о бесстолкновительной релаксации изначально изотропного ансамбля частиц в токамаке в присутствии электрического поля [100]. Такая постановка задачи может моделировать движение ансамбля частиц, рождающихся в результате пеллет-инжекции, при ионизации частиц диагностического пучка или в результате термоядерных реакций. Показано, что генерируемая при этом скорость тороидального вращения плазмы существенным образом отличается как от величины обычного электрического дрейфа в скрещенных полях, так и от неоклассических оценок $\mathbf{V}_E^*$, что обусловлено различием в воздействии электрического поля на траектории пролётных и запертых частиц.

Важность разделения заряженных частиц в токамаке на категории “запертых” и “пролётных” впервые была отмечена в классической работе Кадомцева и Погуце [354] 1966 года. В [354] были рассчитаны усреднённые характеристики траекторий запертых частиц в магнитном поле токамака: среднее радиальное смещение, средняя продольная скорость и период движения. В [330] выражение для средней продольной скорости запертых частиц, полученное в [354], было модифицировано с учётом прецессии частиц в радиальном электрическом поле со скоростью $\mathbf{V}_E^*$. Тороидальная прецессия пролётных частиц в токамаке в отсутствие электрического поля исследовалась в [355]. В [356] расчёты средней тороидальной скорости были проведены с учётом радиального электрического поля, но только для запертых частиц. Аналогичные вычисления для пролётных частиц проведены не были. Вместе с тем весьма распространённой стала парадигма о том, что в радиальном электрическом поле токамака как запертые, так и пролётные частицы вращаются с одной и той же скоростью $\mathbf{V}_E^*$ (см, например, [357]).

Покажем далее, что последнее утверждение является ошибочным. Дополнительная тороидальная скорость, $\Delta \mathbf{V}_{pas}$, приобретаемая пролётной частицей в радиальном электрическом поле, оказывается значительно меньше величины V_E^* . Более того, величина $\Delta \mathbf{V}_{pas}$ сильно зависит от конкретного вида траектории частицы, которая может быть определена по её стартовой позиции. Так, например, частицы, стартующие с одними и теми же начальными скоростями из разных точек на одной и той же магнитной поверхности, приобретают

в радиальном электрическом поле разную тороидальную скорость; причём $\Delta \mathbf{V}_{pas}$ для них может даже иметь разный знак. Поскольку доля пролётных частиц в токамаке велика, описанное явление оказывает существенное влияние на макроскопическую динамику плазмы в электрическом поле.

4.3.1 Бесстолкновительная функция распределения и скорость макроскопического вращения

Рассмотрим бесстолкновительную эволюцию первоначально изотропного (для простоты – максвелловского) ансамбля заряженных частиц в токамаке с радиальным электрическим полем, описываемую кинетическим уравнением

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{Z_i e}{m} \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} + \mathbf{E} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \delta(t) n_0(\mathbf{r}) \gamma_0(v^2). \quad (4.24)$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – функция распределения, $\delta(t)$ – дельта-функция от времени, $n_0(\mathbf{r})$ – концентрация частиц источника, $\gamma_0(v^2) = (\pi v_T^2)^{-3/2} \exp(-v^2/v_T^2)$ – распределение частиц в источнике по скоростям, v_T – тепловая скорость. Решение уравнения (4.24) записывается через функцию Хевисайда, $\Theta(t)$, в виде

$$f = \Theta(t) n_0(\mathbf{r}_0) \gamma_0(v_0^2), \quad (4.25)$$

где $\Theta(t < 0) = 0$, $\Theta(t \geq 0) = 1$; $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ – начальные положение и скорость частицы. Явный вид функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ восстановим, проводя обратное (от момента времени t до $t = 0$) интегрирование вдоль траекторий, найденных путём численного решения точных уравнений движения. Используем метод был развит ранее в [358, 359] для расчёта бутстрэп-тока α -частиц в приосевой области токамака и реализован в численном коде [113] с добавлением радиального электрического поля.

Макроскопическая скорость ансамбля задаётся первым моментом полученной функции f :

$$V_\alpha(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t) = \int v_\alpha f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v.$$

Здесь $V_{\alpha=\theta}$ – скорость полоидального вращения, $V_{\alpha=\varphi}$ – скорость тороидального вращения, $n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v$ – концентрация частиц.

В каждой точке пространства функция распределения (4.25) принципиально нестационарна. На траектории $\mathbf{r}(t)$ величина $\gamma_0(v_0^2)$, наряду с $n_0(\mathbf{r}_0)$, есть функция времени. На временах, больших нескольких характерных периодов пролёта частицами своих траекторий (для краткости будем использовать термин “баунс-период”, хотя обычно он применяется лишь для запертых частиц), для получения стационарного распределения частиц необходимо провести временное усреднение:

$$\langle f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T n_0(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) \gamma_0(v_0^2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) dt. \quad (4.26)$$

Средние за время T значения концентрации и макроскопической скорости частиц ансамбля определим естественными соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle(\mathbf{r}, T) &= \int \langle f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle d^3v, \\ \langle V_\alpha \rangle(\mathbf{r}, T) &= \frac{\int v_\alpha \langle f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle d^3v}{\langle n \rangle(\mathbf{r}, T)}. \end{aligned}$$

При $T \rightarrow \infty$ функция распределения $\langle f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle$ зависит только от интегралов движения [360], а её моменты $\langle n \rangle(\mathbf{r})$ и $\langle V_\alpha \rangle(\mathbf{r})$ стационарны. Полученные в результате такой процедуры функция распределения и её моменты являются локальными; усреднение по магнитной поверхности, характерное для неоклассической теории [330], не проводится. Ниже мы будем опускать значки $\langle \rangle$ там, где это не приводит к недоразумениям.

Вычисления проведём в модельной конфигурации магнитного поля в токамаке с низким давлением плазмы:

$$\mathbf{B}_\varphi = B_a \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{B}_\theta = B_a \frac{r}{qR} \mathbf{e}_\theta.$$

Далее в данном разделе будем полагать $\Phi = E_b r^2 / 2a$ ($E_b > 0$ – напряжённость электрического поля на границе плазмы), $q(r) = \text{const}$. Движение частиц в представленной системе демонстрирует точное сохранение полной энергии в потенциальном поле, $E_n = mv^2/2 + Z_i e \Phi$, и точное сохранение тороидальной компоненты канонического импульса в осесимметричной системе $J = mRv_\varphi + eZ_i R A_\varphi / c$, где $A_\varphi = -B_a \Psi / R$ – φ -компонента векторного потенциала. Все расчёты далее, где это не оговорено отдельно, для определённости проведены

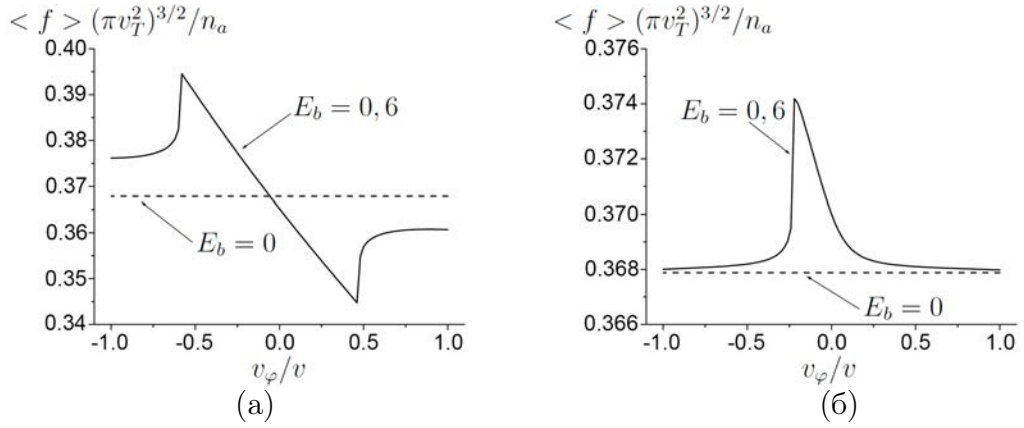


Рис. 4.15: Вид функции распределения частиц с однородным ($n_0 = n_a$) максвелловским источником в зависимости от тороидальной скорости (а) при $r = 0, 8a$, $\theta = 0$, (б) при $r = 0$. Здесь $v/v_T = 1$.

для протонов с энергией $E_n = 3,36$ кэВ при следующих значениях параметров: магнитное поле на оси $B_a = 2$ Тл, коэффициент запаса устойчивости $q = 1$, аспектное отношение установки $A = 5$, большой радиус $R_0 = 1,5$ м, $E_b = 0,6$ единиц СГС. Расчёт траекторий производится численно с помощью трёхмерного кода [112].

Вид стационарной (усреднённой в соответствии с (4.26) по времени при $T \rightarrow \infty$) функции распределения, порождённой максвелловским источником, в зависимости от нормированной тороидальной скорости представлен на рис. 4.15. При ненулевом электрическом поле установившаяся функция распределения существенно анизотропна как на периферии, так и в центре плазменного шнура.

Указанная анизотропия функции распределения свидетельствует о наличии направленного течения плазмы. На рис. 4.16 показаны профили полоидальной и тороидальной компонент скорости вращения. Скорость полоидального вращения близка к полоидальной компоненте скорости электрического дрейфа. Скорость тороидального вращения превосходит $V_{E\varphi}$, но уступает V_E^* , и при этом направлена в разные стороны на внешнем и внутреннем обводах тора.

4.3.2 Тороидальная прецессия заряженной частицы в электрическом поле

Для объяснения обнаруженного эффекта полоидальной асимметрии вращения в радиальном электрическом поле проанализируем тороидальное вращение отдельных частиц, характеризуемое величиной $\langle v_\varphi \rangle (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = \int_0^{T_b} v_\varphi dt / T_b$.

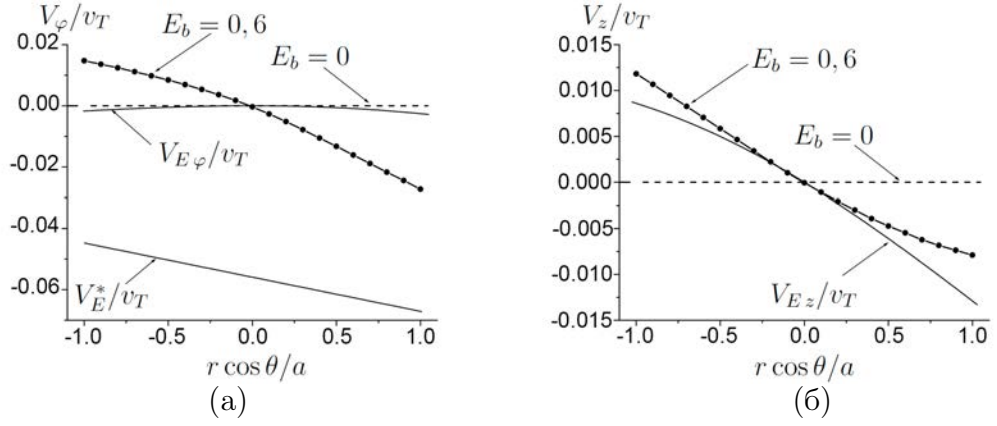


Рис. 4.16: Профили (а) тороидальной V_ϕ и (б) z -компоненты V_z полоидальной скоростей вращения в плоскости $z = 0$.

Рассчитаем T_b и $\langle v_\phi \rangle$, используя подход, описывающий движение пролётных и запертых частиц единым образом и свободный от стандартного предположения о малости отклонения дрейфовых траекторий от стартовых магнитных поверхностей [101]. Для этого в выражениях для баунс-периода и средней тороидальной скорости перейдём от интегрирования по времени к интегрированию по $\tilde{v}_\phi = v_\phi/v_0$:

$$T_b = 2 \int_0^{T_b/2} dt = 2 \int_{\tilde{v}_{\phi 0}}^{\tilde{v}_{\phi ex}} \frac{d\tilde{v}_\phi}{d\tilde{v}_\phi/dt};$$

$$\langle v_\phi \rangle = \frac{2v_0}{T_b} \int_0^{T_b/2} \tilde{v}_\phi dt = \frac{2v_0}{T_b} \int_{\tilde{v}_{\phi 0}}^{\tilde{v}_{\phi ex}} \frac{\tilde{v}_\phi d\tilde{v}_\phi}{d\tilde{v}_\phi/dt}. \quad (4.27)$$

Здесь $\tilde{v}_{\phi 0} = \tilde{v}_\phi(t = 0)$ – безразмерная начальная тороидальная скорость частицы, стартующей (для определённости) из экваториальной плоскости токамака $\theta = 0$, $\tilde{v}_{\phi ex} = \tilde{v}_\phi(t = T_b/2)$ – скорость в другой экстремальной точке траектории, а именно, в точке $\theta = \pm\pi$ или $\theta = 0$. Отметим, что $\tilde{v}_\phi$ может быть использована в качестве переменной интегрирования, если она меняется монотонно на временном интервале $t \in [0, T_b/2]$, к чему мы ещё вернёмся позже. Изменение нормированной тороидальной скорости во времени, $d\tilde{v}_\phi/dt$, может быть представлено в виде $d\tilde{v}_\phi/dt = d\tilde{v}_\phi/dr^2 dr^2/dt$. Чтобы связать $\tilde{v}_\phi$ с r и θ ,

используем сохранение трёх инвариантов движения:

$$I_J = \frac{J}{mv_0 R_0} = \left(1 + \frac{r \cos \theta}{R_0}\right) \tilde{v}_\varphi - \frac{r^2}{l^2}$$

– безразмерный канонический импульс,

$$I_M = \frac{\mu}{mv_0^2/2B_a} = \left(1 + \frac{r \cos \theta}{R_0}\right) \left(\frac{v^2}{v_0^2} - \tilde{v}_\varphi^2\right)$$

– безразмерный магнитный момент,

$$I_E = \frac{E_n}{mv_0^2/2} = \frac{v^2}{v_0^2} + \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \quad (4.28)$$

– безразмерная полная энергия,

где $l^2 = 2qR_0\rho_L$, $\rho_L = v_0/\omega_B$. В стационарной конфигурации токамака Φ является функцией магнитной поверхности: $\Phi = \Phi(r)$. В отсутствие электрического поля $I_E = 1$.

После исключения v^2/v_0^2 соотношение между $\tilde{v}_\varphi$ и r^2 , следующее из (4.28), может быть записано в виде

$$I_J + \frac{r^2}{l^2} = \frac{I_M \tilde{v}_\varphi}{I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - 2e\Phi/mv_0^2}. \quad (4.29)$$

Дифференцирование (4.29) при $q = \text{const}$ даёт

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}_\varphi}{dr^2} &= \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2}\right) \times \\ &\times \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} - l^2 \left(I_J + \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{d}{dr^2} \left(\frac{2e\Phi}{mv_0^2}\right)\right) \times \\ &\times \left[l^2 I_M \left(I_E + \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2}\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Используя выражения $V_{dr} = v_0^2(I_E + \tilde{v}_\varphi^2 - 2e\Phi/mv_0^2)/2\omega_B R_0$, $r \sin \theta = \pm \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \theta}$, $r \cos \theta = R_0(I_M/(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - 2e\Phi/mv_0^2) - 1)$, и уравнение движения ведущего центра, $dr/dt = V_{dr} \sin \theta$, находим изменение квадрата радиальной координаты заряженной частицы во времени:

$$\frac{dr^2}{dt} = 2V_{dr} r \sin \theta = \pm \frac{v_0^2(I_E + \tilde{v}_\varphi^2 - 2e\Phi/mv_0^2)}{\omega_B(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - 2e\Phi/mv_0^2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{l^2}{R_0^2} \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \left(I_M \tilde{v}_\varphi - I_J \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \right) - \left(I_M - I_E + \tilde{v}_\varphi^2 + \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Подстановка $d\tilde{v}_\varphi/dt = d\tilde{v}_\varphi/dr^2 dr^2/dt$ в (4.27) приводит к следующим выражениям для T_b и $\langle v_\varphi \rangle$ в квадратурах:

$$\begin{aligned} T_b &= \int_{\tilde{v}_{\varphi 0}}^{\tilde{v}_{\varphi ex}} \frac{4qR_0 I_M \sigma_v}{v_0} \times \\ &\times \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} - l^2 \left(I_J + \frac{r^2}{l^2} \right) \frac{d}{dr^2} \left(\frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ \frac{l^2}{R_0^2} \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \left(I_M \tilde{v}_\varphi - I_J \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \right) - \left(I_M - I_E + \tilde{v}_\varphi^2 + \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right)^2 \right\}^{-1/2} d\tilde{v}_\varphi, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \langle v_\varphi \rangle &= \int_{\tilde{v}_{\varphi 0}}^{\tilde{v}_{\varphi ex}} \frac{4qR_0 I_M \sigma_v \tilde{v}_\varphi}{T_b} \times \\ &\times \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} - l^2 \left(I_J + \frac{r^2}{l^2} \right) \frac{d}{dr^2} \left(\frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ \frac{l^2}{R_0^2} \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \left(I_M \tilde{v}_\varphi - I_J \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \right) - \left(I_M - I_E + \tilde{v}_\varphi^2 + \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right)^2 \right\}^{-1/2} d\tilde{v}_\varphi, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где σ_v выбирается равной $+1$ или -1 для обеспечения положительности T_b .

Чтобы провести интегрирование в (4.31), (4.32), необходимо знать зависимость r от $\tilde{v}_\varphi$ и верхний предел интегрирования, $\tilde{v}_{\varphi ex}$. В отсутствие электрического поля радиальная координата r не входит в подынтегральные выражения (4.31), (4.32) и они могут быть проинтегрированы аналитически без каких-либо дополнительных предположений.

При заданном потенциале $\Phi(r)$ искомая зависимость r от $\tilde{v}_\varphi$ определяется (4.29), и выражения (4.31), (4.32) всегда можно проинтегрировать численно или с использованием определённых аппроксимаций. Позже мы продемонстрируем это на примере параболического электрического потенциала, $2e\Phi/mv_0^2 = \kappa(r/R_0)^2$, соответствующего линейной зависимости электрического поля от r , $E_r = -E_b r/a$, $\kappa = cE_b R_0^2/v_0 B_a \rho_L a$. Как и ранее рассматриваются протоны с энергией $E_n = 3,36$ кэВ. Малость отношения $cE_b/v_0 B_a = 0,011$ в этом случае обеспечивает применимость классической дрейфовой теории без учёта эффектов сильного электрического поля (см. раздел 4.1).

Без электрического поля выражения (4.31), (4.32) сводятся к

$$T_b = \frac{4qR_0 I_M \sigma_v}{v_0} \int_{\tilde{v}_{\varphi 0}}^{\tilde{v}_{\varphi ex}} \left\{ \frac{l^2}{R_0^2} (1 - \tilde{v}_\varphi^2) (I_M \tilde{v}_\varphi - I_J \times \right. \\ \left. \times (1 - \tilde{v}_\varphi^2)) - (I_M - 1 + \tilde{v}_\varphi^2)^2 \right\}^{-1/2} \frac{d\tilde{v}_\varphi}{1 - \tilde{v}_\varphi^2}, \quad (4.33)$$

$$< v_\varphi > = \frac{4qR_0 I_M \sigma_v}{T_b} \int_{\tilde{v}_{\varphi 0}}^{\tilde{v}_{\varphi ex}} \left\{ \frac{l^2}{R_0^2} (1 - \tilde{v}_\varphi^2) (I_M \tilde{v}_\varphi - \right. \\ \left. - I_J (1 - \tilde{v}_\varphi^2)) - (I_M - 1 + \tilde{v}_\varphi^2)^2 \right\}^{-1/2} \frac{\tilde{v}_\varphi d\tilde{v}_\varphi}{1 - \tilde{v}_\varphi^2}. \quad (4.34)$$

Кроме того уравнение (4.30) переходит в

$$\frac{d\tilde{v}_\varphi}{dr^2} = \frac{(1 - \tilde{v}_\varphi^2)^2}{l^2 I_M (1 + \tilde{v}_\varphi^2)}, \quad (4.35)$$

что означает положительность $d\tilde{v}_\varphi/dr^2$ везде внутри интервала (r_0, r_{ex}) . При старте частицы из экваториальной плоскости токамака со

стороны слабого магнитного поля ($\cos \theta_0 = 1$) её радиальная координата r меняется монотонно и достигает своего экстремального значения r_{ex} , когда частица снова пересекает экваториальную плоскость ($\sin \theta = 0$). Таким образом, в соответствии с (4.35) на половине баунс-периода $\tilde{v}_\varphi$ также меняется монотонно, что позволяет провести интегрирование в (4.33), (4.34) вдоль всего интервала $[\tilde{v}_{\varphi 0}, \tilde{v}_{\varphi ex}]$.

Верхний предел $\tilde{v}_{\varphi ex}$ в интегралах (4.33), (4.34) может быть найден из (4.28) при условии, что $\sin \theta = 0$, что приводит к уравнению четвёртого порядка на $\tilde{v}_\varphi$:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\varphi^4 + \tilde{v}_\varphi^3 I_M^* \frac{l^2}{R^2} + 2\tilde{v}_\varphi^2 (I_M^* - 1) - \tilde{v}_\varphi I_M^* \frac{l^2}{R^2} + \\ + I_M^* (I_M - 2) + 1 = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Здесь введён параметр $I_M^* = I_M / (1 + I_J l^2 / R^2)$. Для запертых частиц уравнение (4.36) имеет только два действительных корня: уже известный корень $\tilde{v}_{\varphi 0}$ и искомый $\tilde{v}_{\varphi ex}$. Для пролётных частиц уравнение (4.36) может иметь четыре действительных корня, один из которых $\tilde{v}_{\varphi 0}$. Чтобы определить $\tilde{v}_{\varphi ex}$, необходимо выбрать корень, знак которого совпадает с $\tilde{v}_{\varphi 0}$, поскольку пролётная частица не изменяет направления своего тороидального вращения на траектории. Отметим, что для пролётных частиц, траектории которых охватывают магнитную ось, этот корень может быть найден приближённо: $\tilde{v}_{\varphi ex}^{pas} \approx \tilde{v}_{\varphi 0} \sqrt{2(1 - I_M^*) / \tilde{v}_{\varphi 0}^2 - 1}$.

Поскольку $\tilde{v}_{\varphi 0}$ и $\tilde{v}_{\varphi ex}$ зануляют знаменатели в интегралах (4.33), (4.34), выражения для T_b and $\langle v_\varphi \rangle$ могут быть сведены к комбинации полных эллиптических интегралов:

$$T_b = \frac{4qR_0 I_M \sigma_v}{v_0} \{A_1 I_1 + A_{31} I_3(t_1) + A_{32} I_3(t_2)\}, \quad (4.37)$$

$$\langle v_\varphi \rangle = \frac{4qR_0 I_M \sigma_v}{T_b} \{\tilde{A}_1 I_1 + \tilde{A}_{31} I_3(t_1) + \tilde{A}_{32} I_3(t_2)\}, \quad (4.38)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\frac{\nu - \tilde{v}_{\varphi ex}}{\tilde{v}_{\varphi ex} - \mu}} \frac{dt}{\sqrt{C(1 + m_1 t^2)(1 + m_2 t^2)}},$$

$$I_3(t_i) = \int_0^{\frac{\nu - \tilde{v}_{\varphi ex}}{\tilde{v}_{\varphi ex} - \mu}} \frac{dt}{(t^2 - t_i^2) \sqrt{C(1 + m_1 t^2)(1 + m_2 t^2)}}$$

$$C = - \left(1 + I_J \frac{l^2}{R_0^2} \right) (\nu^2 + p_1 \nu + q_1)(\nu^2 + p_2 \nu + q_2),$$

$$m_1 = \frac{\mu^2 + p_1 \mu + q_1}{\nu^2 + p_1 \nu + q_1}, \quad m_2 = \frac{\mu^2 + p_2 \mu + q_2}{\nu^2 + p_2 \nu + q_2},$$

$$t_1 = -\frac{1 + \nu}{1 + \mu}, \quad t_2 = -\frac{1 - \nu}{1 - \mu},$$

и

$$A_1 = -\frac{2(\mu - \nu)}{1 - \mu^2}, \quad A_{31} = \frac{(1 + \nu)(\mu - \nu)^2}{(1 + \mu)^3}, \quad A_{32} = -\frac{(1 - \nu)(\mu - \nu)^2}{(1 - \mu)^3},$$

$$\tilde{A}_1 = -\frac{2\mu(\mu - \nu)}{1 - \mu^2}, \quad \tilde{A}_{31} = -\frac{(1 + \nu)(\mu - \nu)^2}{(1 + \mu)^3}, \quad \tilde{A}_{32} = -\frac{(1 - \nu)(\mu - \nu)^2}{(1 - \mu)^3}.$$

Здесь

$$\mu, \nu = -\frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} \pm \frac{\sqrt{(q_1 - q_2)^2 - (p_1 - p_2)(p_2 q_1 - p_1 q_2)}}{p_1 - p_2},$$

и

$$p_1 = -(\tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex}), \quad q_1 = \tilde{v}_{\varphi 0} \tilde{v}_{\varphi ex},$$

$$p_2 = I_M^* \frac{l^2}{R^2} + \tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex},$$

$$q_2 = 2(I_M^* - 1) - \tilde{v}_{\varphi 0} \tilde{v}_{\varphi ex} + (\tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex}) \left(I_M^* \frac{l^2}{R_0^2} + \tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex} \right)$$

коэффициенты разложения: $\tilde{v}_{\varphi}^4 + \tilde{v}_{\varphi}^3 I_M^* l^2 / R_0^2 + 2\tilde{v}_{\varphi}^2 (I_M^* - 1) - \tilde{v}_{\varphi} I_M^* l^2 / R_0^2 + I_M^* (I_M - 2) + 1 = (\tilde{v}_{\varphi}^2 + p_1 \tilde{v}_{\varphi} + q_1)(\tilde{v}_{\varphi}^2 + p_2 \tilde{v}_{\varphi} + q_2)$.

Интегралы I_1 и I_3 сводятся к полным эллиптическим интегралам первого рода, $K(\chi^2)$, и третьего рода, $\Pi(h, \chi^2)$, где модуль χ и параметр h зависят от знака m_2 (C всегда положителен, а m_1 всегда отрицателен); $\sigma_t = (\nu - \tilde{v}_{\varphi 0})(\tilde{v}_{\varphi 0} - \mu) / |(\nu - \tilde{v}_{\varphi 0})(\tilde{v}_{\varphi 0} - \mu)|$.

Для $m_2 > 0$

$$I_1 = \frac{\sigma_t K(m_2/(m_2 - m_1))}{\sqrt{C} \sqrt{m_2 - m_1}},$$

$$I_3(t_i) = -\frac{\sigma_t m_1 \Pi(1/(1 + m_1 t_i^2), m_2/(m_2 - m_1))}{\sqrt{C}(1 + m_1 t_i^2) \sqrt{m_2 - m_1}}.$$

На периферии плазмы этот случай соответствует запертым частицам.

Для $m_2 < 0$

$$I_1 = \frac{\sigma_t K(m_2/m_1)}{\sqrt{C} \sqrt{-m_1}}, \quad I_3(t_i) = -\frac{\sigma_t \Pi(-1/m_1 t_i^2, m_2/m_1)}{\sqrt{C} \sqrt{-m_1} t_i^2}.$$

На периферии плазмы этот случай соответствует пролётным частицам.

Уравнения (4.37), (4.38) являются точными выражениями для баунс-периода и средней тороидальной скорости заряженных частиц в магнитном поле токамака.

Для пролётных частиц, охватывающих магнитную ось, $\mu \approx \nu$, что упрощает выражения для T_b и $\langle v_\varphi \rangle$.

При наличии электрического поля с параболической зависимостью электростатического потенциала от радиуса $2e\Phi/mv_0^2 = \varkappa(r/R_0)^2$, выражения (4.31), (4.32) записываются в виде

$$T_b = \int_{\tilde{v}_{\varphi 0}}^{\tilde{v}_{\varphi ex}} \frac{4qR_0 I_M \sigma_v}{v_0} \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \varkappa \left(2 \frac{r^2}{R_0^2} + I_J \frac{l^2}{R_0^2} \right) \right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{l^2}{R_0^2} \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \varkappa \frac{r^2}{R_0^2} \right) \left(I_M \tilde{v}_\varphi - I_J \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \varkappa \frac{r^2}{R_0^2} \right) \right) - \left(I_M - I_E + \tilde{v}_\varphi^2 + \varkappa \frac{r^2}{R_0^2} \right)^2 \right\}^{-1/2} d\tilde{v}_\varphi, \quad (4.39)$$

$$\langle v_\varphi \rangle = \int_{\tilde{v}_{\varphi 0}}^{\tilde{v}_{\varphi ex}} \frac{4qR_0 I_M \sigma_v \tilde{v}_\varphi}{T_b} \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \varkappa \left(2 \frac{r^2}{R_0^2} + I_J \frac{l^2}{R_0^2} \right) \right)^{-1} \times$$

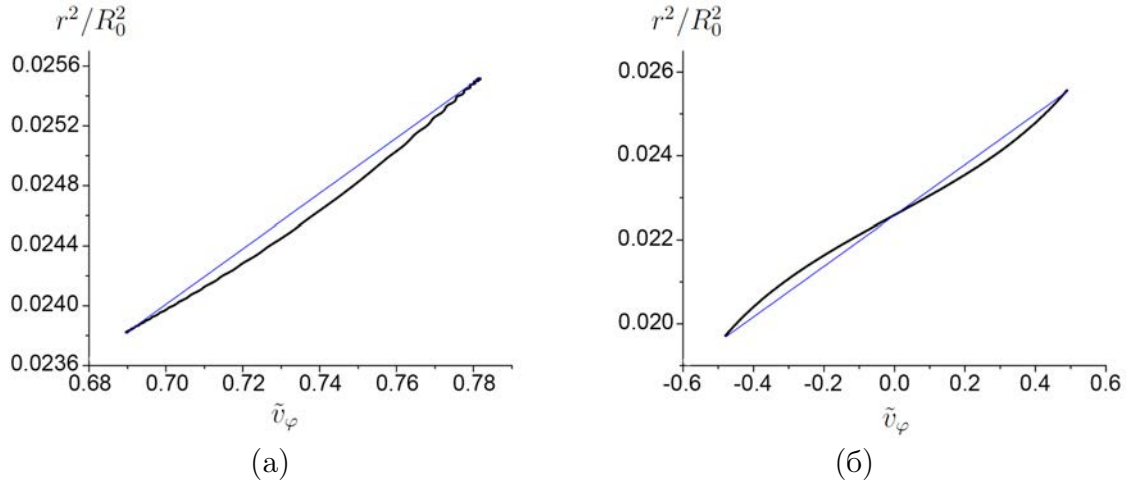


Рис. 4.17: Типичная зависимость r^2/R_0^2 от $\tilde{v}_\varphi$ на половине баунс-периода для пролётных (а) и запертых (б) частиц. Толстые чёрные линии показывают результаты численного расчёта, тонкие синие линии соответствуют линейной аппроксимации $r^2/R_0^2 = a_v \tilde{v}_\varphi + b_v$.

$$\times \left\{ \frac{l^2}{R_0^2} \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \kappa \frac{r^2}{R_0^2} \right) \left(I_M \tilde{v}_\varphi - I_J \left(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \kappa \frac{r^2}{R_0^2} \right) \right) - \left(I_M - I_E + \tilde{v}_\varphi^2 + \kappa \frac{r^2}{R_0^2} \right)^2 \right\}^{-1/2} d\tilde{v}_\varphi, \quad (4.40)$$

а связь между r^2 и $\tilde{v}_\varphi$ определяется уравнением (4.29) в форме

$$r^2 = \frac{R_0^2 (I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \kappa I_J l^2 / R_0^2)}{2\kappa} \times \left(1 - \left\{ 1 + \frac{4\kappa (I_J (I_E - \tilde{v}_\varphi^2) - I_M \tilde{v}_\varphi) l^2 / R_0^2}{(I_E - \tilde{v}_\varphi^2 - \kappa I_J l^2 / R_0^2)^2} \right\}^{1/2} \right). \quad (4.41)$$

Верхний предел, $\tilde{v}_{\varphi ex}$, интегралов (4.39), (4.40) может быть найден из уравнения движения ведущего центра в плоскости $\varphi = \text{const}$, полученного путём исключения v^2 и $\tilde{v}_\varphi$ в (4.28):

$$\left(I_E - \frac{2e\Phi}{mv_0^2} \right) \left(1 + \frac{r \cos \theta}{R_0} \right)^2 - I_M \left(1 + \frac{r \cos \theta}{R_0} \right) - \left(I_J + \frac{r^2}{l^2} \right)^2 = 0. \quad (4.42)$$

Это универсальное выражение, впервые полученное в [100], точно описывает траектории всех типов заряженных частиц в токамаке с

круглыми магнитными поверхностями, в том числе вблизи магнитной оси токамака.

При условии $\sin \theta = 0$ и для параболического профиля $\Phi(r)$, уравнение (4.42) является уравнением четвёртого порядка на $r_{ex} \cos \theta_{ex} = r \cos \theta (t = T_b/2)$. Зная $r_{ex} \cos \theta_{ex}$, легко получить $\tilde{v}_{\varphi ex}$ из закона сохранения I_J . После определения $\tilde{v}_{\varphi ex}$ выражения (4.39), (4.40) всегда могут быть проинтегрированы численно.

Для аналитического интегрирования зависимость r^2 от $\tilde{v}_{\varphi}$, заданная (4.41), оказывается слишком сложной. Вместо того, чтобы использовать (4.41) напрямую, воспользуемся простой линейной аппроксимацией, $r^2/R_0^2 = a_v \tilde{v}_{\varphi} + b_v$, в которой коэффициенты a_v , b_v определим по двум уже известными реперным точкам, $(r_0, \tilde{v}_{\varphi 0})$ и $(r_{ex}, \tilde{v}_{\varphi ex})$. А именно, $a_v = (r_{ex}^2/R_0^2 - r_0^2/R_0^2)/(\tilde{v}_{\varphi ex} - \tilde{v}_{\varphi 0})$, $b_v = (\tilde{v}_{\varphi ex} r_0^2/R_0^2 - \tilde{v}_{\varphi 0} r_{ex}^2/R_0^2)/(\tilde{v}_{\varphi ex} - \tilde{v}_{\varphi 0})$. Оказывается, что такое предположение работает достаточно хорошо как для пролётных, так и для запертых частиц, что проиллюстрировано на рис. 4.17. Подстановка $r^2/R_0^2 = a_v \tilde{v}_{\varphi} + b_v$ в выражения (4.39), (4.40) приводит к похожим, но немного модифицированным интегралам, как в (4.33), (4.34), которые также могут быть представлены в форме полных эллиптических интегралов (4.37), (4.38) со слегка изменёнными параметрами, представленными ниже:

$$t_{1,2} = -B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - B_0}, \text{ где}$$

$$B_0 = \frac{I_E - \nu^2 - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2a_v \nu)}{I_E - \mu^2 - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2a_v \mu)},$$

$$B_1 = \frac{I_E - \mu\nu - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + a_v(\mu + \nu))}{I_E - \mu^2 - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2a_v \mu)},$$

$$A_1 = -\frac{2(\mu - \nu)}{I_E - \mu^2 - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2\mu a_v)},$$

$$A_{31} = -\frac{2(\mu - \nu)t_1(1 - B_0 + 2t_1(1 - B_1))}{(t_1 - t_2)(I_E - \mu^2 - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2\mu a_v))},$$

$$A_{32} = \frac{2(\mu - \nu)t_2(1 - B_0 + 2t_2(1 - B_1))}{(t_1 - t_2)(I_E - \mu^2 - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2\mu a_v))},$$

$$\tilde{A}_1 = -\frac{2\mu(\mu - \nu)}{I_E - \mu^2 - \kappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2\mu a_v)},$$

$$\tilde{A}_{31} = -\frac{2(\mu - \nu)t_1(\nu - \mu B_0 + t_1(\mu(1 - 2B_1) + \nu))}{(t_1 - t_2)(I_E - \mu^2 - \varkappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2\mu a_v))},$$

$$\tilde{A}_{32} = \frac{2(\mu - \nu)t_2(\nu - \mu B_0 + t_2(\mu(1 - 2B_1) + \nu))}{(t_1 - t_2)(I_E - \mu^2 - \varkappa(I_J l^2/R^2 + 2b_v + 2\mu a_v))},$$

и

$$p_1 = -(\tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex}), \quad q_1 = \tilde{v}_{\varphi 0} \tilde{v}_{\varphi ex},$$

$$p_2 = I_M^* \frac{l^2}{R^2} + \tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex} + 2a_v \varkappa,$$

$$q_2 = -2I_E + I_M^* \left(2 + a_v \varkappa \frac{l^2}{R^2} \right) + 2b_v \varkappa + a_v^2 \varkappa^2 -$$

$$-\tilde{v}_{\varphi 0} \tilde{v}_{\varphi ex} + (\tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex}) \left(I_M^* \frac{l^2}{R^2} + 2a_v \varkappa + \tilde{v}_{\varphi 0} + \tilde{v}_{\varphi ex} \right).$$

Здесь T_b , $\langle v_\varphi \rangle$, μ , ν , C , $m_{1,2}$, I_1 , I_3 определены ранее.

Отметим, что при наличии радиального электрического поля зависимость $\tilde{v}_\varphi(r)$, описываемая (4.29), может быть не монотонной. Если $d\tilde{v}_\varphi/dr^2$ меняет знак где-нибудь на траектории, интегрирование в (4.31), (4.32) уже нельзя провести на всём интервале изменения скорости. Далее мы продемонстрируем, что область параметров с немонотонным поведением $\tilde{v}_\varphi(r)$ весьма мала (см. красный квадрат на рис. 4.20). Это позволяет получить явные выражения для усреднённых величин даже при наличии электрического поля. Описанная техника может быть также использована при неоднородном профиле коэффициента запаса устойчивости $q(r)$. Единственным требуемым условием остаётся монотонность $\tilde{v}_\varphi$ на половине траектории.

Проиллюстрируем полученные результаты. Для их верификации также проведём прямое численное интегрирование уравнений движения заряженной частицы в стационарном поле токамака.

Зависимость баунс-периода T_b от начальной тороидальной скорости представлена на рис. 4.18. Точность полученного выражения для T_b (4.33) легко оценить путём сравнения представленных аналитических результатов (сплошные линии) с результатами численного расчёта T_b (кружки). Область, соответствующая запертым частицам на рис. 4.18 и последующих рисунках, показана серой заливкой. Красной линией показана величина T_b , рассчитанная по скейлингу из

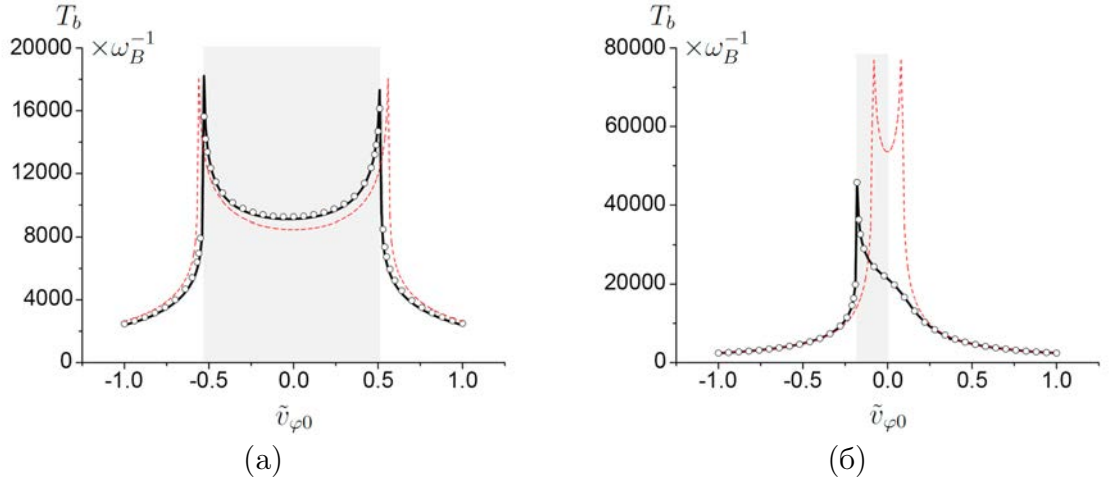


Рис. 4.18: Зависимость T_b от $\tilde{v}_{\varphi 0}$ для частиц, стартующих при (а) $r/a = 0,8$, $\cos \theta = 1$, и (б) $r/a = 0,02$, $\cos \theta = 1$. Кружки показывают результаты численного расчёта; толстая сплошная линии – расчёты по (4.33); тонкая красная пунктирная линия – T_b по скейлингу из [354]. Область запертых частиц выделена серым цветом.

работы [354] как для пролётных, так и для запертых частиц²⁰. Мы сравниваем полученные результаты именно с [354], поскольку выражения для T_b и $\langle v_\varphi \rangle$, полученные в более поздних работах, например в [361], весьма схожи с [354]. При выводе (4.33) не делалось предположений о малости отклонения траекторий частиц от магнитных поверхностей, поэтому полученные результаты справедливы не только для периферии плазмы (рис. 4.18а), но также и для её центра (рис. 4.18б). Результаты [354] хорошо работают только на периферии плазменного шнура. При этом они совершенно не учитывают эффект асимметрии границы в фазовом пространстве между запертыми и пролётными частицами, характерный для траекторий заряженных частиц вблизи магнитной оси токамака [358, 362]; ранее движение заряженных частиц вблизи центра плазменного шнура исследовалось, например, в [363–365].

В приближении малого отклонения дрейфовых траекторий заряженных частиц от стартовых магнитных поверхностей усреднённая по времени тороидальная скорость сильно пролётной частицы может быть описана упрощённым выражением [100]:

$$\langle v_\varphi \rangle = v_{\varphi 0} \left(1 + \frac{r_0}{R_0} \cos \theta_0 \right) - \sigma \varepsilon_{dr} \cos \theta_0 \frac{\omega_B r_0^2}{q R_0} -$$

²⁰Отметим, что в [354] есть опечатка. Выражение для T_b пролётных частиц должно выглядеть следующим образом: $T_{b\,pas} = 4R_0 q K(\sqrt{2r_0/R_0}/\tilde{v}_{\varphi 0})/v_{\varphi 0}$, где K – полный эллиптический интеграл первого рода.

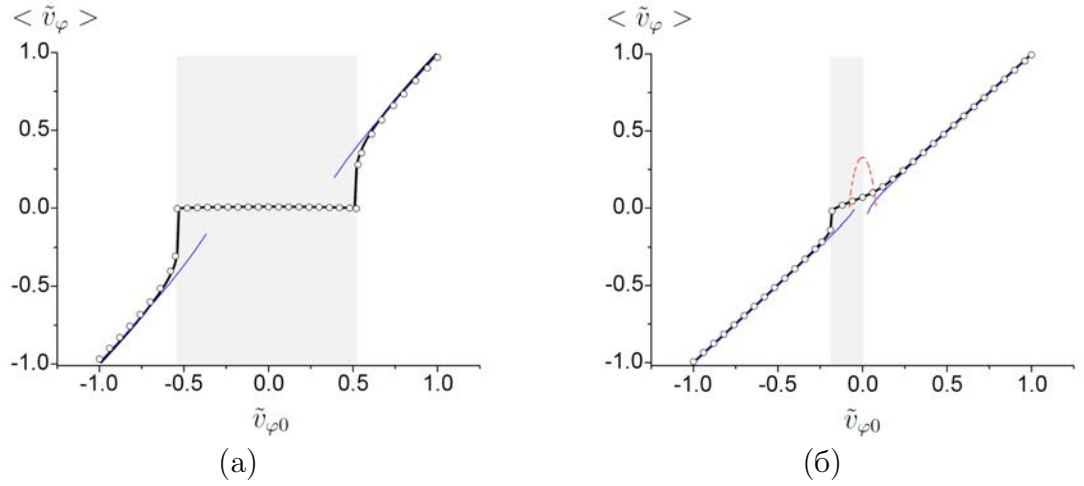


Рис. 4.19: Зависимость $\langle \tilde{v}_\varphi \rangle$ от $\tilde{v}_{\varphi 0}$ для частиц, стартующих при (а) $r/a = 0,8$, $\cos \theta = 1$, и (б) $r/a = 0,02$, $\cos \theta = 1$. Кружки показывают результаты численного расчёта; толстая сплошная линия – расчёты по (4.34); тонкая синяя линия соответствует (4.43); тонкая красная пунктирная линия – $\langle \tilde{v}_\varphi \rangle$ по формуле из [354]. Область запертых частиц выделена серым цветом.

$$-\varepsilon_{dr}\varepsilon_E \cos \theta_0 \frac{\omega_B r_0^2}{qR_0}. \quad (4.43)$$

Здесь введены считающиеся малыми параметры $\varepsilon_{dr} = V_{dr}qR_0/r_0|v_{\varphi 0}|$ и $\varepsilon_E = V_{E\theta}qR_0/r_0|v_{\varphi 0}|$, $V_{dr} = (v_\perp^2/2 + v_\parallel^2)/\omega_B R_0$ – скорость тороидального дрейфа. Первое слагаемое в (4.43) соответствует движению частицы вдоль магнитного поля, второй член связан с действием тороидального дрейфа, и третий член – с электрическим полем – есть интересное нас слагаемое, ответственное за тороидальную прецессию в электрическом поле.

На рис. 4.19 представлены зависимости средней тороидальной скорости $\langle v_\varphi \rangle$, рассчитанная по (4.43) для пролётных частиц (тонкие синие линии), $\langle v_\varphi \rangle$, рассчитанной с помощью универсального выражения (4.34) для запертых и пролётных частиц (толстые линии), и результаты численного расчёта (кружки). Видно прекрасное соответствие между полученным аналитическим выражением (4.34) и численными решениями как на периферии (рис. 4.19а), так и в центре плазмы токамака (рис. 4.19б). Выражение (4.43), полученное для пролётных частиц, так же работает хорошо, но не описывает частицы с питч-углами вблизи границы перехода между запертыми и пролётными частицами. Ни эта граница, ни величина $\langle v_\varphi \rangle$ вблизи центра плазмы не описываются выражением из [354]. Добавка к $\langle v_\varphi \rangle$, полученная в [356], также относится только к частицам на пе-

риферии плазменного шнура. Отметим, что на магнитной оси ($r = 0$) выражения для T_b и $\langle v_\varphi \rangle$, полученные в [354] и [356], вообще не определены, в то время как разработанный подход работает непосредственно на магнитной оси.

Для исследования влияния радиального электрического поля на среднюю тороидальную скорость частиц в токамаке рассчитаем разницу между средней тороидальной скоростью частицы при наличии электрического поля и в отсутствие электрического поля, $\Delta V = \langle v_\varphi \rangle_{E \neq 0} - \langle v_\varphi \rangle_{E=0}$, оставляя все остальные параметры траектории частицы неизменными. Из упрощённого выражения (4.43), в частности, следует, что для сильно пролётных частиц

$$\Delta V_{pas} \approx -\varepsilon_E \varepsilon_{dr} \cos \theta_0 \frac{\omega_B r_0^2}{q R_0} = -\frac{V_{E\theta} q \cos \theta_0}{2} \left(1 + \frac{v_0^2}{v_{\varphi 0}^2} \right). \quad (4.44)$$

Рисунок 4.20 демонстрирует зависимость $\Delta V/v_0$ от косинуса начального питч-угла для частиц, стартующих со стороны слабого магнитного поля токамака (рис. 4.20а), и для частиц, стартующих со стороны сильного поля (рис. 4.20б). На рис. 4.20 толстые кривые соответствуют полученному аналитическому выражению для ΔV (4.40), основанному на линейной аппроксимации для $r^2(\tilde{v}_\varphi)$, а тонкие голубые линии – выражению (4.44). Полученные аналитические результаты совпадают с результатами численного расчёта, представленными кружками.

Область, выделенная серым цветом в центре рис. 4.20а, соответствует запертым частицам. Как и ожидалось [330, 356], их средняя тороидальная скорость, связанная с электрическим полем, приблизительно описывается выражением для скорости электрического дрейфа, рассчитанной по полоидальному магнитному полю, $\mathbf{V}_E^*$. Отрицательный знак ΔV означает, что вращение происходит в направлении противоположном основному току. Область больших абсолютных значений питч-углов на рис. 4.20а и весь рисунок 4.20б соответствуют пролётным частицам (почти все частицы, стартующие со стороны сильного магнитного поля в токамаке, являются пролётными). Видно, что $|\Delta V_{pas}|$ значительно меньше $|V_E^*|$ и имеет разный знак для частиц, стартующих с разных обводов тора (со стороны слабого и сильного магнитного поля – сравни рис. 4.20а и рис. 4.20б).

Полоидальная асимметрия макроскопической скорости тороидального вращения заряженных частиц в токамаке с радиальным

электрическим полем (рис. 4.16), таким образом, объясняется наличием большой группы пролётных частиц, скорость тороидальной прецессии которых разнонаправлена на внутренней и внешней сторонах тора.

4.3.3 К вопросу о возможности спонтанной генерации вращения и его асимметрии

Выполненный анализ разъясняет механизм самогенерации потоков плазмы в результате бесстолкновительной эволюции первоначально изотропного (максвелловского) ансамбля частиц в электромагнитной конфигурации токамака. Показано, что тороидальная скорость вращения частиц плазмы в радиальном электрическом поле зависит от полоидального угла на магнитной поверхности и даже имеет разный знак на сторонах сильного и слабого магнитного поля. Подобная полоидальная асимметрия тороидального вращения плазмы напрямую наблюдается в экспериментах на токамаках посредством рекомбинационной спектроскопии и служит основой непрямого метода измерения скорости полоидального вращения плазмы [94].

Эффект полоидальной асимметрии вращения объяснён путём анализа движения отдельных частиц. Радиальное электрическое поле токамака воздействует на вращение частиц плазмы весьма интересным образом. На временах порядка нескольких циклотрон-

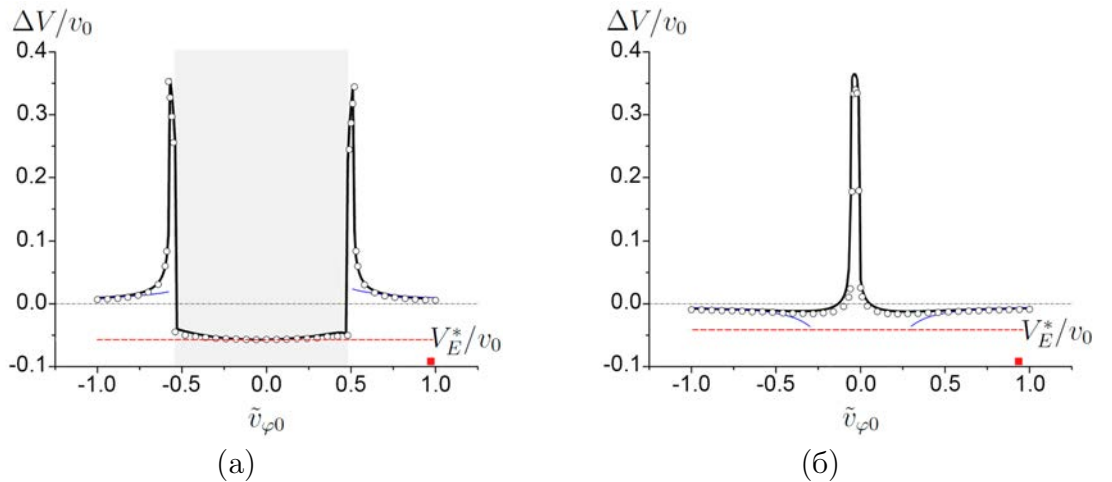


Рис. 4.20: Зависимость $\Delta V/v_0$ от $\tilde{v}_{\phi 0}$ для частиц, стартующих при (а) $r/a = 0,8, \cos \theta = 1$, и (б) $r/a = 0,8, \cos \theta = -1$. Кружки показывают результаты численного расчёта; толстые сплошные линии соответствуют расчётам $\Delta V/v_0$ по (4.40); тонкая синяя линия соответствует (4.44); тонкая красная пунктирная линия демонстрирует V_E^*/v_0 . Область запертых частиц выделена серым цветом.

ных периодов роль радиального электрического поля в движении как запертых, так и пролётных частиц сводится к обычному $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ -дрейфу в направлении поперёк магнитной силовой линии (в основном в полоидальном направлении). Однако, на временных интервалах порядка нескольких баунс-периодов интегральный вклад радиального электрического поля в тороидальное вращение запертых и пролётных частиц оказывается существенно различным. Для запертых частиц индуцированная скорость тороидальной прецессии описывается выражением для скорости электрического дрейфа в полоидальном магнитном поле, $\Delta V_{tr} \approx V_E^* = -cE_r/B_\theta$; для пролётных частиц $\Delta V_{pas} \approx -cq \cos \theta_0 E_r/B_\varphi$, что существенно ниже V_E^* по абсолютной величине; при этом прецессия направлена в разные стороны для частиц, стартующих со стороны сильного и слабого магнитного поля токамака.

4.4 Резюме главы 4

Исследованы особенности протекания и генерации направленных потоков заряженных частиц плазмы в магнитном поле, связанные с наличием электрического поля в лабораторных плазмодинамических системах. Показано, что даже дрейфовое движение нерелятивистской заряженной частицы в скрещенных медленно меняющихся электрическом и магнитном полях с сильной электрической компонентой отличается от предсказаний классической дрейфовой теории и имеет специфические составляющие, вклад которых в итоговое движение может быть весьма значителен. Дополнительные дрейфы вызваны неоднородностью поля в направлении $\mathbf{B}$ и $\mathbf{V}_E$ и их учёт важен, если скорость $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа сопоставима с полной скоростью частицы. Принципиально важна их зависимость от заряда и массы заряженных частиц, благодаря чему они способны вносить вклад в генерацию тока в плазме, как и известный поляризационный ток. Ещё одной особенностью движения в сильном электрическом поле является наличие компоненты дрейфовой скорости вдоль электрического поля $\mathbf{E}_\perp$. Такое смещение, в свою очередь, приводит к изменению кинетической энергии частицы, т. к. $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_\perp \neq 0$.

Показано, что в магнитной конфигурации токамака действие радиального электрического поля значительно различно для пролётных и запертых частиц. Скорость тороидального вращения пролётных частиц, индуцированная электрическим полем, существенно ниже тра-

диционной оценки этой величины как скорости электрического дрейфа в полоидальном магнитном поле, и может иметь разный знак в зависимости от положения частицы на магнитной поверхности. Впервые разработан аналитический подход, который позволяет с высокой точностью рассчитать период и среднюю скорость тороидального вращения частиц в токамаке. Он универсален: применим как для запертых, так и для пролётных частиц, и одинаково хорошо работает во всём объёме плазменного шнура, включая область вблизи магнитной оси.

Показано, что характер движения электронов в конфигурации стационарного плазменного двигателя критически зависит от положения точки старта вдоль оси ускоряющего канала. Если в прикатодной области движение электронов является регулярным, то при приближении к аноду наблюдается выраженная эргодизация их траекторий, сопровождающаяся значительным увеличением переноса частиц вдоль оси двигателя. Обнаруженная эргодизация траекторий может служить механизмом аномальной проводимости электронов в прианодной части СПД.

Заключение

В диссертации исследовано влияние электрического поля на динамику плазменных потоков в замагниченной и частично замагниченной плазме в условиях, характерных для лабораторных систем магнитного удержания плазмы типа токамак и холловских ускорителей плазмы. Для анализа колебаний в таких системах хорошим инструментом служит модель магнитной гидродинамики. Осесимметричное равновесное состояние плазмы в рамках МГД-модели описывается посредством уравнения Грэда-Шафранова или его аналогов, учитывающих наличие стационарных течений плазмы, анизотропию давления, двухжидкостность и др. Это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных позволяет определить функцию полоидального магнитного потока Ψ при некоторых заданных “поверхностных” функциях $p(\Psi)$, $F(\Psi)$ и др. Отсутствие осевой симметрии приводит к “отмораживанию” от магнитной поверхности функции F , характеризующей тороидальную компоненту магнитного поля, $F \neq F(\Psi)$. В этом случае равновесное состояние плазмы удаётся описать системой из трёх зацепленных дифференциальных уравнений: аналога УГШ (1.11) и двух МДУ (1.12), (1.13). С использованием этого подхода впервые построены примеры невырожденных равновесий, имеющих структуру вложенных магнитных поверхностей во всём объёме плазмы в отсутствие осевой симметрии.

Динамика низкочастотных волн в токамаке исследована с помощью редуцированных МГД-моделей, позволяющих исключить из рассмотрения возмущения типа быстрого магнитного звука при анализе крупномасштабных шировых течений. Тороидальное вращение плазмы приводит к её полоидальной стратификации на магнитных поверхностях, в результате чего в токамаке формируются две ветви зональных течений: высокочастотные ГАМ и низкочастотные ЗТ. Высокочастотная ветвь всегда устойчива, а динамика низкочастотной ветви определяется типом исследуемого равновесия плазмы. Тороидальное зацепление альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн приводит к появлению “зазоров” в спектре локализованных колебаний, в которых возможно существование глобальных собственных мод. Показано, что как ГАМ, так и ЗТ могут иметь характер глобальных мод. Первый тип собственных мод определяется значе-

ниями равновесных параметров в центре плазменного шнура. Глобальные ЗТ локализованы преимущественно на периферии плазмы. Их линейная неустойчивость является возможным механизмом генерации дифференциального вращения. Нелинейное взаимодействие ГАМ и ЗТ приводит к формированию комплексной структуры спектра ГАМ, содержащей гармоник на сумме и разности частот ГАМ и ЗТ.

Для описания градиентно-дрейфовых волн в холловской плазме использована двухжидкостная МГД-модель, включающая эффекты теплового движения электронов посредством тензора бесстолкновительной вязкости. Это позволило исследовать возмущения с произвольной длиной волны в рамках единого подхода. Общий закон дисперсии (3.4) описывает электростатические возмущения плазмы в нижнегибридном диапазоне частот $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$, распространяющиеся строго поперёк внешнего магнитного поля в холловской плазме. На его основе выполнен анализ устойчивости ускоряющего канала СПД по отношению к малым возмущениям электрического потенциала плазмы. Показано, что в ускоряющем канале возбуждается широкий спектр колебаний от относительно низкочастотных ($f \sim 100$ кГц) длинноволновых азимутальных мод вблизи анода до высокочастотных ($f \sim 10$ МГц) коротковолновых аксиальных колебаний у выхода из канала. Предложен механизм формирования крупномасштабных азимутальных структур типа спиц в холловской плазме, основанный на биениях между собственными модами, формирующимися на линейной стадии развития градиентно-дрейфовой неустойчивости.

Исследовано влияние электрического поля на перенос частиц в лабораторной плазме. Показано, что в неоднородной плазме роль электрического поля существенным образом не сводится к генерации течений со скоростью $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа. В токамаке наличие радиального электрического поля приводит к тороидальному вращению заряженных частиц, скорость которого принципиально различна для запертых и пролётных частиц. На макроскопическом уровне это приводит к генерации течений сложной структуры, направленных в разные стороны на внутреннем и внешнем обводах тора. В конфигурации СПД значительные неоднородности электрического и магнитного полей приводят к стохастизации траекторий электронов в прианодной части двигателя. Нерегулярность движения электронов сопровождается усиленным переносом вдоль оси ускоряющего канала, что

служит объяснением их аномальной подвижности, регистрируемой в холловских разрядах.

Расширение понимания физики и основанных на нём возможностей предсказательного управления и контроля крупномасштабных колебаний и макроскопического движения компонент плазмы в различных лабораторных системах, включая установки термоядерного синтеза, а также плазмотехнологические устройства и стенды, представляется значимой и актуальной задачей современной плазменной науки. Автор надеется, что изложенный в данной диссертации материал в какой-то мере способствует её решению.

В заключение я выражаю самую большую и искреннюю благодарность В.И. Ильгисонису за многолетнее и плодотворное сотрудничество. Я благодарю своих соавторов, Э.И. Юрченко, В.П. Лахина, А.И. Смолякова, В.В. Андреева, Н.А. Марусова, И.В. Хальзова, а также коллег из Отдела теории плазмы, Ю.В. Мартыненко, Ю.В. Готта, В.П. Пастухова, М.И. Михайлова, за прекрасные моменты совместной работы, плодотворный обмен идеями и обсуждение результатов, без которых данный труд никогда бы не был написан. Выражаю благодарность всему коллективу бывшего Института ядерного синтеза НИЦ “Курчатовский институт”, в чьих стенах были получены основные результаты, вошедшие в диссертацию.

Литература

- [1] de Grassie J. S. Tokamak rotation sources, transport and sinks // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2009. – V. 51. – 124047.
- [2] Ida K., Rice J. E. Rotation and momentum transport in tokamaks and helical systems // Nucl. Fusion. – 2014. – V. 54. – 045001.
- [3] Rice J. E. Experimental observations of driven and intrinsic rotation in tokamak plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2016. – V. 58. – 083001.
- [4] Rice J. E., Ince-Cushman A., de Grassie J. S., et al. Inter-machine comparison of intrinsic toroidal rotation in tokamaks // Nucl. Fusion. – 2007. – V. 47. – P. 1618–1624.
- [5] Parra F. I., Barnes M. Intrinsic rotation in tokamaks: Theory // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2015. – V. 57. – 045002.
- [6] Wagner F., Becker G., Behringer K., et al. Regime of improved confinement and high beta in neutral-beam-heated divertor discharges of the ASDEX tokamak // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 49. – P. 1408–1412.
- [7] ASDEX Team. The H -mode of ASDEX // Nucl. Fusion. – 1989. – V. 29. – P. 1959–2040.
- [8] Wagner F., Baldzuhn J., Brakel R., et al. H -mode of W7-AS stellarator // Plasma Phys. Control. Fusion. – 1994. – V. 36. – P. A61–A74.
- [9] Wolf R. C. Internal transport barriers in tokamak plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2003. – V. 45. – P. R1–R91.
- [10] Stroth U., Itoh K., Itoh S. -I., et al. Internal transport barrier triggered by neoclassical transport in W7-AS // Phys. Rev. Lett. – 2001. – V. 86. – P. 5910–5913.
- [11] Shaing K. C., Crume E. C., Jr. Bifurcation theory of poloidal rotation in tokamaks: A model for the $L - H$ transition // Phys. Rev. Lett. – 1989. – V. 63. – P. 2369–2372.

- [12] Groebner R. J., Burrell K. H., Seraydarian R. P. Role of edge electric field and poloidal rotation in the $L - H$ transition // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 64. – P. 3015–3018.
- [13] Ida K., Hidekuma S., Miura Y., et al. Edge electric-field profiles of H -mode plasmas in the JFT-2M tokamak // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 65. – P. 1364–1367.
- [14] Synakowski E. J. Formation and structure of internal and edge transport barriers // Plasma Phys. Control. Fusion. – 1998. – V. 40. – P. 581–596.
- [15] Diamond P. H., Itoh S. I., Itoh K., Hahm T. S. Zonal flows in plasma – a review // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2005. – V. 47. – P. R35–R161.
- [16] Fujisawa A. Experimental studies of mesoscale structure and its interactions with microscale waves in plasma turbulence // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2011. – V. 53. – 124015.
- [17] Fujisawa A. A review of zonal flow experiments // Nucl. Fusion. – 2009. – V. 49. – 013001.
- [18] Conway G. D., Smolyakov A. I., Ido T. Geodesic acoustic modes in magnetic confinement devices // Nucl. Fusion. – 2022. – V. 62. – 013001.
- [19] Biglari H., Diamond P. H. Influence of sheared poloidal rotation on edge turbulence // Phys. Fluids B. – 1990. – V. 2. – P. 1–4.
- [20] Hahm T. S. Rotation shear induced fluctuation decorrelation in a toroidal plasma // Phys. Plasmas. – 1994. – V. 1. – P. 2940–2944.
- [21] Burrell K. H. Effects of $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices // Phys. Plasmas. – 1997. – V. 4. – P. 1499–1518.
- [22] Terry P. W. Suppression of turbulence and transport by sheared flow // Rev. Mod. Phys. – 2000. – V. 72. – P. 109–165.
- [23] Ido T., Miura Y., Hoshino K., et al. Observation of the interaction between the geodesic acoustic mode and ambient fluctuation in the JFT-2M tokamak // Nucl. Fusion. – 2006. – V. 46. – P. 512–520.

- [24] Holland C., Tynan G. R., Fonck R. J., et al. Zonal-flow-driven non-linear energy transfer in experiment and simulation // Phys. Plasmas. – 2007. – V. 14. – 056112.
- [25] Lan T., Liu A. D., Yu C. X., et al. Spectral features of the geodesic acoustic mode and its interaction with turbulence in a tokamak plasma // Phys. Plasmas. – 2008. – V. 15. – 056105.
- [26] Zhao K. J., Dong J. Q., Yan L. W., et al. Turbulence and zonal flows in edge plasmas of the HL-2A tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2010. – V. 52. – 124008.
- [27] Gurchenko A. D., Gusakov E. Z., Niskala P., et al. Turbulence and anomalous tokamak transport control by geodesic acoustic mode // EPL. – 2015. – V. 110. – 55001.
- [28] Gurchenko A. D., Gusakov E. Z., Niskala P., et al. The isotope effect in turbulent transport control by GAMs. Observation and gyrokinetic modeling // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2016. – V. 58. – 044002.
- [29] Garofalo A. M., Turnbull A. D., Austin M. E., et al. Direct observation of the resistive wall mode in a tokamak and its interaction with plasma rotation // Phys. Rev. Lett. – 1999. – V. 82. – P. 3811–3814.
- [30] Zheng L. -J., Kotschenreuther M., Chu M. S. Rotational stabilization of resistive wall modes by the shear Alfvén resonance // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95. – 255003.
- [31] Chu M. S., Okabayashi M. Stabilization of the external kink and the resistive wall mode // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2010. – V. 52. – 123001.
- [32] La Haye R. J., Brennan D. P., Buttery R. J., Gerhardt S. P. Islands in the stream: The effect of plasma flow on tearing stability // Phys. Plasmas. – 2010. – V. 17. – 056110.
- [33] Бехтенов А. А., Волосов В. И. О некоторых особенностях желобковых колебаний в открытой ловушке с радиальным электрическим полем // ЖТФ. – 1977. – Т. 47. – С. 1450–1460.
- [34] Hameiri E. Shear stabilization of the Rayleigh-Taylor modes // Phys. Fluids. – 1979. – V. 22. – P. 89–98.

- [35] Сорокина Е. А. Глобальные моды желобковой неустойчивости вращающейся цилиндрической плазмы // Физика плазмы. – 2009. – Т. 35. – С. 472–481.
- [36] Lehnert B. Rotating plasmas // Nucl. Fusion. – 1971. – V. 11. – P. 485–533.
- [37] Garbet X., Fenzi C., Capes H., et al. Kelvin-Helmholtz instabilities in tokamak edge plasmas // Phys. Plasmas. – 1999. – V. 6. – P. 3955–3965.
- [38] Schwander F., Chiavassa G., Ciraolo G., et al. Parallel shear flow instability in the tokamak edge // J. Nucl. Mat. – 2011. – V. 415. – P. S601–S604.
- [39] Есипчук Ю. В., Морозов А. И., Тилинин Г. Н., Трофимов А. В. Основные свойства плазменных колебаний в ускорителе с замкнутым дрейфом и протяжённой зоной ускорения (УЗДП) // ЖТФ. – 1973. – Т. 43. – С. 1466–1473.
- [40] Chesta E., Lam C., Meezan N., et al. A characterization of plasma fluctuations within a Hall discharge // IEEE Trans. Plasma Sci. – 2001. – V. 29. – P. 582–591.
- [41] Sekerak M. J., Longmier B. W., Gallimore A. D., et al. Azimuthal spoke propagation in Hall effect thrusters // IEEE Trans. Plasma Sci. – 2015. – V. 43. – P. 72–85.
- [42] Désangles V., Shcherbanev S., Charoy T., et al. Fast camera analysis of plasma instabilities in Hall effect thrusters using a POD method under different operating regimes // Atmosphere. – 2020. – V. 11. – 518.
- [43] Koshkarov O., Smolyakov A., Raitses Y., Kaganovich I. Self-organization, structures, and anomalous transport in turbulent partially magnetized plasmas with crossed electric and magnetic fields // Phys. Rev. Lett. – 2019. – V. 122. – 185001.
- [44] Parker J. B., Raitses Y., Fisch N. J. Transition in electron transport in a cylindrical Hall thruster // Appl. Phys. Lett. – 2010. – V. 97. – 091501.

- [45] McDonald M. S., Gallimore A. D. Parametric investigation of the rotating spoke instability in Hall thrusters // Proc. 32nd Int. Electric Propulsion Conf., Wiesbaden, Germany, 2011, IEPC-2011-242.
- [46] Ellison C. L., Raites Y., Fisch N. J. Cross-field electron transport induced by a rotating spoke in a cylindrical Hall thruster // Phys. Plasmas. – 2012. – V. 19. – 013503.
- [47] Thomassen K. I. Turbulent diffusion in a Penning-type discharge // Phys. Fluids. – 1966. – V. 9. – P. 1836–1842.
- [48] Anders A., Ni P., Rauch A. Drifting localization of ionization runaway: Unraveling of the nature of anomalous transport in high power impulse magnetron sputtering // J. Appl. Phys. – 2012. – V. 111. – 053304.
- [49] Brenning N., Lundin D., Minea T., et al. Spokes and charged particle transport in HiPIMS magnetrons // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2013. – V. 46. – 084005.
- [50] Hecimovic A., von Keudell A. Spokes in high power impulse magnetron sputtering plasmas // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2018. – V. 51. – 453001.
- [51] Russell D. A., D'Ippolito D. A., Myra J. R., et al. Blob dynamics in 3D BOUT simulations of tokamak edge turbulence // Phys. Rev. Lett. – 2004. – V. 93. – 265001.
- [52] Pigarov A. Yu., Krasheninnikov S. I., Rognlien T. D. Time-dependent 2-D modeling of edge plasma transport with high intermittency due to blobs // Phys. Plasmas. – 2012. – V. 19. – 072516.
- [53] Boeuf J., Garrigues L. Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster // J. Appl. Phys. – 1998. – V. 84. – P. 3541–3554.
- [54] Barral S., Ahedo E. Low-frequency model of breathing oscillations in Hall discharges // Phys. Rev. E. – 2009. – V. 79. – 046401.
- [55] Alfvén H. On the origin of the solar system // Oxford: Clarendon Press, 1954, 194 p.
- [56] Janes G. S., Lowder R. S. Anomalous electron diffusion and ion acceleration in a low-density plasma // Phys. Fluids. – 1966. – V. 9. – P. 1115–1123.

- [57] Piel A. Review of laboratory experiments on Alfvén's critical ionization velocity // Adv. Space Res. – 1990. – V. 9. – P. 7–16.
- [58] Boeuf J.P. Rotating instability in low-temperature magnetized plasmas // Phys. Rev. Lett. – 2013. – V. 111. – 155005.
- [59] Kapulkin A., Behar E. Ion beam instability in Hall thrusters // IEEE Trans. Plasma Sci. – 2015. – V. 43. – P. 64–71.
- [60] Tsikata S., Cavalier J., Héron A., et al. An axially propagating two-stream instability in the Hall thruster plasma // Phys. Plasmas. – 2014. – V. 21. – 072116.
- [61] Cavalier J., Lemoine N., Bonhomme G., et al. Hall thruster plasma fluctuations identified as the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ electron drift instability: Modeling and fitting on experimental data // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – 082107.
- [62] Héron A., Adam J.C. Anomalous conductivity in Hall thrusters: Effects of the non-linear coupling of the electron-cyclotron drift instability with secondary electron emission of the walls // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – 082313.
- [63] Koshkarov O., Smolyakov A.I., Kaganovich I.D., Ilgisonis V.I. Ion sound instability driven by the ion flows // Phys. Plasmas. – 2015. – V. 22. – 052113.
- [64] Simon A. Instability of a partially ionized plasma in crossed electric and magnetic fields // Phys. Fluids. – 1963. – V. 6. – P. 382–388.
- [65] Hoh F.C. Instability of Penning type discharges // Phys. Fluids. – 1963. – V. 6. – P. 1184–1191.
- [66] Sakawa Y., Joshi C., Kaw P.K., et al. Excitation of the modified Simon-Hoh instability in an electron beam produced plasma // Phys. Fluids B. – 1993. – V. 5. – P. 1681–1694.
- [67] Hargreaves J.K. The Solar-Terrestrial environment // Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 436 p.
- [68] Grad H. Theory and applications of the nonexistence of simple toroidal plasma equilibrium // Int. J. Fus. En. – 1985. – V. 3. – P. 33–46.

- [69] Boozer A. H. Plasma equilibrium with rational magnetic surfaces // Phys. Fluids. – 1981. – V. 24. – P. 1999–2003.
- [70] Kaiser R. On three-dimensional toroidal surface current equilibria with rational rotational transform // Phys. Plasmas. – 1994. – V. 1. – P. 2693–2699.
- [71] Tessarotto M., Johnson J. L., White R. B., Zheng L.-J. On the existence of weakly non-axisymmetric scalar-pressure magnetostatic equilibria // Phys. Lett. A. – 1996. – V. 218. – P. 304–311.
- [72] Weitzner H. Ideal magnetohydrodynamic equilibrium in a non-symmetric topological torus // Phys. Plasmas. – 2014. – V. 21. – 022515.
- [73] Ido T., Miura Y., Kamiya K., et al. Geodesic-acoustic-mode in JFT-2M tokamak plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – V. 48. – P. S41–S50.
- [74] Wang G., Peebles W. A., Rhodes T. L., et al. Multi-field characteristics and eigenmode spatial structure of geodesic acoustic modes in DIII-D *L*-mode plasmas // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – 092501.
- [75] de Meijere C. A., Coda S., Huang Z., et al. Complete multi-field characterization of the geodesic acoustic mode in TCV tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2014. – V. 56. – 072001.
- [76] Мельников А. В., Елисеев Л. Г., Лысенко С. Е. и др. Радиальная однородность геодезических мод в омических разрядах с низким B на токамаке Т-10 // Письма в ЖЭТФ. – 2014. – Т. 100. – С. 633–638.
- [77] Melnikov A. V., Eliseev L. G., Perfilov S. V., et al. The features of the global GAM in OH and ECRH plasmas in the T-10 tokamak // Nucl. Fusion. – 2015. – V. 55. – 063001.
- [78] Coda S., Porkolab M., Burrell K. H. Signature of turbulent zonal flows observed in the DIII-D tokamak // Phys. Rev. Lett. – 2001. – V. 86. – P. 4835–4838.
- [79] Xu G. S., Wan B. N., Song M., Li J. Direct measurement of poloidal long-wavelength $E \times B$ flows in the HT-7 tokamak // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 91. – 125001.

- [80] Nagashima Y., Hoshino K., Ejiri A., et al. Observation of nonlinear coupling between small-poloidal wave-number potential fluctuations and turbulent potential fluctuations in Ohmically heated plasmas in the JFT-2M tokamak // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95. – 095002.
- [81] Liu A.D., Lan T., Yu C.X., et al. Characterizations of low-frequency zonal flow in the edge plasma of the HL-2A tokamak // Phys. Rev. Lett. – 2009. – V. 103. – 095002.
- [82] Conway G.D., Scott B., Schirmer J., et al. Direct measurement of zonal flows and geodesic acoustic mode oscillations in ASDEX Upgrade using Doppler reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2005. – V. 47. – P. 1165–1185.
- [83] McKee G.R., Gupta D.K., Fonck R.J., et al. Structure and scaling properties of the geodesic acoustic mode // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – V. 48. – P. S123–S136.
- [84] Wahlberg C., Graves J.P. Singular global components and frequency shift of the geodesic acoustic continuum modes in shaped tokamaks // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2019. – V. 61. – 075013.
- [85] Chen Z., Ren H. Shaping effects on the geodesic acoustic mode in tokamaks // Nucl. Fusion. – 2023. – V. 63. – 066004.
- [86] Мельников А.В., Вершков В.А., Грашин С.А. и др. Исследование геодезических акустических мод и альвеновских колебаний в тороидальных термоядерных установках (Миниобзор) // Письма в ЖЭТФ. – 2022. – Т. 115. – С. 360–378.
- [87] Hamada Y., Watari T., Nishizawa A., et al. Wavelet and Fourier analysis of zonal flows and density fluctuations in JIPP T-IIU tokamak plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – V. 48. – P. S177–S191.
- [88] Hillesheim J.C., Peebles W.A., Carter T.A., et al. Experimental investigation of geodesic acoustic mode spatial structure, intermittency, and interaction with turbulence in the DIII-D tokamak // Phys. Plasmas – 2012. – V. 12. – 022301.

- [89] Yashin A. Yu., Bulanin V. V., Gusev V. K., et al. Geodesic acoustic mode observations in the Globus-M spherical tokamak // Nucl. Fusion. – 2014. – V. 54. – 114015.
- [90] Bulanin V. V., Askinazi L. G., Belokurov A. A., et al. GAM observation in the TUMAN-3M tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion – 2016. – V. 58. – 045006.
- [91] In Y., Park J.-K., Jeon Y., et al. Enhanced understanding of non-axisymmetric intrinsic and controlled field impacts in tokamaks // Nucl. Fusion. – 2017. – V. 57. – 116054.
- [92] Shinohara K., Kurki-Suonio T., Spong D., et al. Effects of complex symmetry-breakings on alpha particle power loads on first wall structures and equilibrium in ITER // Nucl. Fusion. – 2011. – V. 51. – 063028.
- [93] Tani K., Honda M., Oikawa T., et al. Effects of the radial electric field on the confinement of fast ions in ITER // Nucl. Fusion – 2015. – V. 55. – 053010.
- [94] Bortolon A., Camenen Y., Karpushov A. N., et al. Indirect measurement of poloidal rotation using inboard-outboard asymmetry of toroidal rotation and comparison with neoclassical predictions // Nucl. Fusion. – 2013. – V. 53. – 023002.
- [95] Chew J., Gibbon P., Brömmel D., et al. First principles simulation of early stage plasma initiation process in ITER-scale tokamak // Nucl. Fusion – 2024. – V. 64. – 016003.
- [96] Boeuf J. P., Garrigues L. $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ electron drift instability in Hall thrusters: Particle-in-cell simulations vs. theory // Phys. Plasmas. – 2018. – V. 25. – 061204.
- [97] Charoy T., Boeuf J. P., Bourdon A., et al. 2D axial-azimuthal particle-in-cell benchmark for low-temperature partially magnetized plasmas // Plasma Sources Sci. Technology. – 2019. – V. 28. – 105010.
- [98] Тимофеев А. В. Об одной схеме прямого преобразования тепловой энергии плазмы в электрическую // Физика плазмы. – 1978. – Т. 4. – С. 826–834.

- [99] Hecimovic A., Schulz-von der Gathen V., Böke M. Spoke transitions in HiPIMS discharges // Plasma Sources Sci. Technol. – 2015. – V. 24. – 045005.
- [100] Сорокина Е. А., Ильгисонис В. И. Радиальное электрическое поле и вращение ансамбля частиц плазмы в токамаке // Физика плазмы. – 2012. – Т. 38. – С. 307–317.
- [101] Andreev V.V., Ilgisonis V.I., Sorokina E.A. Passing particle toroidal precession induced by electric field in a tokamak // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – 122502.
- [102] Андреев В. В., Ильгисонис В. И., Сорокина Е. А., Еланцева В. М. KeplerSM // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ # 2013660137. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 25 октября 2013 г.
- [103] Ilgisonis V. I., Lakhin V. P., Sorokina E. A. Global geodesic acoustic mode in a tokamak with positive magnetic shear profile // Proc. 40th EPS Conference on plasma physics, Espoo, Finland, 2013, p. 838–841.
- [104] Ильгисонис В. И., Коновальцева Л. В., Лахин В. П., Сорокина Е. А. Аналитические решения для глобальных геодезических акустических мод в плазме токамака // Физика плазмы. – 2014. – Т. 40. – С. 955–966.
- [105] Ilgisonis V. I., Khalzov I. V., Lakhin V. P., et al. Global geodesic acoustic mode in a tokamak with positive magnetic shear and monotonic temperature profile // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2014. – V. 56. – 035001.
- [106] Лахин В. П., Сорокина Е. А., Ильгисонис В. И., Коновальцева Л. В. МГД-модель низкочастотных волн в токамаке с торoidalным вращением плазмы и проблема существования глобальных геодезических акустических мод // Физика плазмы. – 2015. – Т. 41. – С. 1054–1061.
- [107] Сорокина Е. А., Ильгисонис В. И. GGAMq // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ # 2015614164. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 8 апреля 2015 г.

- [108] Сорокина Е. А., Лахин В. П., Коновальцева Л. В., Ильгисонис В. И. Геодезические-акустические моды в токамаке некруглого сечения // Физика плазмы. – 2017. – Т. 43. – С. 231–240.
- [109] Sorokina E. A., Lakhin V. P., Ilgisonis V. I., Marusov N. A. Fluid theory of gradient-drift instability of partially-magnetized plasmas in $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ fields with finite Larmor radius effects // Proc. 44th EPS Conference on Plasma Physics, Belfast, Northern Ireland, 2017, P1.416.
- [110] Marusov N. A., Sorokina E. A., Lakhin V. P., Ilgisonis V. I. Gradient-drift instability in Hall thrusters based on experimental data // Proc. 44th EPS Conference on Plasma Physics, Belfast, Northern Ireland, 2017, P4.416.
- [111] Сковорода А. А., Сорокина Е. А. Геодезическая акустическая мода в эллиптическом цилиндре // Физика плазмы. – 2018. – Т. 44. – С. 937–946.
- [112] Сорокина Е. А., Подтурова О. И., Коновалов С. В., Коновальцева Л. В. MagIslandTr // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ # 2018613881. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 марта 2018 г.
- [113] Сорокина Е. А., Подтурова О. И., Марусов Н. А. Программа расчёта бесстолкновительной эволюции функции распределения заряженных частиц в магнитном поле токамака “ColDF” // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ # 2018664421. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 ноября 2018 г.
- [114] Marusov N. A., Sorokina E. A., Lakhin V. P., et al. Global modes of gradient drift instability in Hall plasma thruster // Proc. 45th EPS Conference on Plasma Physics, Prague, Czech Republic, 2018, p. 953–956.
- [115] Сорокина Е. А., Марусов Н. А., Лахин В. П., Ильгисонис В. И. Осцилляции разряда в стационарном двигателе А. И. Морозова как проявление крупномасштабных мод градиентно-дрейфовой неустойчивости // Физика плазмы. – 2019. – Т. 45. – С. 3–13.

- [116] Сковорода А. А., Сорокина Е. А., Подтурова О. И. Движение электронов в стационарном плазменном двигателе // Физика плазмы. – 2019. – Т. 45. – С. 927–936.
- [117] Сорокина Е. А., Ильгисонис В. И. Уравнения равновесия плазмы в магнитном поле с трёхмерными магнитными поверхностями // Физика плазмы. – 2019. – Т. 45. – С. 1065–1071.
- [118] Marusov N. A., Sorokina E. A., Lakhin V. P., et al. Gradient-drift instability applied to Hall thrusters // Plasma Sources Sci. Technol. – 2019. – V. 28. – 015002.
- [119] Marusov N. A., Sorokina E. A., Ilgisonis V. I., Lakhin V. P. Large-scale azimuthal structures in Hall-type plasma discharges // Phys. Plasmas. – 2019. – V. 26. – 090701.
- [120] Сорокина Е. А., Марусов Н. А. GSpectrum- $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ # 2019667228. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 декабря 2019 г.
- [121] Marusov N. A., Lakhin V. P., Sorokina E. A., Smolyakov A. I. Global structure of stationary zonal flow in rotating tokamak plasmas // Proc. 46th EPS Conference on Plasma Physics, Milan, Italy, 2019, P4.1039.
- [122] Марусов Н. А., Сорокина Е. А., Ильгисонис В. И. О дрейфовом движении заряженных частиц в неоднородных магнитном и сильном электрическом полях // Физика плазмы. – 2020. – Т. 46. – С. 658–666.
- [123] Ильгисонис В. И., Марусов Н. А., Сорокина Е. А., Лахин В. П. Крупномасштабные колебания в ЭРД холловского типа // Известия РАН. Энергетика. – 2020. – # 5. – С. 66–80.
- [124] Ilgisonis V. I., Sorokina E. A. Compact equations for 3D plasma equilibrium // Proc. 28th IAEA Fusion Energy Conference, virtual event, 2021, 1222.
- [125] Ilgisonis V. I., Lakhin V. P., Marusov N. A., et al. Low-frequency zonal flow eigen-structures in tokamak plasmas // Nucl. Fusion – 2022. – V. 62. – 066002.

- [126] Sorokina E. A., Ilgisonis V. I. 3D tokamak plasma equilibrium with $n = 1$ toroidal asymmetry // Proc. 29th IAEA Fusion Energy Conference, London, UK, 2023, 2422.
- [127] Сорокина Е. А. Трансформация геодезической акустической моды в присутствии низкочастотного зонального течения в плазме токамака // Письма в ЖЭТФ. – 2024. – Т. 120. – С. 667–674.
- [128] Сорокина Е. А. О применимости теории ГАМ к реальным токамакам с гофрированным магнитным полем // Физика плазмы. – 2024. – Т. 50. – С. 1413–1422.
- [129] Sorokina E. A., Ilgisonis V. I. Existence of true plasma equilibria in asymmetric magnetic fields // Phys. Rev. E – 2024. – V. 110. – 065209.
- [130] Sorokina E. A. Tokamak plasma equilibria with $n = 1$ toroidal asymmetry // Phys. Plasmas. – 2024. – V. 31. – 112504.
- [131] Сорокина Е. А. Нелинейная динамика линейно неустойчивых $n = 0$ электростатических возмущений в плазме классического токамака // Физика плазмы. – 2025. – Т. 51. – С. 599–619.
- [132] Сорокина Е. А. “ZonalFlowMode”: программа расчёта нелинейной динамики собственных мод колебаний электрического потенциала в плазме токамака // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ # 2025683254. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02 сентября 2025 г.
- [133] Ilgisonis V. I., Sorokina E. A. Nonlinear self-consistent dynamics of geodesic acoustic modes and zonal flows in toroidally rotating tokamak plasmas // Proc. 30th IAEA Fusion Energy Conference, Chengdu, China, 2025, 3268.
- [134] Sorokina E. A. Theoretical model for the experimentally observed GAM’s satellites // Proc. 30th IAEA Fusion Energy Conference, Chengdu, China, 2025, 3263.
- [135] Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. Равновесие плазмы с током в тороидальных системах // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 11 / Под общей ред. акад. М. А. Леонтовича и Б. Б. Кадомцева. – М.: Энергоиздат, 1982. – С. 118–235.

- [136] Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33. – С. 710-722.
- [137] Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd United Nations Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, United Nations, Geneva, Switzerland, 1958, vol. 31, p. 190–197.
- [138] Ильгисонис В.И., Поздняков Ю.И. Транспортный барьер в плазме токамака как бифуркация равновесия // Физика плазмы. – 2002. – Т. 28. – С. 99–109.
- [139] Hameiri E. The equilibrium and stability of rotating plasmas // Phys. Fluids. – 1983. – V. 26. – P. 230–237.
- [140] Tasso H., Throumoulopoulos G. N. Axisymmetric ideal magnetohydrodynamic equilibria with incompressible flows // Phys. Plasmas. – 1998. – V. 5. – P. 2378–2383.
- [141] Goedbloed J. P., Belien A. J. C., van der Holst B., Keppens R. Unstable continuous spectra of transonic axisymmetric plasmas // Phys. Plasmas. – 2004. – V. 11. – P. 28–54.
- [142] Guazzotto L., Betti R. Magnetohydrodynamics equilibria with toroidal and poloidal flow // Phys. Plasmas. – 2005. – V. 12. – 056107.
- [143] Grad H. Toroidal containment of a plasma // Phys. Fluids. – 1967. – V. 10. – P. 137–154.
- [144] Beskin V. S., Kuznetsova I. V. Grad-Shafranov equation with anisotropic pressure // ApJ. – 2000. – V. 541. – P. 257–260.
- [145] Iacono R., Bondeson A., Troyon F., Gruber A. Axisymmetric toroidal equilibrium with flow and anisotropic pressure // Phys. Fluids B. – 1990. – V. 2. – P. 1794–1803.
- [146] Ilgisonis V. I. Anisotropic plasma with flows in tokamak: Steady state and stability // Phys. Plasmas. – 1996. – V. 3. – P. 4577–4582.
- [147] Ильгисонис В. И. Классические задачи физики горячей плазмы // М.: Издательский дом МЭИ, 2015, 326 с.

- [148] Okamoto I. Magnetic braking by a stellar wind – V. Approximate determination of the poloidal field // MNRAS. – 1975. – V. 173. – P. 357–379.
- [149] Anderson M. Sonic surfaces for adiabatic flow in a stationary axisymmetric spacetime // MNRAS. – 1989. – V. 239. – P. 19–54.
- [150] Steinhauer L. C. Formalism for multi-fluid equilibria with flow // Phys. Plasmas. – 1999. – V. 6. – P. 2734–2741.
- [151] Ilgisonis V. I. Equilibrium of flowing plasma in tokamak in the frame of Hall magnetohydrodynamics // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2001. – V. 43. – P. 1255–1271.
- [152] Thyagaraja A., McClements K. G. Toroidal and poloidal flows in single-fluid and two-fluid tokamak equilibria // Phys. Plasmas. – 2006. – V. 13. – 062502.
- [153] Бескин В. С. Осесимметричные стационарные течения в астрофизике // М.: Физматлит, 2006, 384 с.
- [154] Дегтярёв Л. М., Дроздов В. В., Михайлов М. И. и др. Уравнения трёхмерного равновесия плазмы в потоковых переменных // Физика плазмы. – 1985. – Т. 11. – С. 39–50.
- [155] Грубер Р., Дегтярёв Л. М., Купер А. и др. Трёхмерная модель равновесия плазмы с полоидальным представлением магнитного поля // Физика плазмы. – 1996. – Т. 22. – С. 204–213.
- [156] Greene J. M., Johnson J. L. Stability criterion for arbitrary hydromagnetic equilibria // Phys. Fluids. – 1962. – V. 5. – P. 510–517.
- [157] Hamada S. Hydromagnetic equilibria and their proper coordinates // Nucl. Fusion. – 1962. – V. 2. – P. 23–37.
- [158] Соловьёв Л. С., Шафранов В. Д. Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 5 / Под ред. М. А. Леонтовича. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 3–208.
- [159] Kruskal M. D., Kulsrud R. M. Equilibrium of a magnetically confined plasma in a toroid // Phys. Fluids. – 1958. – V. 1. – P. 265–274.

- [160] Newcomb W.A. Magnetic differential equations // Phys. Fluids. – 1959. – V. 2. – P. 362–365.
- [161] Bhattacharjee A., Hayashi T., Hegna C.C., et al. Theory of pressure-induced islands and self-healing in three-dimensional toroidal magnetohydrodynamic equilibria // Phys. Plasmas. – 1995. – V. 2. – P. 883–888.
- [162] Taylor M. A high performance spectral code for nonlinear MHD stability // J. Comp. Phys. – 1994. – V. 110. – P. 407–418.
- [163] Park J.K., Boozer A.H., Glasser A.H. Computation of three-dimensional tokamak and spherical torus equilibria // Phys. Plasmas. – 2007. – V. 14. – 052110.
- [164] Willensdorfer M., Denk S.S., Strumberger E., et al. Plasma response measurements of external magnetic perturbations using electron cyclotron emission and comparisons to 3D ideal MHD equilibrium // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2016. – V. 58. – 114004.
- [165] Ferraro N.M. Calculations of two-fluid linear response to non-axisymmetric fields in tokamaks // Phys. Plasmas. – 2012. – V. 19. – 056105.
- [166] Bruno O.P., Laurence P. Existence of three-dimensional toroidal MHD equilibria with nonconstant pressure // Commun. Pure Appl. Math. – 1996. – V. 49. – P. 717–764.
- [167] Loizu J., Hudson S.R., Bhattacharjee A., et al. Existence of three-dimensional ideal-magnetohydrodynamic equilibria with current sheets // Phys. Plasmas. – 2015. – V. 22. – 090704.
- [168] Hudson S.R., Dewar R.L., Dennis G., et al. Computation of multi-region relaxed magnetohydrodynamic equilibria // Phys. Plasmas. – 2012. – V. 19. – 112502.
- [169] Hirshman S.P., van Rij W., Merkel P. Three-dimensional free boundary calculations using a spectral Green’s function method // Comput. Phys. Commun. – 1986. – V. 43. – P. 143–155.
- [170] Mikhailov M.I., Nührenberg J., Zille R. Elimination of current sheets at resonances in three-dimensional toroidal ideal-magnetohydrodynamic equilibria // Nucl. Fusion. – 2019. – V. 59. – 066002.

- [171] Dudt D. W., Kolemen E. DESC: A stellarator equilibrium solver // Phys. Plasmas. – 2020. – V. 27. – 102513.
- [172] Галеев А. А., Зелёный Л. М. Модель пересоединения в плоском слое бесстолкновительной плазмы // Письма ЖЭТФ. – 1977. – Т. 25. – С. 407–411.
- [173] Reiman A., Greenside H. Calculation of three-dimensional MHD equilibria with islands and stochastic regions // Comput. Phys. Commun. – 1986. – V. 43. – P. 157–167.
- [174] Suzuki Y. HINT modeling of three-dimensional tokamaks with resonant magnetic perturbation // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2017. – V. 59. – 054008.
- [175] Peraza-Rodriguez H., Reynolds-Barredo J. M., Sanchez R., et al. Extension of the SIESTA MHD equilibrium code to free-plasma-boundary problems // Phys. Plasmas. – 2017. – V. 24. – 082516.
- [176] Turnbull A. D. Plasma response models for non-axisymmetric perturbations // Nucl. Fusion. – 2012. – V. 52. – 054016.
- [177] Reiman A., Ferraro N. M., Turnbull A., et al. Tokamak plasma high field side response to an $n = 3$ magnetic perturbations: a comparison of 3D equilibrium solutions from seven different codes // Nucl. Fusion. – 2015. – V. 55. – 063026.
- [178] Hahm T. S., Kulsrud R. M. Forced magnetic reconnection // Phys. Fluids. – 1985. – V. 28. – P. 2412–2418.
- [179] Rosenbluth M. N., Dagazian R. Y., Rutherford P. H. Nonlinear properties of the internal $m = 1$ kink instability in the cylindrical tokamak // Phys. Fluids. – 1973. – V. 16. – P. 1894–1902.
- [180] Морозов А. И., Соловьёв Л. С. Равновесие плазменного шнура с винтовыми возмущениями // Докл. Акад. наук СССР. – 1964. – Т. 158. – С. 831–834.
- [181] Loizu J., Hudson S. R., Bhattacharjee A., Helander P. Magnetic islands and singular currents at rational surfaces in three-dimensional magnetohydrodynamic equilibria // Phys. Plasmas. – 2015. – V. 22. – 022501.

- [182] Zhou Y., Huang Y.-M., Qin H., Bhattacharjee A. Formation of current singularity in a topologically constrained plasma // Phys. Rev. E. – 2016. – V. 93. – 023205.
- [183] Huang Y.-M., Hudson S. R., Loizu J., et al. Numerical study of δ -function current sheets arising from resonant magnetic perturbations // Phys. Plasmas. – 2022. – V. 29. – 032513.
- [184] Huang Y.-M., Zhou Y., Loizu J., et al. Structure of pressure-gradient-driven current singularity in ideal magnetohydrodynamic equilibrium // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2023. – V. 65. – 034008.
- [185] Loizu J., Hudson S. R., Lazerson S. A., Bhattacharjee A. Pressure-driven amplification and penetration of resonant magnetic perturbations // Phys. Plasmas. – 2016. – V. 23. – 055703.
- [186] Lazerson S. A., Loizu J., Hirshman S., Hudson S. R. Verification of the ideal magnetohydrodynamic response at rational surfaces in the VMEC code // Phys. Plasmas. – 2016. – V. 23. – 012507.
- [187] Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 2 / Под ред. М. А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. – С. 132–176.
- [188] Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 2 / Под ред. М. А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. – С. 92–131.
- [189] Иванов И. В., Сорокина Е. А. Равновесная конфигурация плазмы типа вихря Хилла с тороидальной асимметрией $n = 3$ // Физика плазмы. – 2025. – Т. 51. – С. 821–830.
- [190] Соловьёв Л. С. К теории гидромагнитной устойчивости тороидальных плазменных конфигураций // ЖЭТФ. – 1967. – Т. 53. – С. 626–643.
- [191] Freidberg J. P. Ideal magnetohydrodynamics // NY: Plenum, 1987, 489 p.
- [192] Zheng S. B., Wootton A. J., Solano E. R. Analytical tokamak equilibrium for shaped plasmas // Phys. Plasmas. – 1996. – V. 3. – P. 1176–1178.

- [193] Mc Carthy P. J. Analytical solutions to the Grad-Shafranov equation for tokamak equilibrium with dissimilar source functions // Phys. Plasmas. – 1999. – V. 6. – P. 3554–3560.
- [194] Cerfon A. J., Freidberg J. P. “One size fits all” analytic solutions to the Grad-Shafranov equation // Phys. Plasmas. – 2010. – V. 17. – 032502.
- [195] Eriksson L.-G., Hoang G. T., Bergeaud V. On the role of ion heating in ICRF heated discharges in Tore Supra // Nucl. Fusion. – 2001. – V. 41. – P. 91–97.
- [196] Nave M. F. F., Johnson T., Eriksson L.-G., et al. Influence of magnetic field ripple on the intrinsic rotation of tokamak plasmas // Phys. Rev. Lett. – 2010. – V. 105. – 105005.
- [197] Evans T. E., Fenstermacher M. E., Moyer R. A., et al. RMP ELM suppression in DIII-D plasmas with ITER similar shapes and collisionalities // Nucl. Fusion. – 2008. – V. 48. – 024002.
- [198] Sun Y., Liang Y., Qian J., et al. Modeling of non-axisymmetric magnetic perturbations in tokamaks // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2015. – V. 57. – 045003.
- [199] Hole M. J., Qu Z., Layden B., et al. Bursting toroidal Alfvén eigenmodes in KSTAR plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2019. – V. 61. – 025016.
- [200] Izzo V. A. Runaway electron deconfinement in SPARC and DIII-D by a passive 3D coil // Nucl. Fusion. – 2022. – V. 62. – 096029.
- [201] Gill R. D., Edwards A. W., Pasini D., Weller A. Snake-like density perturbations in JET // Nucl. Fusion. – 1992. – V. 32. – P. 723–735.
- [202] Chapman I. T., Hua M.-D., Pinches S. D., et al. Saturated ideal modes in advanced tokamak regimes in MAST // Nucl. Fusion. – 2010. – V. 50. – 045007.
- [203] Cheng C. Z., Chance M. S. Low- n shear Alfvén spectra in axisymmetric toroidal plasmas // Phys. Fluids. – 1986. – V. 29. – P. 3695–3701.

- [204] Haverkort J. W., de Blank H. J., Koren B. The Brunt-Väisälä frequency of rotating tokamak plasmas // J. Comp. Phys. – 2012. – V. 231. – P. 981–1001.
- [205] Frieman E., Rotenberg M. On hydromagnetic stability of stationary equilibria // Rev. Mod. Phys. – 1960. – V. 32. – P. 898–902.
- [206] Fesenyuk O. P., Kolesnichenko Ya. I., Wobig H., Yakovenko Yu. V. Ideal magnetohydrodynamic equations for low-frequency waves in toroidal plasmas // Phys. Plasmas. – 2002. – V. 9. – P. 1589–1595.
- [207] Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме // М.: Издательство “Наука”, 1976, 240 с.
- [208] Плазменные ускорители / под общей ред. акад. Л. А. Арцимовича // М.: Изд-во “Машиностроение”, 1973, 312 с.
- [209] Lakhin V. P., Ilgisonis V. I., Smolyakov A. I., et al. Effects of finite electron temperature on gradient drift instabilities in partially magnetized plasmas // Phys. Plasmas. – 2018. – V. 25. – 012106.
- [210] Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы // М.: Атомиздат, 1971, 312 с.
- [211] Mikhailovskii A. B., Tsypin V. S. Transport equations of plasma in a curvilinear magnetic field // Beitr. Plasmaphys. – 1984. – V. 24. – P. 335–354.
- [212] Ramos J. J. General expression of the gyroviscous force // Phys. Plasmas. – 2005. – V. 12. – 112301.
- [213] Есипчук Ю. В., Тилинин Г. Н. Дрейфовая неустойчивость плазмы в УЗДП // ЖТФ. – 1976. – Т. 46. – С. 718–729.
- [214] Frias W., Smolyakov A. I., Kaganovich I. D., Raitses Y. Long wavelength gradient drift instability in Hall plasma devices // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – 052108.
- [215] Hofer R., Mikellides I., Katz I., Goebel D. Wall sheath and electron mobility modeling in hybrid-PIC Hall thruster simulations // Proc. 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Cincinnati, USA, 2007, AIAA 2007-5267.

- [216] Kronhaus I., Kapulkin A., Balabanov V., et al. Investigation of physical processes in CAMILA Hall thruster using electrical probes // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2012. – V. 45. – 175203.
- [217] Backstrom B. G. Simple fields of physics by finite element analysis // London: GB Publishing, 2005, 324 p.
- [218] Морозов А. И. Разработка идеологии стационарных плазменных двигателей // Физика плазмы. – 2003. – Т. 29. – С. 261–276.
- [219] Морозов А. И. Введение в плазменную динамику // М.: Физматлит, 2006, 576 с.
- [220] McKee G. R., Fonck R. J., Jakubowski M., et al. Experimental characterization of coherent, radially-sheared zonal flows in the DIII-D tokamak // Phys. Plasmas. – 2003. – V. 10. – P. 1712–1719.
- [221] Melnikov A. V., Vershkov V. A., Eliseev L. G., et al. Investigation of geodesic acoustic mode oscillations in the T-10 tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – V. 48. – P. S87–S109.
- [222] Fujisawa A., Ido T., Shimizu A., et al. Experimental progress on zonal flow physics in toroidal plasmas // Nucl. Fusion. – 2007. – V. 47. – P. S718–S726.
- [223] Conway G. D., Tröster C., Scott B., et al. Frequency scaling and localization of geodesic acoustic modes in ASDEX Upgrade // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2008. – V. 50. – 055009.
- [224] Silva C., Arnoux G., Groth M., et al. Observation of geodesic acoustic modes in the JET edge plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2013. – V. 55. – 025001.
- [225] Krämer-Flecken A., Soldatov S., Koslowski H. R., et al. Properties of geodesic acoustic modes and the relation to density fluctuations // Phys. Rev. Lett. – 2006. – V. 97. – 045006.
- [226] Gurchenko A. D., Gusakov E. Z., Altukhov A. B., et al. Spatial structure of the geodesic acoustic mode in the FT-2 tokamak by upper hybrid resonance Doppler backscattering // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2013. – V. 55. – 085017.

- [227] Winsor N., Johnson J.L., Dawson J.M. Geodesic acoustic waves in hydromagnetic systems // Phys. Fluids. – 1968. – V. 11. – P. 2448–2450.
- [228] Smolyakov A.I., Garbet X., Falchetto G., Ottaviani M. Multiple polarization of geodesic curvature induced modes // Phys. Lett. A. – 2008. – V. 372. – P. 6750–6756.
- [229] Lakhin V.P., Sorokina E.A. Low-frequency magnetohydrodynamic spectra of plasmas with anisotropic pressure in axisymmetric toroidal systems // Phys. Plasmas. – 2018. – V. 25. – 072111.
- [230] Wahlberg C. Geodesic acoustic mode induced by toroidal rotation in tokamaks // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 101. – 115003.
- [231] Wahlberg C. Low-frequency magnetohydrodynamics and geodesic acoustic modes in toroidally rotating tokamak plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2009. – V. 51. – 085006.
- [232] Lakhin V.P., Ilgisonis V.I., Smolyakov A.I. Geodesic acoustic modes and zonal flows in toroidally rotating plasmas // Phys. Lett. A. – 2010. – V. 374. – P. 4872–4875.
- [233] Ilgisonis V.I., Lakhin V.P., Smolyakov A.I., Sorokina E.A. Geodesic acoustic modes and zonal flows in rotating large-aspect-ratio tokamak plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2011. – V. 53. – 065008.
- [234] Lakhin V.P., Ilgisonis V.I. Continuum modes in rotating plasmas: General equations and continuous spectra for large aspect ratio tokamaks // Phys. Plasmas. – 2011. – V. 18. – 092103.
- [235] Fu G.Y. Energetic-particle-induced geodesic acoustic mode // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 101. – 185002.
- [236] Zonca F., Chen L. Radial structures and nonlinear excitation of geodesic acoustic modes // Europhysics Letters. – 2008. – V. 83. – 35001.
- [237] Berk H.L., Zhou T. Fast excitation of EGAM by NBI // Nucl. Fusion. – 2010. – V. 50. – 035007.

- [238] van der Holst B., Beliën A. J. C., Goedbloed J. P. Low frequency Alfvén waves induced by toroidal flows // Phys. Plasmas. – 2000. – V. 7. – P. 4208–4222.
- [239] van der Holst B., Beliën A. J. C., Goedbloed J. P. New Alfvén continuum gaps and global modes induced by toroidal flow // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 84. – P. 2865–2868.
- [240] Wang S. Zonal flows in tokamak plasmas with toroidal rotation // Phys. Rev. Lett. – 2006. – V. 97. – 085002.
- [241] Palermo F., Conway G. D., Poli E., Roach C. M. Modulation behaviour and possible existence criterion of geodesic acoustic modes in tokamak devices // Nucl. Fusion. – 2023. – V. 63. – 066010.
- [242] Kendl A., Scott B. D. Flux-surface shaping effects on tokamak edge turbulence and flows // Phys. Plasmas. – 2006. – V. 13. – 012504.
- [243] Angelino P., Garbet X., Villard L., et al. The role of plasma elongation on the linear damping of zonal flows // Phys. Plasmas. – 2008. – V. 15. – 062306.
- [244] Hager R., Hallatschek K. Geodesic acoustic mode frequencies in experimental tokamak equilibria // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2013. – V. 55. – 035009.
- [245] Gao Z., Wang P., Sanuki H. Plasma shaping effects on the geodesic acoustic mode in toroidally axisymmetric plasmas // Phys. Plasmas. – 2008. – V. 15. – 074502.
- [246] Gao Z., Peng L., Wang P., et al. Plasma elongation effects on temperature gradient driven instabilities and geodesic acoustic modes // Nucl. Fusion. – 2009. – V. 49. – 045014.
- [247] Gao Z. Plasma shaping effects on the geodesic acoustic mode in the large orbit drift width limit // Phys. Plasmas. – 2010. – V. 17. – 092503.
- [248] Wahlberg C., Graves J. P. Magnetohydrodynamic theory of the global structure and magnetic components of the geodesic acoustic continuum modes in tokamaks // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2016. – V. 58. – 075014.

- [249] Буланин В. В., Вагнер Ф., Варфоломеев В. И. и др. Наблюдение геодезических акустических мод в сферическом токамаке Глобус-М // Письма в ЖТФ. – 2014. – Т. 40. – С. 24–31.
- [250] Ishizawa A., Kishimoto Y., Nakamura Y. Multi-scale interactions between turbulence and magnetic islands and parity mixture – a review // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2019. – V. 61. – 054006.
- [251] Fujisawa A., Itoh K., Shimizu A., et al. Spectrograph of electric field fluctuation in toroidal helical plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2006. – V. 48. – P. S31–S39.
- [252] Fujisawa A., Shimizu A., Nakano H., et al. Intermittent characteristics in coupling between turbulence and zonal flows // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2007. – V. 49. – P. 211–217.
- [253] Fujisawa A., Itoh K., Shimizu A., et al. Experimental studies of zonal flow and field in compact helical system plasma // Phys. Plasmas. – 2008. – V. 15. – 055906.
- [254] Watari T., Hamada Y., Fujisawa A., et al. Extension of geodesic acoustic mode theory to helical systems // Phys. Plasmas. – 2005. – V. 12. – 062304.
- [255] Watari T., Hamada Y., Nishizawa A., et al. Zonal flows and geodesic acoustic mode oscillations in tokamaks and helical systems // Plasma Sci. Technol. – 2006. – V. 8. – P. 105–109.
- [256] Watari T., Hamada Y., Notake T., et al. Geodesic acoustic mode oscillation in the low frequency range // Phys. Plasmas. – 2006. – V. 13. – 062504.
- [257] Watari T., Hamada Y., Nishizawa A., Todoroki J. Unified linear response function for zonal flows with full finite orbit effects // Phys. Plasmas. – 2007. – V. 14. – 112512.
- [258] Hassam A. B., Drake J. F. Spontaneous poloidal spinup of tokamak plasmas: Reduced equations, physical mechanism, and sonic regimes // Phys. Fluids B. – 1993. – V. 5. – P. 4022–4029.
- [259] Miller R. L., Chu M. S., Greene J. M., et al. Noncircular, finite aspect ratio, local equilibrium model // Phys. Plasmas. – 1998. – V. 5. – P. 973–978.

- [260] Юшманов П. Н. Диффузионные транспортные процессы в токамаках, обусловленные гофрировкой // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 16 / Под. ред. акад. Б. Б. Кадомцева. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – С. 102–208.
- [261] Грибов Ю. В., Цаун С. В., Юшманов П. Н. Гофрировка токамаков // Препринт ИАЭ-3681/7. – 1982. – 47 с.
- [262] Melnikov A. V., Eliseev L. G., Perfilov S. V., et al. Electric potential dynamics in OH and ECRH plasmas in the T-10 tokamak // Nucl. Fusion. – 2013. – V. 53. – 093019.
- [263] Trier E., Eriksson L.-G., Hennequin P., et al. Radial electric field measurement in a tokamak with magnetic field ripple // Nucl. Fusion. – 2008. – V. 48. – 092001.
- [264] Crombé K., Andrew Y., Biewer T. M., et al. Radial electric field in JET advanced tokamak scenarios with toroidal field ripple // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2009. – V. 51. – 055005.
- [265] Fasoli A., Gormenzano C., Berk H. L., et al. Chapter 5: Physics of energetic ions. ITER physics basis // Nucl. Fusion. – 2007. – V. 47. – P. S264–S284.
- [266] Berk H. L., Boswell C. J., Borba D. N., et al. Explanation of the JET $n = 0$ chirping mode // Nucl. Fusion. – 2006. – V. 46. – P. S888–S897.
- [267] Boswell C. J., Berk H. L., Borba D. N., et al. Observation and explanation of the JET $n = 0$ chirping mode // Phys. Lett. A. – 2006. – V. 358. – P. 154–158.
- [268] Polevoi A. R., Medvedev S. Yu., Mukhovatov V. S., et al. ITER confinement and stability modelling // J. Plasma Fusion Res. SERIES. – 2002. – V. 5. – P. 82–87.
- [269] Lakhin V. P., Sorokina E. A. Geodesic acoustic eigenmode for tokamak equilibrium with maximum of local GAM frequency // Phys. Lett. A. – 2014. – V. 378. – P. 535–538.
- [270] Yashin A. Y., Bulanin V. V., Petrov A. V., et al. Multi-diagnostic approach to geodesic acoustic mode study // J. Instrum. – 2015. – V. 10. – P10023.

- [271] Bulanin V. V., Gusev V. K., Iblyaminova A. D., et al. Geodesic acoustic mode investigation in the spherical Globus-M tokamak using multi-diagnostic approach // Nucl. Fusion. – 2016. – V. 56. – 016017.
- [272] Seidl J., Krbec J., Hron M., et al. Electromagnetic characteristics of geodesic acoustic mode in the COMPASS tokamak // Nucl. Fusion. – 2017. – V. 57. – 126048.
- [273] Wang M. Y., Zhou C., Liu A. D., et al. Investigation of electromagnetic geodesic acoustic mode in EAST RF-heating plasma // Phys. Plasmas. – 2018. – V. 25. – 102508.
- [274] Hua M-D. Plasma rotation in the MAST and JET tokamaks. PhD thesis. University of London, 2009.
- [275] Ramisch M., Stroth U., Niedner S., Scott B. On the detection of Reynolds stress as a driving and damping mechanism of geodesic acoustic modes and zonal flows // New J. Phys. – 2003. – V. 5. – 12.
- [276] Sasaki M., Itoh K., Ejiri A., Takase Y. Transient excitation of zonal flows by geodesic acoustic modes // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2009. – V. 51. – 085002.
- [277] Qiu Z., Chen L., Zonca F., Chen W. Nonlinear excitation of a geodesic acoustic mode by toroidal Alfvén eigenmodes and the impact on plasma performance // Nucl. Fusion. – 2019. – V. 16. – 066031.
- [278] Ren H., Xu X. Q. Excitation of zonal flow by nonlinear geodesic acoustic mode // Phys. Plasmas. – 2020. – V. 27. – 034501.
- [279] Cheng J., Yan L. W., Zhao K. J., et al. Density fluctuation of geodesic acoustic mode on the HL-2A tokamak // Nucl. Fusion. – 2009. – V. 49. – 085030.
- [280] Melnikov A. V., Hidalgo C., Eliseev L. G., et al. Plasma potential and turbulence dynamics in toroidal devices (survey of T-10 and TJ-II experiments) // Nucl. Fusion. – 2011. – V. 51. – 083043.

- [281] Драбинский М. А., Характеристики геодезической акустической моды и квазикогерентной моды колебаний плазмы токамака Т-10 с омическим и СВЧ-нагревом: дис. канд. физ.-мат. наук: 1.3.9. – Москва, 2023.
- [282] Sgalla R. G. F., Smolyakov A. I., Elfimov A. G., Bashir M. F. Drift effects on geodesic acoustic modes // *Phys. Lett. A.* – 2013. – V. 377. – P. 303–306.
- [283] Ren H. Zonal flows in tokamaks with anisotropic pressure // *Phys. Plasmas.* – 2014. – V. 21. – 044505.
- [284] Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Методы теории слабой турбулентности плазмы // в кн. Основы физики плазмы, т. 1 / Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана. – М.: Энергоатомиздат, 1983. С. 590–638.
- [285] Manz P., Ramisch M., Stroth U. Physical mechanism behind zonal-flow generation in drift-wave turbulence // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – V. 103. – 165004.
- [286] Melnikov A. V., Eliseev L. G., Lysenko S. E., et al. Correlation properties of geodesic acoustic modes in the T-10 tokamak // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2015. – V. 591. – 012003.
- [287] Melnikov A. V., Eliseev L. G., Grashin S. A., et al. Evolution of the electric potential and turbulence in OH and ECRH low-density plasmas in the T-10 tokamak // *Proc. 28th IAEA Fusion Energy Conference, virtual event, 2021*, 661.
- [288] Лахин В. П. О нелинейном взаимодействии геодезических акустических мод и зональных течений в токамаках с тороидальным вращением плазмы // *ЖЭТФ.* – 2025. – Т. 141. – С. 125–137.
- [289] Fu G. Y. On nonlinear self-interaction of geodesic acoustic mode driven by energetic particles // *J. Plasma Phys.* – 2011. – V. 77. – P. 457–467.
- [290] Bakai A. S. Interaction of high-frequency and low-frequency waves in a plasma // *Nucl. Fusion.* – 1970. – V. 10. – P. 53–67.
- [291] Литвак А. Г. Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 10 / Под

- общей ред. акад. М. А. Леонтовича. – М.: Атомиздат, 1980. – С. 164–242.
- [292] Neyfeh S. A., Neyfeh A. H. Nonlinear interactions between two widely spaced modes – external excitation // Int. J. Bif. Chaos. – 1993. – V. 3. – P. 417–427.
 - [293] Neyfeh A. H., Mook D. T. Energy transfer from high-frequency to low-frequency modes in structures // Trans. ASME. – 1995. – V. 117. – P. 186–195.
 - [294] Hu H. F., Staszewski W. J., Hu N. Q., et al. Crack detection using nonlinear acoustics and piezoceramic transducers – instantaneous amplitude and frequency analysis // Smart Mater. Struct. – 2010. – V. 19. – 065017.
 - [295] Bagheri M., Poot M., Li M., et al. Dynamic manipulation of nanomechanical resonators in the high-amplitude regime and non-volatile mechanical memory operation // Nat. Nanotechnol. – 2011. – V. 6. – P. 726–732.
 - [296] Choueiri E. Y. Plasma oscillations in Hall thrusters // Phys. Plasmas. – 2001. – V. 8. – P. 1411–1426.
 - [297] Morozov A. I., Savelyev V. V. Fundamentals of stationary plasma thruster theory // in Reviews of Plasma Physics. Vol. 21 / edited by B. B. Kadomtsev and V. D. Shafranov. – NY: Consultants Bureau, 2000. – P. 203–391.
 - [298] Litvak A. A., Fisch N. J. Rayleigh instability in Hall thrusters // Phys. Plasmas. – 2004. – V. 11. – P. 1379–1383.
 - [299] Litvak A. A., Raites Y., Fisch N. J. Experimental studies of high-frequency azimuthal waves in Hall thrusters // Phys. Plasmas. – 2004. – V. 11. – P. 1701–1705.
 - [300] Keidar M., Beilis I. Electron transport phenomena in plasma devices with $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift // IEEE Trans. Plasma Sci. – 2006. – V. 34. – P. 804–814.
 - [301] Lazurenko A., Coduti G., Mazouffre S., Bonhomme G. Dispersion relation of high-frequency plasma oscillations in Hall thrusters // Phys. Plasmas. – 2008. – V. 15. – 034502.

- [302] Boeuf J. P. Rotating structures in low temperature magnetized plasmas – insight from particle simulations // Front. Phys. – 2014. – V. 2. – 74.
- [303] Голубятников Г. Ю., Егоров С. В., Еремин Б. Г. и др. Нижнегибридный пробой газа в поле витка с током в плазменной магнитной ловушке // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 107. – С. 441–449.
- [304] Пастухов В. П. Об аномальном переносе электронов в переходном слое магнитоэлектростатической ловушки // Физика плазмы. – 1980. – Т. 6. – С. 1003–1011.
- [305] Питерский В. В., Пастухов В. П., Иоффе М. С., и др. Природа аномального переноса электронов поперёк магнитного поля в ловушке с крутым спадом плотности // Физика плазмы. – 1988. – Т. 14. – С. 170–180.
- [306] Davidson R. C., Krall N. A. Anomalous transport in high-temperature plasmas with applications to solenoidal fusion systems // Nucl. Fusion. – 1977. – V. 17. – P. 1313–1372.
- [307] Ильгисонис В. И., Пастухов В. П. Поперечные потери электронов в магнито-электростатической ловушке с низким давлением плазмы // ИАЭ им. И. В. Курчатова. Препр. – 1981. – # 3495/6. – 33 с.
- [308] Михайловский А. Б., Цыпин В. С. Высокочастотная неустойчивость плазмы, находящейся в радиальном электрическом и продольном магнитном полях // Письма в ЖЭТФ. – 1966. – Т. 3. – С. 247–250.
- [309] Морозов А. И., Есипчук Ю. В., Капулкин А. М. и др. Влияние конфигурации магнитного поля на режим работы ускорителя с замкнутым дрейфом электронов (УЗДП) // ЖТФ. – 1972. – Т. 42. – С. 612–619.
- [310] Tomilin D. Gradient instabilities of electromagnetic waves in Hall thruster plasma // Phys. Plasmas. – 2013. – V. 20. – 042103.
- [311] Nikitin V. D., Tomilin D., Lovtsov A., Tarasov A. Gradient-drift and resistive mechanisms of the anomalous electron transport in Hall effect thrusters // Europhysics Letters. – 2017. – V. 117. – 45001.

- [312] Гордеев А. В., Гречиха А. В. Ионные неустойчивости холловской плазмы // Физика плазмы. – 1992. – Т. 18. – С. 3–8.
- [313] Kapulkin A., Guelman M. M. Low-frequency instability in near-anode region of Hall thruster // IEEE Trans. Plasma Sci. – 2008. – V. 36. – P. 2082–2087.
- [314] Frias W., Smolyakov A. I., Kaganovich I. D., Raitses Y. Long wavelength gradient drift instability in Hall plasma devices. I. Fluid theory // Phys. Plasmas. – 2012. – V. 19. – 072112.
- [315] Krall N. A., Liewer P. C. Low-frequency instabilities in magnetic pulses // Phys. Rev. A. – 1971. – V. 4. – P. 2094–2103.
- [316] Davidson R. C., Gladd N. T. Anomalous transport properties associated with the lower-hybrid-drift instability // Phys. Fluids. – 1975. – V. 18. – P. 1327–1335.
- [317] Huba J. D., Wu C. S. Effects of a magnetic field gradient on the lower hybrid instability // Phys. Fluids. – 1976. – V. 19. – P. 988–994.
- [318] Krall N. A., McBride J. B. Magnetic curvature and ion distribution function effects on lower hybrid drift instabilities // Phys. Fluids. – 1976. – V. 19. – P. 1970–1971.
- [319] Fruchtman A. The lower-hybrid drift instability in a slab geometry // Phys. Fluids B. – 1989. – V. 1. – P. 422–429.
- [320] Schep T. J., Kuvshinov B. N., Pegoraro F. Generalized two-fluid theory of nonlinear magnetic structures // Phys. Plasmas. – 1994. – V. 1. – P. 2843–2852.
- [321] Lakhin V. P., Ilgisonis V. I., Smolyakov A. I., et al. Marginal stability, characteristic frequencies, and growth rates of gradient drift modes in partially magnetized plasmas with finite electron temperature // Phys. Plasmas. – 2018. – V. 25. – 012107.
- [322] Тимофеев А. В. Резонансные явления в колебаниях плазмы // М.: Физматлит, 2000, 224 с.
- [323] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том 6: Гидродинамика // М.: Физматлит, 2003, 736 с.

- [324] Koshkarov O., Smolyakov A. I., Romadanov I. V., et al. Current flow instability and nonlinear structures in dissipative two-fluid plasmas // Phys. Plasmas. – 2018. – V. 25. – 011604.
- [325] Ромаданов И. В., Смоляков А. И., Сорокина Е. А., и др. Устойчивость ионного потока и роль граничных условий в модели стационарного плазменного ускорителя с однородной подвижностью электронов // Физика плазмы. – 2020. – Т. 46. – С. 318–328.
- [326] Zeleny L. M., Taktakishvili A. L. Spontaneous magnetic reconnection mechanisms in plasma // Astrophys. Space Sci. – 1987. – V. 134. – P. 185–196.
- [327] Сивухин Д. В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 1 / Под ред. М. А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. – С. 7–97.
- [328] Морозов А. И., Соловьёв Л. С. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях // в кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 2 / Под ред. М. А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. – С. 177–261.
- [329] Нортроп Т. Адиабатическая теория заряженных частиц / Под ред. Н. Н. Семашко. – М.: Атомиздат, 1967, 127 с.
- [330] Галеев А. А., Сагдеев Р. З. “Неоклассическая” теория диффузии // в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 7 / Под ред. акад. М. А. Леонтовича. – М.: Атомиздат, 1973. – С. 205–271.
- [331] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том 1: Механика // М.: Наука, 1988, 215 с.
- [332] Морозов А., Соловьёв Л. Интегралы дрейфовых уравнений // ДАН СССР. – 1959. – Т. 128. – С. 506.
- [333] Littlejohn R. G. Variational principles of guiding center motion // J. Plasma Phys. – 1983. – V. 29. – P. 111–125.
- [334] Cary J. R., Brizard A. J. Hamiltonian theory of guiding-center motion // Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 81. – P. 693–738.

- [335] Boozer A. H. Guiding center drift equations // Phys. Fluids. – 1980. – V. 23. – P. 904–908.
- [336] Ким В. П. О продольном распределении электрического поля в зонах ускорения плазменных ускорителей и двигателей с замкнутым дрейфом электронов // Физика плазмы. – 2017. – Т. 43. – С. 406–418.
- [337] Веселовзоров А. Н., Длугач Е. Д., Погорелов А. А., и др. Исследование формирования ионных потоков в переменных электрических полях стационарного плазменного двигателя // ЖТФ. – 2013. – Т. 83. – С. 38–42.
- [338] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика // М.: Мир, 1984, 528 с.
- [339] Marini S., Pakter R. Single electron dynamics in a Hall thruster electromagnetic field profile // Phys. Plasmas. – 2017. – V. 24. – 053507.
- [340] Donne A. J. H. Diagnostics for current density and radial electric field measurements: overview and recent trends // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2002. – V. 44. – P. B137–B158.
- [341] Ida K. Experimental studies of the physical mechanism determining the radial electric field and its radial structure in a toroidal plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. – 1998. – V. 40. – P. 1429–1488.
- [342] Romannikov A., Bourdelle C., Bucalossi J., et al. Measurement of central toroidal rotation in ohmic Tore Supra plasmas // Nucl. Fusion. – 2000. – V. 40. – P. 319–324.
- [343] Coenen J. W., Schweer B., Clever M., et al. Charge exchange recombination spectroscopy on a diagnostic hydrogen beam-measuring impurity rotation and radial electric field at the tokamak TEXTOR // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2010. – V. 43. – 144015.
- [344] Melnikov A. V. Evolution of heavy ion beam probing from the origins to study of symmetric structures in fusion plasmas // Symmetry. – 2021. – V. 13. – 1367.
- [345] Bugarya V. I., Gorshkov A. V., Grashin S. A., et al. Measurements of plasma column rotation and potential in the TM-4 tokamak // Nucl. Fusion. – 1985. – V. 25. – P. 1707–1717.

- [346] Rozhansky V., Tendler M. Plasma rotation in tokamaks // in Reviews of Plasma Physics. Vol. 19 / Edited by B. B. Kadomtsev. – New York: Consultants Bureau, 1996. – P. 147.
- [347] Hinton F. L. Thermal confinement bifurcation and the L - to H -mode transition in tokamaks // Phys. Fluids B. – 1991. – V. 3. – P. 696–704.
- [348] Kim Y. B., Diamond P. H., Groebner R. J. Neoclassical poloidal and toroidal rotation in tokamaks // Phys. Fluids B. – 1991. – V. 3. – P. 2050–2060.
- [349] Hinton F. L., Kim Y. B., Brizard A., Burrell K. H. Poloidal rotation near the edge of a tokamak plasma in H mode // Phys. Rev. Lett. – 1994. – V. 72. – P. 1216–1219.
- [350] Shaing K. S., Hsu C. T., Hazeltine R. D. Effects of orbit squeezing on poloidal mass flow and bootstrap current in tokamak plasmas // Phys. Plasmas. – 1994. – V. 1. – P. 3365–3368.
- [351] Rogister A. L. Revisited neoclassical transport theory for steep, collisional plasma edge profiles // Phys. Plasmas. – 1994. – V. 1. – P. 619–635.
- [352] Hinton F. L., Kim Y. B. Poloidal rotation in tokamaks with large electric field gradients // Phys. Plasmas. – 1995. – V. 2. – P. 159–166.
- [353] Коврижных Л. М. Вращение плазмы в гофрированных токамаках и стеллараторах // Физика плазмы. – 1999. – Т. 25. – С. 827–841.
- [354] Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Неустойчивость плазмы на запертых частицах в тороидальной геометрии // ЖЭТФ. – 1966. – Т. 51. – С. 1734–1741.
- [355] Kolesnichenko Ya. I., White R. B., Yakovenko Yu. V. Precession of toroidally passing particles in tokamaks and spherical tori // Phys. Plasmas. – 2003. – V. 10. – P. 1449–1457.
- [356] Davydenko V. I., Ivanov A. A., Karpushov A. N., et al. Radial electric field measurement in a tokamak by the injection of a pulsed

- neutral beam // Plasma Phys. Control. Fusion. – 1994. – V. 36. – P. 1805–1817.
- [357] Petrov Yu., Huang T.S. Plasma rotation caused by radial electric field in tokamaks: a calculation using the guiding field line model // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2001. – V. 44. – P. 1483–1499.
- [358] Ильгисонис В. И., Сорокина Е. А., Юрченко Э. И. Бесстолкновительная генерация тока в центре плазмы токамака изотропным источником α -частиц // Физика плазмы. – 2010. – Т. 36. – С. 3–16.
- [359] Сорокина Е. А. Влияние неоднородности коэффициента запаса устойчивости на бесстолкновительную генерацию тока в токамаке // Физика плазмы. – 2011. – Т. 37. – С. 21–29.
- [360] Ильгисонис В. И., Сорокина Е. А. Третий адиабатический инвариант и бесстолкновительная функция распределения ансамбля частиц в токамаке // Письма в ЖЭТФ. – 2011. – Т. 94. – С. 742–747.
- [361] Brizard A. J. Compact formulas for guiding-center orbits in axisymmetric tokamak geometry // Phys. Plasmas. – 2011. – V. 18. – 022508.
- [362] Готт Ю. В., Юрченко Э. И. Топология дрейфовых траекторий заряженных частиц и теплоперенос в токамаке // Физика плазмы. – 1999. – Т. 25. – С. 403–415.
- [363] Shaing K. C., Hazeltine R. D., Zarnstorff M. C. Ion transport process around magnetic axis in tokamaks // Phys. Plasmas. – 1997. – V. 4. – P. 771–777.
- [364] Shaing K. C., Hazeltine R. D., Zarnstorff M. C. Electron transport processes close to magnetic axis in tokamaks // Phys. Plasmas. – 1997. – V. 4. – P. 1375–1378.
- [365] Eriksson L-G., Porcelli F. Dynamics of energetic ion orbits in magnetically confined plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2001. – V. 43. – P. R145–R182.